

# Électromagnétisme et transmission des ondes

GEL-2910/GEL-3002



**Dominic Grenier**

Département de génie électrique et de génie informatique  
Université Laval  
Québec (QC), G1V 0A6

Automne 2023

© DG-2000,2001,2004

Révision 2021, Chap. 1-10 : J. Genest, D. Grenier



## REMERCIEMENTS :

- Tout au long de l'ouvrage, vous pourrez apprécier la qualité des figures. C'est pourquoi je désire exprimer ma reconnaissance à M. **Frédéric Jean** qui est l'auteur de la majorité d'entre elles ; il a su composer avec mes exigences parfois capricieuses.
- Je remercie particulièrement le professeur **Jérôme Genest** pour avoir fait une révision globale en été 2021. De concert, nous avons procédé à des ajustements et à des modifications qui rehaussent la qualité du document afin de lui assurer une certaine pérennité.

## NOTES :

- Les unités utilisées sont toutes en SI ou en SI-dérivée (longueur :  $m$ , masse :  $kg$ , temps :  $s$ , courant :  $A$ , puissance :  $W$ , tension :  $V$ , charge :  $C$ , fréquence :  $Hz \dots$ ).
  - – Les vecteurs sont identifiés par l'identificateur en caractère gras (e.g.  $\mathbf{E}$ ).
  - Les composantes d'un vecteur sont spécifiées par l'entremise de leur coordonnée mise en indice inférieur (e.g.  $E_x$  ou  $E_\theta$ ).
  - Les phaseurs et les quantités complexes qui en découlent, avec un module et une phase, sont plutôt représentés par leur identificateur surmonté d'une barre (e.g.  $\bar{E}$ ,  $\bar{E}_\theta$  ou  $\bar{Z}_i$ ).
  - Ainsi, les vecteurs-phaseurs sont identifiés par l'identificateur en caractère gras surmonté d'une barre (e.g.  $\bar{\mathbf{E}}$ ).
  - Finalement, les modules d'un phaseur (en valeur crête) ou d'une quantité complexe, ainsi que les scalaires, sont identifiés par leur identificateur régulier (e.g.  $E$  ou  $E_\theta$  ou  $Z_i$  ou  $h$ ).
- Ce document a été produit par L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notions de base</b>	<b>1</b>
1.1	Les champs . . . . .	1
1.2	Phaseur . . . . .	3
1.3	Intégrales de ligne et de surface . . . . .	4
1.3.1	Intégrales de ligne . . . . .	4
1.3.2	Intégrales de surface . . . . .	7
1.4	Théorèmes de Stokes et de Green . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Les champs et les matériaux</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Champ électrique statique . . . . .	17
2.3	Champ d'induction magnétique statique . . . . .	22
2.4	Conducteur et conductivité . . . . .	28
2.5	Diélectrique et champ de déplacement . . . . .	29
2.6	Matériau magnétique et champ magnétique . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Les lois de Maxwell</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	Loi de Faraday . . . . .	39
3.3	Loi d'Ampère . . . . .	43
3.4	Équation de continuité . . . . .	46
3.5	Équations de Gauss . . . . .	47
3.5.1	Charges magnétiques . . . . .	48
3.5.2	Charges électriques . . . . .	49
3.6	Formes différentielles . . . . .	52
3.7	Conditions aux limites . . . . .	53
3.7.1	Composante tangentielle du champ électrique . . . . .	54
3.7.2	Composante tangentielle du champ magnétique . . . . .	54
3.7.3	Composante normale du champ d'induction . . . . .	55
3.7.4	Composante normale du champ de déplacement . . . . .	56
3.7.5	Résumé des conditions aux limites . . . . .	56
3.7.6	Propriétés supplémentaires . . . . .	57

<b>4</b>	<b>Statique et Quasi-statique</b>	<b>67</b>
4.1	introduction . . . . .	67
4.2	Applications directes aux champs statiques . . . . .	68
4.3	Voltage et potentiel . . . . .	73
4.3.1	Voltage et potentiel scalaire . . . . .	73
4.3.2	Équipotentielle . . . . .	75
4.4	Théorie des images . . . . .	77
4.5	Équation de Laplace, méthode des différences finies . . . . .	81
4.5.1	Laplacien discret . . . . .	81
4.5.2	Interface entre diélectriques . . . . .	84
4.6	De l'électromagnétisme aux circuits . . . . .	87
4.6.1	Capacitance . . . . .	87
4.6.2	Conductance . . . . .	89
4.6.3	Inductance . . . . .	90
4.6.3.1	Inductance externe . . . . .	91
4.6.3.2	Inductance interne . . . . .	94
4.6.3.3	Réductance . . . . .	94
4.7	Énergie emmagasinée . . . . .	97
4.7.1	Énergie électrique emmagasinée . . . . .	98
4.7.2	Énergie magnétique emmagasinée . . . . .	100
4.8	Analyse de comportement en quasi-statique . . . . .	103
4.8.1	Inductance . . . . .	104
4.8.2	Condensateur . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Onde plane uniforme</b>	<b>117</b>
5.1	Introduction . . . . .	117
5.2	Rappel : équations de <i>Maxwell</i> , relations constitutives . . . . .	117
5.3	Équation d'onde dans un matériau sans perte . . . . .	118
5.3.1	Développement de l'équation d'onde . . . . .	119
5.3.2	Onde plane uniforme se propageant selon $z$ . . . . .	120
5.3.3	Solution à l'équation d'onde temporelle . . . . .	122
5.3.4	Observations . . . . .	122
5.4	Onde sinusoïdale dans un milieu quelconque . . . . .	123
5.5	Puissance et vecteur de Poynting . . . . .	129
5.6	Caractéristiques de l'onde plane homogène . . . . .	135
5.7	Paramètres de propagation des matériaux . . . . .	137
5.7.1	Diélectrique parfait . . . . .	138
5.7.2	Diélectrique à faibles pertes . . . . .	139
5.7.3	Bon conducteur . . . . .	141
5.7.3.1	Effet de peau . . . . .	143
5.7.4	Conducteur parfait . . . . .	144
5.8	Propagation dans une direction arbitraire . . . . .	144
5.8.1	Vecteur de propagation . . . . .	146

5.8.2	Vitesses de l'énergie, de phase et de groupe . . . . .	150
5.9	Polarisation . . . . .	153
5.9.1	Polarisation linéaire . . . . .	153
5.9.2	Polarisations circulaire et elliptique . . . . .	154
<b>6</b>	<b>Réflexion et transmission</b>	<b>169</b>
6.1	Introduction . . . . .	169
6.2	Incidence normale . . . . .	169
6.3	Lois de réflexion et de réfraction . . . . .	173
6.4	Incidence oblique . . . . .	175
6.4.1	Cas particulier sans perte . . . . .	175
6.4.2	Polarisation perpendiculaire . . . . .	176
6.4.3	Polarisation parallèle . . . . .	179
6.4.4	Analyse et discussion . . . . .	181
6.4.4.1	Angle critique . . . . .	182
6.4.4.2	Angle de Brewster . . . . .	183
6.4.4.3	Comportement des coefficients . . . . .	185
6.5	Incidence sur un conducteur parfait . . . . .	186
<b>7</b>	<b>Ligne de transmission en mode TEM</b>	<b>191</b>
7.1	Introduction . . . . .	191
7.2	Mode TEM . . . . .	192
7.3	Modèle distribué d'une ligne . . . . .	193
7.4	Correspondances électromagnétisme-circuit . . . . .	196
7.4.1	Équivalences rapides C-G-L . . . . .	197
7.4.2	Puissance transportée . . . . .	199
7.5	Effet d'une ligne sans perte . . . . .	202
7.6	Effet d'une ligne quelconque à pertes . . . . .	204
7.7	Paramètres distribués vs facteur de forme . . . . .	208
7.8	Détermination des paramètres de ligne . . . . .	209
7.8.1	Technique analytique . . . . .	210
7.8.2	Technique graphique . . . . .	213
7.8.3	Techniques numériques . . . . .	213
7.9	Mode quasi-TEM . . . . .	219
7.9.1	Constante diélectrique effective . . . . .	220
7.9.2	Modification aux calculs . . . . .	221
<b>8</b>	<b>Régime transitoire sur ligne</b>	<b>229</b>
8.1	Introduction . . . . .	229
8.2	Rappels des notions . . . . .	229
8.2.1	Transformation de Laplace . . . . .	229
8.2.2	Principes de circuit . . . . .	230
8.2.3	Équivalent circuit des interrupteurs . . . . .	231
8.3	Effet de la ligne . . . . .	233

8.4	Transitoire d'un système simple . . . . .	234
8.4.1	Condition à la source . . . . .	234
8.4.2	Condition à la charge . . . . .	236
8.4.3	Développement du transitoire . . . . .	236
8.4.4	Approche raisonnée . . . . .	238
8.4.5	Signaux en régime permanent avec source $u(t)$ . . . . .	241
8.5	Diagramme en Z . . . . .	243
8.5.1	Lecture du diagramme . . . . .	244
8.6	Distribution de l'énergie . . . . .	248
8.7	Sources multiples . . . . .	249
8.8	Endroit du changement et conditions initiales . . . . .	252
8.9	Point de jonction sur ligne . . . . .	256
8.9.1	Résistance parallèle . . . . .	257
8.9.2	Résistance série . . . . .	258
8.9.3	Jonction quelconque . . . . .	259
8.9.4	Diagramme en Z avec point de jonction . . . . .	260
8.10	Impédance réactive . . . . .	263
8.10.1	Conditions initiales nulles . . . . .	265
8.10.2	Conditions initiales non-nulles . . . . .	269
8.11	Paramètres S . . . . .	271
8.11.1	Ports sans adaptation . . . . .	272
<b>9</b>	<b>Régime sinusoïdal permanent sur ligne</b> . . . . .	<b>283</b>
9.1	Introduction . . . . .	283
9.2	Tension et courant sur la ligne . . . . .	283
9.3	Court-circuit et circuit-ouvert . . . . .	285
9.3.1	Puissance instantanée et moyenne . . . . .	290
9.4	Paramètres du régime sinusoïdal permanent . . . . .	291
9.4.1	Coefficient de réflexion généralisé . . . . .	291
9.4.2	Diagramme d'onde stationnaire . . . . .	292
9.4.3	Rapport d'onde stationnaire . . . . .	297
9.4.4	Particularités sur les impédances vues . . . . .	298
9.5	Abaque de Smith . . . . .	302
9.5.1	Construction de l'abaque . . . . .	302
9.5.1.1	$r$ et $x$ versus $u$ et $v$ . . . . .	302
9.5.1.2	Superposition des lieux $r = \text{cte}$ et $x = \text{cte}$ . . . . .	304
9.5.1.3	Finalisation de l'abaque . . . . .	305
9.5.2	Paramètres mesurables sur l'abaque . . . . .	306
9.6	Estimation de charge . . . . .	313
9.6.1	Principes théoriques de calcul de charge . . . . .	313
9.6.2	Estimation expérimentale de charge . . . . .	314
9.7	Adaptation . . . . .	317
9.7.1	Transformateur quart-d'onde . . . . .	319

9.7.2 Réactance localisée simple . . . . . 321  
 9.7.3 Stub simple . . . . . 325  
 9.7.4 Double stub . . . . . 329  
 9.7.5 Largeur de bande d'adaptation . . . . . 336  
 9.8 Optimisation du SWR . . . . . 337  
 9.9 Ligne à pertes . . . . . 343

**10 Guide d'onde 355**

10.1 Introduction . . . . . 355  
 10.2 Modes supérieurs dans un guide à plaques parallèles . . . . . 357  
 10.2.1 Fréquence de coupure . . . . . 359  
 10.2.2 Longueur d'onde guidée . . . . . 361  
 10.2.3 Vitesses de phase et de groupe . . . . . 362  
 10.2.4 Impédance intrinsèque en mode supérieur . . . . . 363  
 10.2.5 Correspondances avec ligne en mode TEM . . . . . 364  
 10.3 Guide d'onde rectangulaire . . . . . 366  
 10.3.1 Analyse mathématique . . . . . 368  
 10.3.1.1 Développement des équations de Maxwell . . . . . 368  
 10.3.1.2 Choix du mode de transmission . . . . . 369  
 10.3.1.3 Expression des champs selon  $\vec{H}_z$  . . . . . 371  
 10.3.1.4 Équation d'onde en  $\vec{H}_z$  . . . . . 371  
 10.3.1.5 Résolution de l'équation d'onde . . . . . 371  
 10.3.1.6 Respect des conditions limites . . . . . 373  
 10.3.1.7 Expressions finales des autres composantes . . . . . 374  
 10.3.2 Quelques modes  $TE_{mn}$  . . . . . 374  
 10.3.2.1 Mode fondamental  $TE_{10}$  . . . . . 374  
 10.3.2.2 Mode  $TE_{20}$  . . . . . 376  
 10.3.2.3 Mode  $TE_{11}$  . . . . . 377  
 10.3.3 Principaux paramètres . . . . . 378  
 10.3.3.1 Fréquence de coupure . . . . . 379  
 10.3.4 Longueur d'onde guidée . . . . . 380  
 10.3.5 Vitesses de phase et de groupe . . . . . 381  
 10.3.6 Impédance intrinsèque en mode supérieur . . . . . 382  
 10.3.7 Mode Transverse Magnétique . . . . . 382  
 10.3.8 Conclusion sur les guides rectangulaires . . . . . 383  
 10.4 Guide d'onde circulaire . . . . . 384  
 10.4.1 Expressions des champs . . . . . 384  
 10.4.2 Paramètres principaux . . . . . 387  
 10.5 Puissance et énergie ( $TE_{10}$  rectangulaire) . . . . . 390  
 10.5.1 Puissance transportée . . . . . 390  
 10.5.2 Énergie emmagasinée par unité de longueur . . . . . 391  
 10.5.3 Vitesse de l'énergie . . . . . 391  
 10.6 Pertes dans le guide d'onde . . . . . 391

10.6.1	Pertes dans le conducteur . . . . .	392
10.6.2	Pertes dans le diélectrique . . . . .	394
10.7	Cavité résonnante . . . . .	395
10.7.1	Expressions des champs $TE_{mnp}$ . . . . .	395
10.7.2	Paramètres principaux . . . . .	396
<b>11</b>	<b>Antennes - introduction</b>	<b>403</b>
11.1	Introduction . . . . .	403
11.2	Impédance . . . . .	404
11.2.1	Résistance de rayonnement . . . . .	405
11.2.2	Circuit avec antenne . . . . .	406
11.2.3	Efficacité de rayonnement . . . . .	407
11.3	Intensité de rayonnement . . . . .	407
11.4	Diagramme de rayonnement . . . . .	409
11.5	Angle solide du faisceau . . . . .	411
11.6	Directivité et gain . . . . .	412
11.7	Ouverture ou longueur effective . . . . .	415
11.8	Ouverture vs directivité . . . . .	416
11.9	Valeurs pour antennes filiformes . . . . .	418
<b>A</b>	<b>Système de coordonnées</b>	<b>421</b>
A.1	Transformations scalaires . . . . .	421
A.2	Transformations d'éléments différentiels . . . . .	421
A.3	Transformations vectorielles . . . . .	422
<b>B</b>	<b>Lettres grecques</b>	<b>424</b>
<b>C</b>	<b>Constantes physiques fondamentales</b>	<b>425</b>
C.1	Valeurs recommandées et fixées (2018) . . . . .	425
C.2	Unités SI . . . . .	425
C.3	Unités SI supplémentaires . . . . .	426
C.4	Unités utilisées avec SI . . . . .	426
C.5	Préfixes SI . . . . .	426
<b>D</b>	<b>Table des symboles</b>	<b>427</b>
<b>E</b>	<b>Équations de base en EM</b>	<b>431</b>
E.1	Équations de <i>Maxwell</i> . . . . .	431
E.2	Équation de continuité . . . . .	431
E.3	Relations constitutives . . . . .	431
E.4	Équation du courant de conduction . . . . .	431
E.5	Conditions aux limites . . . . .	431

# Chapitre 1

## Notions de base

### 1.1 Les champs

Un champ est une entité physique parfois difficile à concevoir ; il s'agit d'un concept utile pour faciliter l'interprétation de phénomènes existants. Le champ est une grandeur physique qui possède une valeur reliée à chaque point de l'espace. Des champs sont définis en lien avec les forces appliquées sur des objets. Tout le monde connaît bien le champ gravitationnel de la Terre lié à la force attirant les objets vers son centre. Les champs électriques et magnétiques sont aussi des champs de force reliés aux répulsions ou attractions électriques et magnétiques<sup>1</sup>. Dans un contexte plus large, on dira qu'un champ est l'ensemble des valeurs aux différentes coordonnées spatiales d'une quantité physique.

Quoique l'invisibilité de la gravitation n'empêche pas celle-ci d'être facilement comprise et interprétée, il n'en va pas ainsi pour tous les champs. En effet, il existe différents type de champs comme on le détaille ci-dessous.

- Le champ peut être identique partout dans une région prédéfinie de l'espace dans lequel cas on le dit uniforme ;
- Le champ peut varier en fonction du temps. Il sera donc statique ou variant (dans le temps – “time-varying”) selon qu'il soit indépendant ou non du temps ;
- Plus encore, le champ peut être vectoriel ou scalaire lorsque la quantité qu'il représente a une direction dans l'espace ou non respectivement.

Ainsi le champ gravitationnel est relativement uniforme dans la région de l'atmosphère terrestre, statique et vectoriel contrairement au champ électromagnétique souvent non-uniforme, variant et toujours vectoriel. On peut ouvrir ici une première parenthèse : s'il n'y a pas d'évolution dans le temps, le champ électrique et le champ magnétique sont dissociables ; par contre une variation temporelle de l'un ou l'autre rend ces deux champs indissociables d'où le nom combiné électromagnétisme.

---

<sup>1</sup>Il existe quatre types de force dans la nature soit la force gravitationnelle, la force électromagnétique, les forces nucléaires faible et forte ; on verra que les forces électrique et magnétique sont en fait une même force dite électromagnétique.

La température et la pression atmosphérique sont des exemples de champs scalaires ; par contre leur gradient sont des quantités vectorielles. Soit le cas de la température dans un système de coordonnées cartésiennes pour bien se fixer les idées. Si la température d'une pièce est assumée identique partout et fixe dans le temps alors  $T = \text{cte}$  ; par contre si elle est non-uniforme mais toujours constante alors  $T = T(x, y, z)$ . On comprend aisément que pour tenir compte de l'évolution de la température dans le temps, on a maintenant le cas général :

$$T = T(x, y, z, t) . \tag{1.1}$$

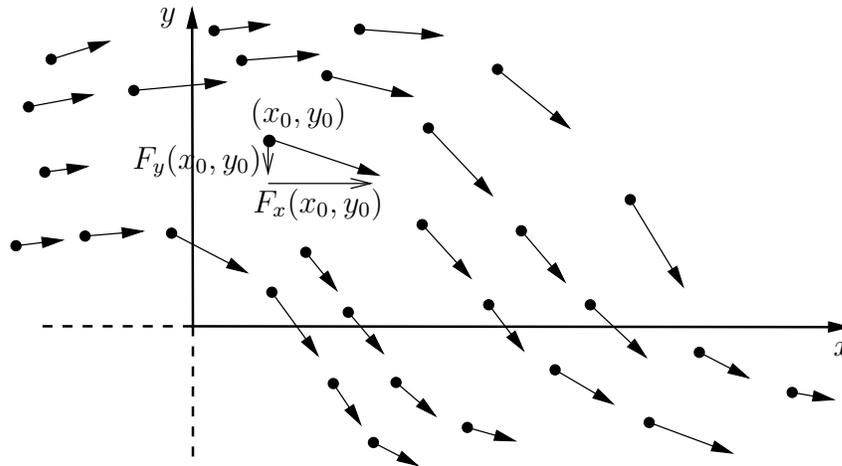


FIGURE 1.1 – Lignes de champ vectoriel dans un espace cartésien à deux dimensions.

Pour un champ vectoriel, il existe autant de composantes que la dimension de l'espace soit 3 pour un espace physique. Le champ vectoriel  $\mathbf{F}$  s'écrit :

$$\mathbf{F}(x, y, z, t) = F_x(x, y, z, t)\mathbf{a}_x + F_y(x, y, z, t)\mathbf{a}_y + F_z(x, y, z, t)\mathbf{a}_z . \tag{1.2}$$

La figure 1.1 montre un exemple de champ vectoriel dans un plan cartésien (espace à 2 dimensions). Les flèches indiquent la direction et leur longueur est proportionnelle à l'amplitude.

Des expressions similaires existent pour les autres systèmes de coordonnées. En cylindrique ou en sphérique, on obtient :

$$\mathbf{F}(r, \phi, z, t) = F_r(r, \phi, z, t)\mathbf{a}_r + F_\phi(r, \phi, z, t)\mathbf{a}_\phi + F_z(r, \phi, z, t)\mathbf{a}_z \tag{1.3}$$

$$\mathbf{F}(r, \theta, \phi, t) = F_r(r, \theta, \phi, t)\mathbf{a}_r + F_\theta(r, \theta, \phi, t)\mathbf{a}_\theta + F_\phi(r, \theta, \phi, t)\mathbf{a}_\phi . \tag{1.4}$$

Comme on peut le remarquer par ces exemples, une quantité vectorielle est identifiée par un caractère gras normalement majuscule sauf pour les vecteurs unitaires notées  $\mathbf{a}_k$ . Ces derniers sont des vecteurs dont le module<sup>2</sup> (ou longueur) vaut l'unité.

---

<sup>2</sup>Pour obtenir la grandeur d'un vecteur, il suffit de prendre la racine carrée de la somme des composantes au carré de la base e.g.  $F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$  en cartésien. Si un vecteur  $\mathbf{F}$  possède une direction  $\mathbf{a}_F = m_x\mathbf{a}_x + m_y\mathbf{a}_y + m_z\mathbf{a}_z$  (avec  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$  car module unitaire), alors  $F_x = F \cdot m_x$ ,  $F_y = F \cdot m_y$ ,  $F_z = F \cdot m_z$ .

## 1.2 Phaseur

Les phaseurs sont des outils mathématiques utilisés lorsque les signaux varient sinusoïdalement dans le temps aussi appelés variations harmoniques. Ce sont des nombres complexes qui, ramenés sous la forme polaire, ont un module et un argument<sup>3</sup>

- Le module représente l'amplitude crête du signal (parfois la valeur efficace lorsque bien spécifié).
- L'argument correspond au déphasage du signal sinusoïdal à l'origine du temps.

En utilisant l'analyse de Fourier, on peut démontrer que la réponse en régime permanent d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale reste sinusoïdale et avec la même fréquence d'oscillations. Seuls le module et la phase changent. Ce régime sinusoïdal permanent est pratique car il permet d'obtenir plus facilement la réponse d'un système linéaire à une excitation quelconque en procédant une fréquence à la fois. Comme toute forme de signal peut se décomposer en une somme de composantes sinusoïdales<sup>4</sup>, l'idée est de déterminer la réponse du système pour chacune des composantes indépendamment des autres et de sommer ces réponses dans le plan complexe.

Soit la fonction harmonique  $F(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ . Dans cette expression,  $A$  est l'amplitude de la variation sinusoïdale et  $(\omega t + \phi)$  est la phase. À l'origine i.e. à  $t = 0$ , le déphasage est simplement  $\phi$ . Cette fonction peut aussi s'écrire à partir des identités d'*Euler* comme suit :

$$F(t) = \operatorname{Re}\left\{\underbrace{Ae^{j\phi}}_{\bar{F}} e^{j\omega t}\right\} \quad (1.5)$$

où  $\bar{F}$  est le phaseur représentant la fonction. On peut alors travailler uniquement avec le phaseur sachant que la variation temporelle est du type  $e^{j\omega t}$ . Lorsqu'on utilise les phaseurs, tous les paramètres qui en découlent sont complexes, comme les phaseurs d'ailleurs. On surmonte d'une barre ( $\bar{\quad}$ ) le paramètre en question pour bien montrer que son emploi est limité au régime sinusoïdal permanent.

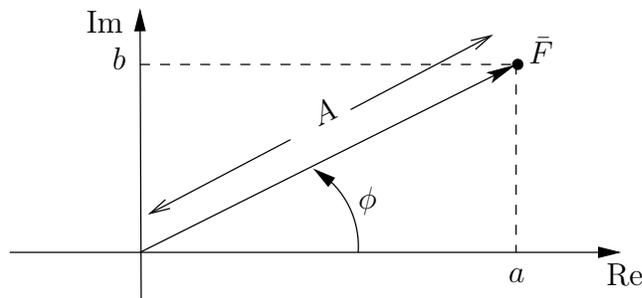


FIGURE 1.2 – Représentation d'un phaseur dans le plan complexe.

Le phaseur et, par extension, tous les paramètres complexes peuvent être représentés sous la forme rectangulaire autant que sur la forme polaire comme sur la figure 1.2. La

<sup>3</sup>Le mot phase convient aussi.

<sup>4</sup>C'est la transformée de *Fourier* qui permet de trouver les diverses composantes sinusoïdales.

conversion entre les deux formes est simple et bien connue. On doit ajouter qu'une addition (soustraction) de deux phaseurs se réalise aisément en rectangulaire alors que la multiplication (division) est plus simple en polaire. Dans l'exemple de la fonction harmonique  $F(t)$ , on a :

$$\bar{F} = A e^{j\phi} \tag{1.6}$$

$$= \underbrace{A \cos(\phi)}_a + j \underbrace{A \sin(\phi)}_b \tag{1.7}$$

avec

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.8}$$

$$\phi = \arctan(b/a) . \tag{1.9}$$

La solution d'une équation différentielle d'un système linéaire avec la technique des phaseurs consiste à remplacer toutes les dérivées simples par  $j\omega$ . En effet, la dérivée première de la fonction harmonique  $F(t)$  est

$$\frac{dF(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) = \omega A \cos(\omega t + \phi + \pi/2) \tag{1.10}$$

$$= \text{Re}\{\omega \underbrace{A e^{j\phi}}_{\bar{F}} \underbrace{e^{j\pi/2}}_j e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{j\omega \bar{F} e^{j\omega t}\} \tag{1.11}$$

où on remarque que le phaseur résultant est  $j\omega\bar{F}$  soit le produit du phaseur initial par  $j\omega$ . On peut aussi voir que la dérivée produit une avance de phase de  $\pi/2$  correspondant à  $+j$  dans le plan complexe.

### 1.3 Intégrales de ligne et de surface

#### 1.3.1 Intégrales de ligne

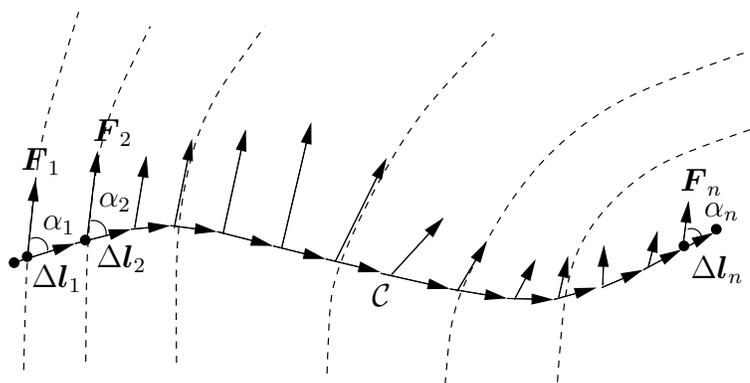


FIGURE 1.3 – Modélisation de l'intégrale de ligne.

L'intégrale de ligne d'un champ vectoriel  $\mathbf{F}$  le long d'un parcours quelconque  $\mathcal{C}$  représente l'influence cumulative du champ selon la direction du parcours arbitrairement choisi.

Elle est simplement définie comme :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} .$$

Pour comprendre l'intégrale de ligne, on décompose le parcours en segments infinitésimaux  $\Delta\mathbf{l}_1, \Delta\mathbf{l}_2, \dots, \Delta\mathbf{l}_n$ . Elle est alors équivalente à la somme des  $n$  produits scalaires de  $\mathbf{F}_k$  (la valeur du champ évalué à la position du segment  $k$ ) par le segment  $\Delta\mathbf{l}_k$ , donc :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \approx \sum_{k=1}^n F_k \Delta l_k \cos \alpha_k \quad (1.12)$$

où  $\alpha_k$  est l'angle entre  $\mathbf{F}_k$  et  $\Delta\mathbf{l}_k$  comme il apparaît sur la figure 1.3. Il faut bien voir que le champ est une fonction de l'espace donc de la position à laquelle on l'évalue. On pourrait écrire  $\mathbf{F}(\mathbf{l})$ .

Dans le système de coordonnées cartésien, l'approximation de l'intégrale de ligne devient :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \approx \sum_{k=1}^n (F_x \Delta x_k + F_y \Delta y_k + F_z \Delta z_k) \quad (1.13)$$

en prenant

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z . \quad (1.14)$$

Il y a cependant un danger à écrire l'équation de cette manière car on pourrait croire que l'intégrale de ligne se résume à trois intégrales de la même fonction sur chacune des coordonnées. Il n'en est rien car les éléments différentiels  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , de l'équation ne sont pas indépendants puisqu'ils dépendent tous du parcours suivi. Il faut donc les relier à l'équation du parcours entre les deux points.

### Exemple 1.1

Soit la fonction  $\mathbf{F} = 5y\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_z$ .

- Faites l'intégrale de ligne du point  $(0, 0, 0)$  au point  $(1, 2, 3)$  le long du parcours  $2x = y, 9x = z^2$ .

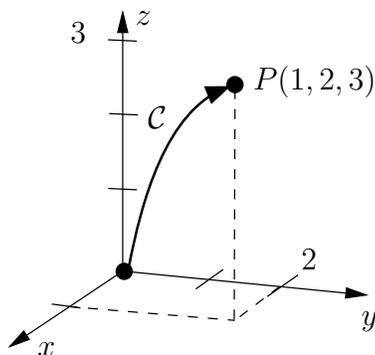


FIGURE 1.4 – Parcours de l'intégrale de ligne.

On commence par dériver les équations du parcours d'où :

$$2dx = dy, 9dx = 2zdz .$$

L'élément différentiel s'écrit donc en fonction de  $dx$  par exemple, comme :

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{a}_x + 2dx\mathbf{a}_y + \frac{9dx}{2z}\mathbf{a}_z$$

On a maintenant :

$$\int_{C(0,0,0)}^{(1,2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C(0,0,0)}^{(1,2,3)} 5ydx + \frac{9x^2dx}{2z} .$$

Puis, en remplaçant les variables  $y$  et  $z$  par leur relation avec  $x$  suivant l'équation du parcours, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{C(0,0,0)}^{(1,2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^1 5(2x)dx + \frac{9x^2dx}{2(3\sqrt{x})} \\ &= \int_0^1 (10x + 1.5x^{3/2})dx \\ &= [5x^2 + 0.6x^{5/2}]_0^1 = 5.6 . \end{aligned}$$

On peut aussi procéder de cette manière :

$$\begin{aligned} \int_{C(0,0,0)}^{(1,2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^1 5ydx + \int_0^3 x^2dz \\ &= \int_0^1 5(2x)dx + \int_0^3 (z^2/9)^2dz \\ &= [5x^2]_0^1 + \left[ \frac{z^5}{405} \right]_0^3 = 5.6 . \end{aligned}$$

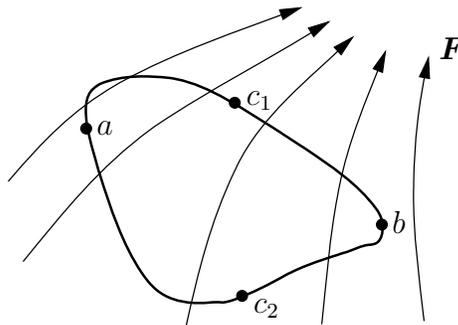


FIGURE 1.5 – Intégrale de ligne sur un parcours fermé ou la circulation du champ.

Si le parcours est fermé, on écrit l'intégrale de cette manière  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  pour bien le montrer. Cette intégrale est connue sous le nom de circulation. On vérifie que si la circulation

d'un champ est nulle sur un parcours passant par deux points distincts  $a$  et  $b$ , c'est qu'il y a conservation de l'énergie sur ce parcours fermé. En effet, sur la figure 1.5 on décompose le parcours fermé en deux parcours : l'un passant par  $c_1$  et l'autre par  $c_2$ . Ainsi :

$$\oint_{ac_1bc_2a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ac_1b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc_2a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.15)$$

donc

$$\int_{ac_1b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{bc_2a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.16)$$

$$= + \int_{ac_2b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} . \quad (1.17)$$

Si la circulation est nulle pour tous les parcours fermés passant par les deux points distincts  $a$  et  $b$ , l'intégrale de ligne est alors indépendante du parcours utilisé pour se rendre du point  $a$  au point  $b$ . Le théorème de Stokes (voir section 1.4) démontre qu'une circulation nulle implique que le rotationnel du champ est également nul. On nomme donc **irrotationnel ou conservatif**, un champ pour lequel la circulation est nulle pour tout parcours ( $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ). Dans un tel champ, aucune énergie n'est perdue ou gagnée en déplaçant un corps pour enfin revenir au point de départ. Dans le cas contraire le champ est non-conservatif et l'intégrale de ligne dépendra non seulement des points de départ et d'arrivée mais aussi du parcours emprunté. Le champ gravitationnel terrestre est un exemple de champ conservatif puisque la variation d'énergie potentielle d'une masse passant d'un point  $a$  à un point  $b$  ne dépend pas du parcours mais uniquement de la différence de hauteur des deux points. On verra que le champ électrique statique est un autre exemple, car l'intégrale de ligne d'un point  $a$  vers  $b$  sur un parcours quelconque donne la différence de potentiel entre les deux points  $V_{ab}$ . Cependant, si le champ électrique varie temporellement alors il devient non-conservatif.

Une intégrale de ligne nulle sur un seul parcours fermé ne peut garantir que le champ est conservatif. Il faudrait vérifier pour une infinité de parcours. Évidemment, une seule intégrale de ligne non-nulle sur un parcours fermé suffit pour dire que le champ est non-conservatif.

Étant donné qu'une identité du calcul vectoriel indique que le rotationnel d'un gradient est toujours nul ( $\nabla \times \nabla G = 0$ ), alors un champ qui découle d'un gradient, soit  $\mathbf{F} = \nabla G$ , est **nécessairement** conservatif.

### 1.3.2 Intégrales de surface

L'intégrale de surface du champ  $\mathbf{F}$  sur une surface  $\mathbf{S}$  est elle définie comme :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} .$$

Le produit du champ par une surface perpendiculaire infinitésimale est nommé flux. Si on considère que le champ représente un fluide qui se déplace, le flux est une mesure de

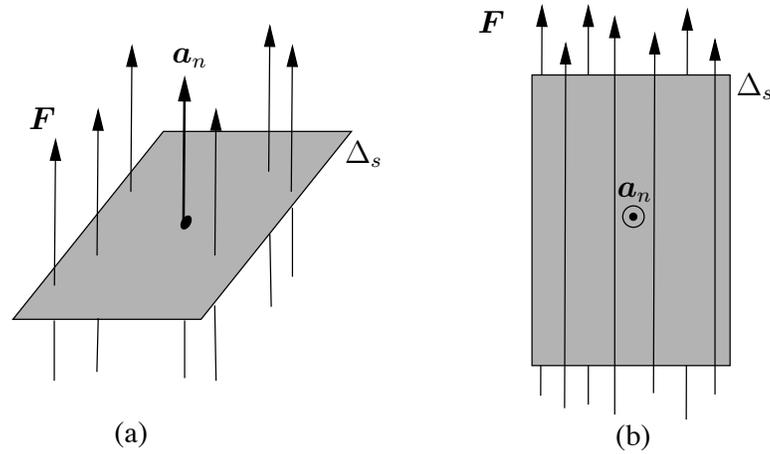


FIGURE 1.6 – Différents cas de l’intégrale de surface ou de flux.

la quantité de fluide qui traverse la surface. Ainsi l’intégrale du produit scalaire entre un champ et une surface est appelée intégrale de flux.

Pour comprendre l’intégrale de surface, on décompose la surface en surfaces infinitésimales  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Ces surfaces étant petites, on assume que le champ passant au travers chacune est uniforme quoiqu’il peut être non-uniforme sur une plus grande échelle. Si la surface est perpendiculaire aux champs (la normale à la surface est parallèle), alors le flux sera maximal comme sur la figure 1.6(a). Au contraire, lorsque la surface est parallèle aux lignes de champ, le flux sera nul (figure 1.6(b)). L’angle  $\alpha$  entre la normale à la surface et la direction du champ est donc important d’où la nécessité de définir l’unité infinitésimale de surface vectorielle. Celle-ci possède deux caractéristiques essentielles à savoir son aire et son orientation dans l’espace :

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{a}_n \tag{1.18}$$

où  $\mathbf{a}_n$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $dS$ .

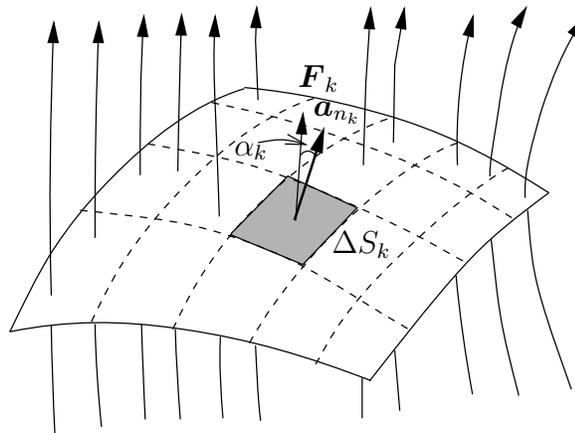


FIGURE 1.7 – Division d’une surface en surfaces élémentaires pour une intégrale de flux.

Ainsi, on obtient :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_{k=1}^n F_k \Delta S_k \cos \alpha_k \quad (1.19)$$

où  $\alpha_k$  est l'angle entre  $\mathbf{F}_k$  et la normale à la surface  $\Delta S_k$  comme il apparaît sur la figure 1.7 .

Exprimer l'élément différentiel de surface est la principale difficulté de l'intégrale de flux. Une façon de procéder qui fonctionne à tout coup, consiste à paramétriser la surface selon deux coordonnées  $u$  et  $v$  :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \mathbf{a}_n = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) \, dudv \quad (1.20)$$

avec  $R$  le nouveau domaine d'intégration dans le plan  $uv$ , et :

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{a}_x + y(u, v)\mathbf{a}_y + z(u, v)\mathbf{a}_z \quad (1.21)$$

$$d\mathbf{S} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}_{\mathbf{N}} \, dudv . \quad (1.22)$$

On peut aussi choisir deux longueurs infinitésimales orthogonales  $d\mathbf{l}_1$  et  $d\mathbf{l}_2$  situées dans la surface d'intégration et écrire :

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{l}_2 . \quad (1.23)$$

Attention cependant aux inter-relations entre toutes les coordonnées si la surface n'est parallèle à aucun axe de coordonnées. Dans le cas contraire, on a avantage à prendre l'une des deux longueurs infinitésimales suivant l'axe parallèle (e.g.  $dz\mathbf{a}_z$  pour une surface verticale).

### Exemple 1.2

Soit la fonction  $\mathbf{F} = 5x\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_z$ .

- Faites l'intégrale de flux au travers la portion du plan  $x = 1 - 2y$  comprise entre  $z = 0$  et  $z = 3$  dans le premier octant  $x, y, z > 0$ .

On commence par trouver l'expression de l'élément de surface. Pour ce faire, il suffit de multiplier vectoriellement deux vecteurs  $d\mathbf{l}_1$  et  $d\mathbf{l}_2$  se trouvant dans le plan. Ici, on pose :

$$\begin{aligned} u &= y \\ v &= z \end{aligned}$$

donc, on a selon (1.21) et (1.22) :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (1 - 2u)\mathbf{a}_x + u\mathbf{a}_y + v\mathbf{a}_z \\ \mathbf{N} &= (-2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y) \times \mathbf{a}_z \\ d\mathbf{S} &= (2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_x) \, dudv . \end{aligned}$$

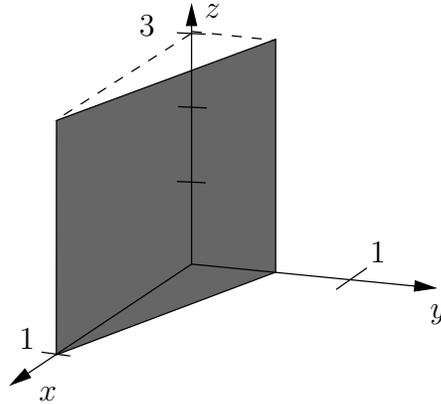


FIGURE 1.8 – Surface d'intégration pour le calcul du flux.

L'intégration de flux devient fonction uniquement des variables paramétriques  $u$  et  $v$  :

$$\begin{aligned} \iint_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^{0.5} (5(1-2u)\mathbf{a}_x + u^2\mathbf{a}_z) \cdot (2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_x) \, dudv \\ &= \int_0^3 \int_0^{0.5} 5(1-2u) \, dudv \\ &= 5(3) \left[ \frac{u^2}{2} - u \right]_0^{0.5} = 15(0.25) = 3.75 . \end{aligned}$$

On peut sauter l'étape de paramétrisation pour obtenir directement selon (1.23) :

$$\begin{aligned} dl_1 &= dz\mathbf{a}_z \\ dl_2 &= dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y = -2dy\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y \end{aligned}$$

à cause de la relation entre  $x$  et  $y$  telle que  $dx = -2dy$ . Donc :

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= dl_1 \times dl_2 \\ &= dz\mathbf{a}_z \times (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y) \\ &= -dx dz \mathbf{a}_y + dy dz \mathbf{a}_x . \end{aligned}$$

Les bornes d'intégration peuvent être en  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) et en  $z$ ; ou en  $y$  ( $0 \leq y \leq 0.5$ ) et en  $z$ . Le résultat sera le même. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S (5x\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_z) \cdot (-dx dz \mathbf{a}_y + dy dz \mathbf{a}_x) \\ &= \int_0^3 \int_0^{0.5} 5(1-2y) dy dz \\ &= 5(3) [y - y^2]_0^{0.5} dz = 3.75 . \end{aligned}$$

Si la surface est fermée i.e. si elle délimite un volume, l'intégrale de surface fermée donne le bilan du flux émanant du volume. Les normales aux surfaces sont choisies en pointant hors du volume pour que le flux quittant le volume soit positif tandis que celui entrant, négatif. Un bilan positif indique la présence d'une source de flux à l'intérieur du volume.

Par exemple, en magnétisme, on va définir un champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  qui provient de la force magnétique que nous pouvons constater entre les pôles Nord et Sud d'aimants. L'intégrale de surface du champ  $\mathbf{B}$  est appelée flux magnétique  $\Psi$ . Celui-ci peut être non-nul. Cependant, l'intégrale sur une surface fermée du champ d'induction magnétique est toujours nulle car il n'existe pas de charge magnétique isolée<sup>5</sup>

## 1.4 Théorèmes de Stokes et de Green

Par le théorème de *Stokes*, on peut faire le lien entre la circulation, l'intégrale de surface et le rotationnel d'un champ comme suit :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.24)$$

où  $S$  est une surface quelconque délimitée par le contour  $\mathcal{C}$ . On ouvre ici une parenthèse pour annoncer que le théorème de *Stokes* sera particulièrement utile pour convertir les deux premières équations de *Maxwell* – les équations de *Maxwell* sont les équations fondamentales de l'électromagnétisme – et celle dite de continuité de la forme intégrale à la forme différentielle.

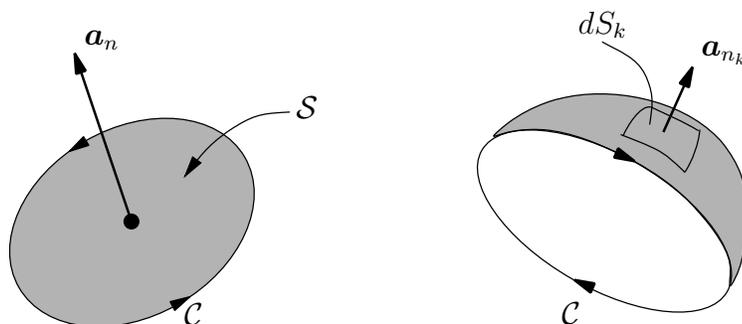


FIGURE 1.9 – Règle de la main droite pour le théorème de *Stokes*.

Il existe cependant une ambiguïté sur le sens de la normale à la surface tout comme sur le sens de l'intégration sur le parcours fermé. Pour lever l'ambiguïté, on se sert de la règle de la main droite. Le sens d'intégration détermine par cette règle le sens de la normale comme montré sur la figure 1.9 . Lorsque l'enroulement des doigts de la main droite suit la direction d'intégration sur le parcours, le pouce indique celle de la normale.

<sup>5</sup>Une source magnétique comprend toujours les deux pôles, on ne peut séparer le pôle "positif" du "négatif".

De même, le théorème de *Green*<sup>6</sup> unit l'intégrale de surface fermée, l'intégrale de volume et la divergence :

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (1.25)$$

où  $V$  est le volume délimité par la surface fermée  $S$ . Encore une fois, tout comme le théorème de *Stokes*, le théorème de *Green* permettra de convertir les deux autres équations de *Maxwell* restantes de la forme intégrale à la forme différentielle.

Pour utiliser les théorèmes de *Stokes* ou de *Green* afin de passer de la forme intégrale à différentielle, le plus simple est de prendre un contour fermé formant une surface carrée dans le théorème de *Stokes*, ou une surface fermée formant un volume cube dans celui de *Green*; puis de faire tendre ce contour ou cette surface vers quelque chose d'infinésimal.

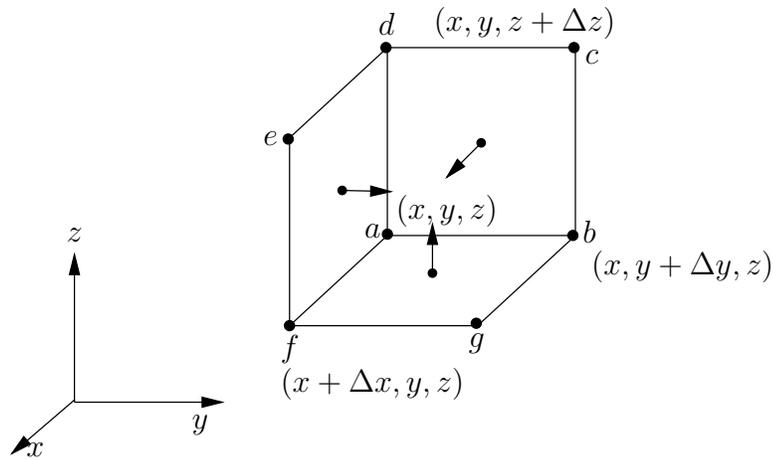


FIGURE 1.10 – Parcours rectangulaires et orthogonaux infinitésimaux pour faire le passage de la forme intégrale à la forme différentielle.

Afin de prouver le théorème de *Stokes*, on suppose au départ l'égalité montrée en (1.26) ; on verra alors ce qui en sera conclu à propos de  $\mathbf{G}$  :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.26)$$

avec les parcours fermés présentés sur la figure 1.10 i.e.  $abcda$ ,  $adefa$  et  $afgba$ . On obtient avec la partie gauche de l'équation sur les 3 parcours :

$$\oint_{abcda} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = [F_y]_{(x,z)}\Delta y + [F_z]_{(x,y+\Delta y)}\Delta z - [F_y]_{(x,z+\Delta z)}\Delta y - [F_z]_{(x,y)}\Delta z \quad (1.27)$$

$$\oint_{adefa} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = [F_z]_{(x,y)}\Delta z + [F_x]_{(y,z+\Delta z)}\Delta x - [F_z]_{(x+\Delta x,y)}\Delta z - [F_x]_{(y,z)}\Delta x \quad (1.28)$$

$$\oint_{afgba} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = [F_x]_{(y,z)}\Delta x + [F_y]_{(x+\Delta x,z)}\Delta y - [F_x]_{(y+\Delta y,z)}\Delta x - [F_y]_{(x,z)}\Delta y \quad (1.29)$$

<sup>6</sup>Le théorème de *Green* est aussi connu sous les noms de théorème de la divergence ou théorème de *Gauss*

D'autre part, on a respectivement avec la partie droite :

$$\iint_{S_{[abcd]}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = [G_x]_{(x,y,z)} \Delta y \Delta z \tag{1.30}$$

$$\iint_{S_{[adef]}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = [G_y]_{(x,y,z)} \Delta z \Delta x \tag{1.31}$$

$$\iint_{S_{[afgb]}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = [G_z]_{(x,y,z)} \Delta x \Delta y \tag{1.32}$$

En réunissant les équations qui vont ensemble (par exemple (1.27) avec (1.30) et ainsi de suite), on trouve que :

$$\frac{\Delta[F_z]_{(x,y)}}{\Delta y} - \frac{\Delta[F_y]_{(x,z)}}{\Delta z} = [G_x]_{(x,y,z)} \tag{1.33}$$

$$\frac{\Delta[F_x]_{(y,z)}}{\Delta z} - \frac{\Delta[F_z]_{(x,y)}}{\Delta x} = [G_y]_{(x,y,z)} \tag{1.34}$$

$$\frac{\Delta[F_y]_{(x,z)}}{\Delta x} - \frac{\Delta[F_x]_{(y,z)}}{\Delta y} = [G_z]_{(x,y,z)} \tag{1.35}$$

Avec des parcours infinitésimaux, on voit que les trois expressions ci-dessus correspondent à :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{G} \tag{1.36}$$

démontrant ainsi que (1.26) et (1.36) sont équivalentes d'où le théorème de *Stokes*.

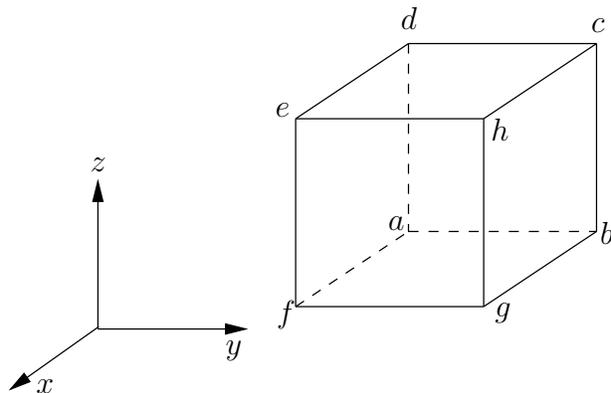


FIGURE 1.11 – Boite rectangulaire infinitésimale pour le passage de la forme intégrale à différentielle.

La démonstration du théorème *Green* est plus simple. On suppose avec l'égalité montrée en (1.37) et on regarde, une fois encore, ce qui sera conclu sur  $\mathbf{G}$  :

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V g dv \tag{1.37}$$

avec le volume  $V$  délimité par les six surfaces du cubes de la figure 1.4. Les flux émanant de chacune des surface sont, en respectant le sens des parcours qui procure une normale

sortant du volume (à ne pas oublier) :

$$\iint_{[adcb]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -[F_x]_{(x)} \Delta y \Delta z \quad (1.38)$$

$$\iint_{[hefg]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = [F_x]_{(x+\Delta x)} \Delta y \Delta z \quad (1.39)$$

$$\iint_{[afed]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -[F_y]_{(y)} \Delta z \Delta x \quad (1.40)$$

$$\iint_{[hgbc]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = [F_y]_{(y+\Delta y)} \Delta z \Delta x \quad (1.41)$$

$$\iint_{[abgf]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -[F_z]_{(z)} \Delta x \Delta y \quad (1.42)$$

$$\iint_{[hcde]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = [F_z]_{(z+\Delta z)} \Delta x \Delta y . \quad (1.43)$$

Le côté droit de (1.37) donne simplement  $g \Delta x \Delta y \Delta z$  d'où :

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta x} + \frac{\Delta F_y}{\Delta y} + \frac{\Delta F_z}{\Delta z} = g . \quad (1.44)$$

Avec un volume infinitésimal, le terme de gauche de l'équation ci-dessus est la divergence de  $\mathbf{F}$  donc :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = g \quad (1.45)$$

Cette dernière expression est ce qui ressort du théorème de *Green*. En effet, en comparant (1.25) et (1.37), on s'aperçoit très vite que (1.45) découle naturellement.

## Exercices

### Question 1

En utilisant les phaseurs, exprimez la fonction suivante comme une seule fonction du temps cosinusoidale :

$$5 \sin(\omega t + 60^\circ) - 5 \cos(\omega t + 30^\circ) - 3 \sin(\omega t) .$$

### Question 2

Soit la fonction périodique  $A(t) = 5 \cos(10^5 t - 30^\circ)$ . Soit maintenant le phaseur  $\bar{B}$  tel que le rapport avec  $\bar{A}/\bar{B} = 2 \angle 15^\circ$ . Écrivez :

- le phaseur correspondant à  $A(t)$ ;
- l'expression de la fonction  $B(t)$ .

### Question 3

Calculez l'intégrale curviligne sur le parcours  $x = y = \sqrt{z}$  entre le centre de coordonnées et le point  $(1, 1, 1)$  de la fonction :

$$\mathbf{F} = 5z\mathbf{a}_x + xy\mathbf{a}_y + x^2z\mathbf{a}_z .$$

### Question 4

Calculez le flux  $\psi$  passant par la surface plane  $x + y + z = 1$  limitée par le premier octant de la fonction :

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_y + 3y^2\mathbf{a}_z .$$

### Réponses :

- $2 \cos(\omega t - 90^\circ)$ .
- a)  $\bar{A} = 5 \angle -30^\circ$  ; b)  $B(t) = 2.5 \cos(10^5 t - 45^\circ)$ .
- $\int_0^1 (5x^2 + x^2 + 2x^5) dx = 7/3$ .
- $\mathbf{N} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ ,  $\psi = \int_0^1 \int_0^{1-v} (u^2 + 3v^2) dudv = 1/3$ .



# Chapitre 2

## Les champs et les matériaux

### 2.1 Introduction

Pour débiter l'étude de l'électromagnétisme, il convient de connaître les différents champs en présence et leurs origines. Pour ce faire, il est plus pratique de commencer avec les champs statiques. C'est aussi la manière historique de leur découverte. Du même coup, il est opportun d'introduire les différents matériaux et faire ressortir les caractéristiques intéressantes face à l'électromagnétisme.

Au départ, on avait l'impression que l'électricité et le magnétisme étaient deux notions distinctes. Dans les faits, le cas statique (on peut aussi inclure le cas quasi-statique) découple les deux effets de sorte que leurs affinités n'apparaissent pas. Il aura fallu des expériences plus avancées pour apercevoir les inter-relations et décrire plus généralement le comportement de ce qui sera appelé l'électromagnétisme.

Les premiers pionniers de l'électricité et du magnétisme croyaient vraiment en deux forces : *Benjamin Franklin* (1706-1790) qui établit la loi de conservation de la charge, *Charles A. de Coulomb* (1736-1806) qui mesura les forces électriques et magnétiques, *Karl F. Gauss* (1777-1855) qui énonça le théorème de la divergence, *Hans E. Oersted* (1777-1851) qui découvrit que l'électricité pouvait produire du magnétisme et, à l'inverse, *Michael Faraday* (1791-1867) trouva que le magnétisme pouvait générer de l'électricité, *André M. Ampère* qui réalisa un solénoïde. Il a fallu attendre *James C. Maxwell* (1831-1879) pour comprendre que les deux notions n'en formaient qu'une. *Heinrich Hertz* (1857-1894) qui fut le père de la radiodiffusion, et *Guglielmo Marconi* (1874-1937) ont d'ailleurs appliqué les principes pour rayonner une onde électromagnétique.

On peut donc voir l'électricité et le magnétisme comme un cas particulier de l'électromagnétisme dans laquelle la fréquence du signal est très faible pour ne pas dire nulle.

### 2.2 Champ électrique statique

Les concepts de base en électricité reposent sur les observations faites des expériences de *Coulomb* et d'*Ampère*. *Coulomb* remarqua qu'il existait des charges de deux signes opposés car il y avait, dans certains cas, attraction et dans d'autres cas, répulsion. Ces charges sont si petites qu'on peut les assimiler à des "points de charge"<sup>1</sup> appelées charges

---

<sup>1</sup>Les charges sont localisées à un point précis de l'espace et n'occupent aucun volume.

ponctuelles.

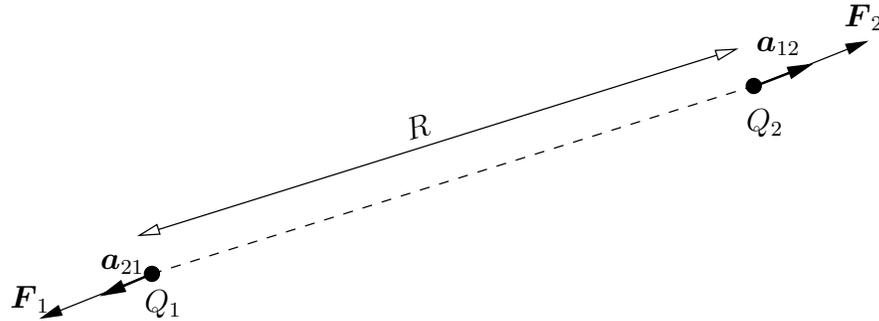


FIGURE 2.1 – Force électrique qui s’exerce entre deux charges électriques.

Soient deux charges #1 et #2 telles que montrées sur la figure 2.1, la force d’attraction ou de répulsion produite par #2 qui agit sur #1 dépend de l’importance des charges  $Q_1$  et  $Q_2$ , de la distance les séparant  $R$  et du milieu selon :

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{a}_{21} \tag{2.1}$$

où

- $Q_1$  et  $Q_2$  montrent l’importance des charges en terme de *Coulombs*; la plus petite charge est celle d’un électron soit  $-1.6022 \times 10^{-19} C$ ;
- $\epsilon$  est la constante de proportionnalité qui tient compte du milieu, elle est appelée permittivité et s’exprime en *Farads/mètre*; la permittivité du vide est notée  $\epsilon_o$  et a une valeur de :

$$\epsilon_o \approx 8.854 \times 10^{-12} F/m \tag{2.2}$$

soit approximativement  $10^{-9}/36\pi$ ;

- $\mathbf{a}_{21}$  est un vecteur unitaire orienté suivant l’axe du segment partant de #2 vers #1.

D’une manière similaire à celle du champ gravitationnel par rapport à la force gravitationnelle mais en utilisant la charge au lieu de la masse – le champ gravitationnel est la force produite par la masse #1 sur la masse #2 par unité de masse #2 –, on définit le champ électrique  $\mathbf{E}$  à partir d’une charge de test  $q$  sur laquelle agit une force électrique  $\mathbf{F}$  comme suit :

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{d\mathbf{F}}{dq} \tag{2.3}$$

La charge de test  $q$  doit être petite pour ne pas affecter le champ électrique dans lequel elle est placée. Une charge ponctuelle  $Q$  produit donc un champ électrique dont l’expression est :

$$\mathbf{E} = \frac{d\left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{a}_R\right)}{dq} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{a}_R . \tag{2.4}$$

Le vecteur unitaire  $\mathbf{a}_R$  est parallèle au segment passant par les deux charges en partant de la charge test comme sur la figure 2.2. Les unités du champ électrique sont les *Volts/mètre*.

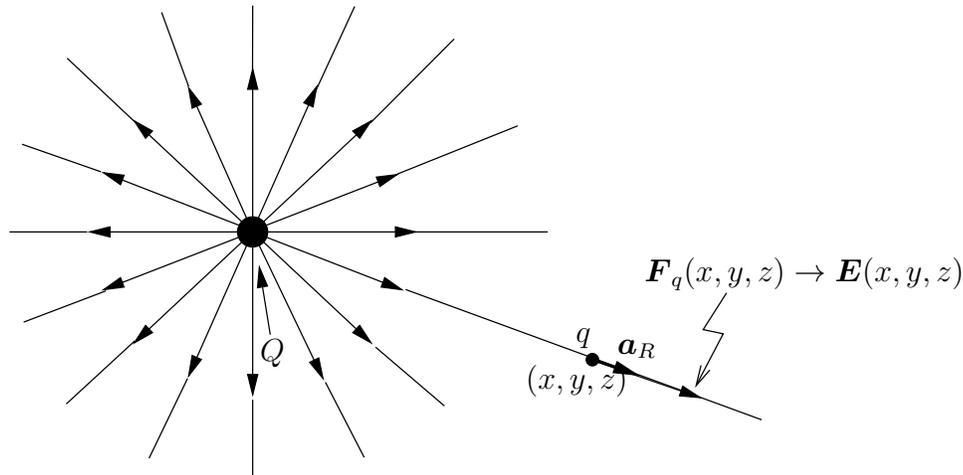


FIGURE 2.2 – Champ électrique produit par une charge ponctuelle et mesuré en un point par une charge test.

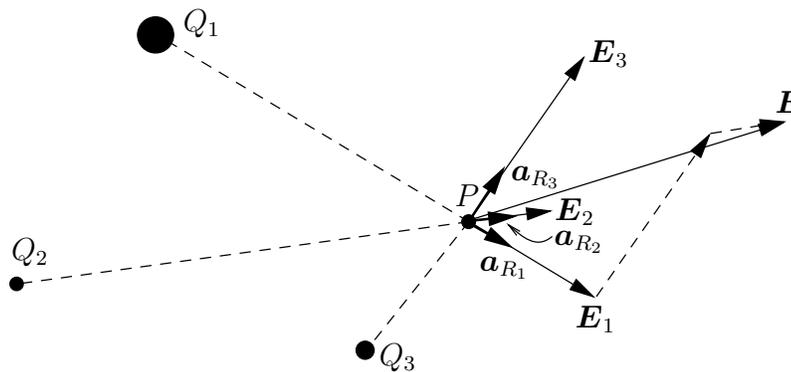


FIGURE 2.3 – Champ électrique résultant en présence de plusieurs charges.

Une charge de  $4\pi\epsilon C$  placée au point  $(3, 1, 1)$  m en coordonnées cartésiennes produirait un champ  $\mathbf{E} = \frac{1}{27}(\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)$  V/m au point  $(4, 3, 3)$

Avec plusieurs charges en présence comme sur la figure 2.3, les forces sur la charge test s'additionnent vectoriellement. De même en est-il des champs électriques produits par chacune des charges prises isolément, c'est le principe de superposition des champs. Par exemple, pour  $n$  charges  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , le champ électrique obtenu au point  $P$  est :

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R_1^2} \mathbf{a}_{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon R_2^2} \mathbf{a}_{R_2} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon R_n^2} \mathbf{a}_{R_n} . \quad (2.5)$$

À la limite, avec une distribution d'une grande quantité de charges, on préfère utiliser les notions de densité de charges :

- densité linéaire de charges  $\rho_l$  en  $C/m$  si les charges sont distribuées sur une fine ligne ;
- densité surfacique de charges  $\rho_s$  lorsque les charges sont réparties sur une surface infiniment mince ;

- densité volumique de charges  $\rho_v$  ou  $\rho$  tout simplement, dans le cas d'une distribution dans l'espace.

Il faut alors intégrer la densité de charges sur tout le domaine plutôt que de sommer des charges ponctuelles.

**Exemple 2.1**

Deux charges ponctuelles dans le vide  $Q_1 = 12\pi\epsilon_o C$  et  $Q_2 = -4\pi\epsilon_o C$  sont situées respectivement aux coordonnées cartésiennes  $(-2, 0, 0)$  et  $(1, 0, 0)$ .

- Calculez la valeur du champ électrique au point  $(0, 0, 1) m$ .

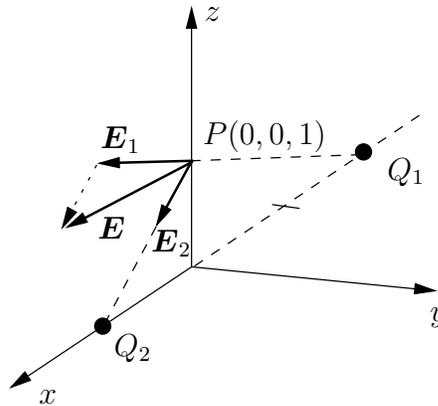


FIGURE 2.4 – Position des charges pour le calcul du champ électrique.

On a de (2.5) :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{E}]_{(0,0,1)} &= [\mathbf{E}_1]_{(0,0,1)} + [\mathbf{E}_2]_{(0,0,1)} \\
 &= \frac{12\pi\epsilon_o}{4\pi\epsilon_o(5)} \frac{(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)}{\sqrt{5}} - \frac{4\pi\epsilon_o}{4\pi\epsilon_o(2)} \frac{(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)}{\sqrt{2}} \\
 &= (0.5367\mathbf{a}_x + 0.2683\mathbf{a}_z) - (-0.3536\mathbf{a}_x + 0.3536\mathbf{a}_z) \\
 &= 0.8902\mathbf{a}_x - 0.0852\mathbf{a}_z \\
 &= 0.8943(0.9954\mathbf{a}_x - 0.0953\mathbf{a}_z) \text{ V/m}
 \end{aligned}$$

On remarque que le champ électrique pointe en s'éloignant de la charge positive. Les lignes de champ électrique partent toujours de la charge positive vers la charge négative selon la convention utilisée.

## Exemple 2.2

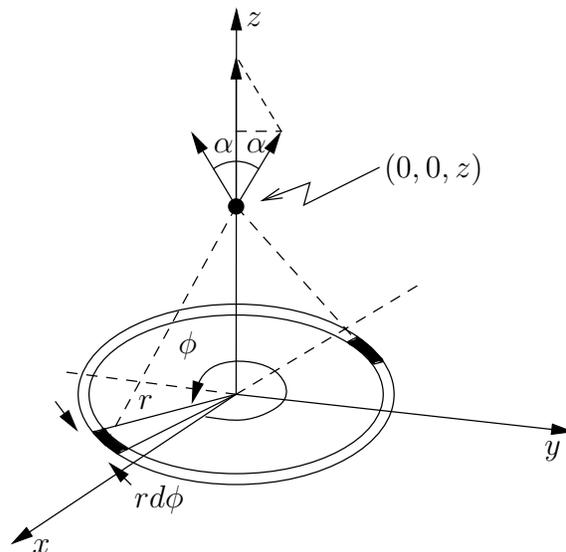


FIGURE 2.5 – Géométrie de l’anneau mince avec distribution linéique uniforme de charges.

Un anneau infiniment mince d’un rayon  $r$  est chargé avec une distribution uniforme donnant une charge totale  $Q$ . La géométrie du problème est montrée à la figure 2.5.

- Exprimez le champ électrique au point  $(0, 0, z)$  *m*.

Au départ, on sait que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}]_{(0,0,z)} &= \int [d\mathbf{E}]_{(0,0,z)} \\ &= \int \frac{dQ_k}{4\pi\epsilon_o R_k^2} \mathbf{a}_k \end{aligned}$$

où :

$$dQ = \rho_l(r d\phi) = \frac{Q}{2\pi r} r d\phi .$$

Par des considérations de symétrie, on remarque que chaque segment infinitésimal et son opposé de  $180^\circ$  sur l’anneau, donneront un champ électrique dont la seule composante non-nulle sera  $E_z$ . Or cette composante s’obtient comme suit :

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}]_{(0,0,z)} &= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{Q}{2\pi r} r d\phi}{4\pi\epsilon_o R_k^2} \cos \alpha_k \mathbf{a}_z = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R_k^2} \cos \alpha_k \frac{1}{2\pi} d\phi \mathbf{a}_z \\ &= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_o (r^2 + z^2)^{3/2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{a}_z \\ &= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_o (r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z . \end{aligned}$$

avec  $R_k^2 = R^2 = r^2 + z^2$  et  $\cos \alpha_k = \cos \alpha = z/R$ .

- De là, exprimez le champ produit par une feuille mince infinie ayant une densité de charge surfacique  $\rho_s \text{ C/m}^2$ .

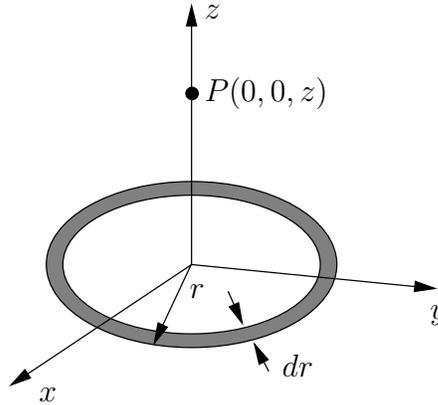


FIGURE 2.6 – Multitude d’anneaux minces produisant un plan avec distribution surfacique uniforme de charges.

On pourrait intégrer le résultat précédent en faisant varier  $r$  de 0 à l’infini pour trouver le champ produit par une plaque. Cependant, la valeur de  $Q$  varie en fonction de  $r$  comme  $Q_r = \rho_s 2\pi r dr$  d’où :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{E}]_{(0,0,z)} &= \int_0^\infty [d\mathbf{E}]_{(0,0,z)} \\
 &= \int_0^\infty \frac{\rho_s 2\pi r dr z}{4\pi\epsilon_o (r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \\
 &= \frac{\rho_s z}{2\epsilon_o} \underbrace{\int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr}_{\left[ \frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^\infty} \mathbf{a}_z \\
 &= \frac{\rho_s z}{2\epsilon_o |z|} \mathbf{a}_z .
 \end{aligned}$$

Finalement, on observe que le champ électrique a une amplitude indépendante de  $z$  car il vaut  $\rho_s/2\epsilon_o$  partout. De plus, il est toujours orienté selon la normale à la feuille de part et d’autre de l’axe  $z$ .

### 2.3 Champ d’induction magnétique statique

La loi d’*Ampère* concerne les forces produites par des courants  $I_1$  et  $I_2$  circulant dans des fils comme sur la figure 2.7 ; ce sont les forces magnétiques. Un peu comme pour l’électricité, les observations des expériences d’*Ampère* confirment que :

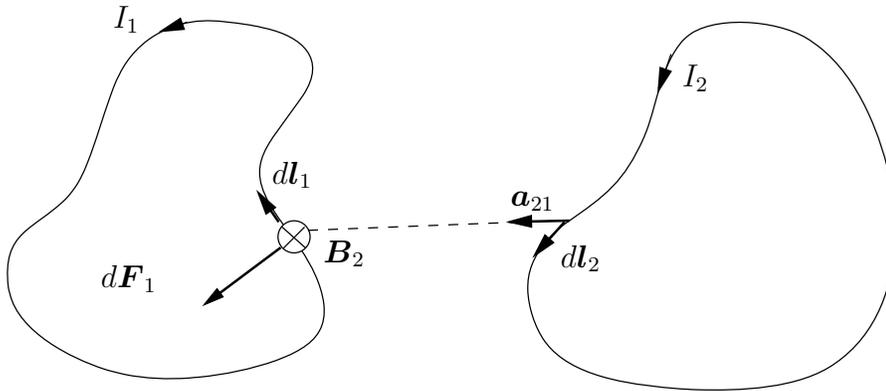


FIGURE 2.7 – Force magnétique produite par un élément d’une boucle de courant agissant sur un élément d’une autre boucle de courant.

- la force d’un fil sur l’autre est proportionnelle au produit des deux courants ;
- cette force diminue comme le carré de la distance ;
- la direction de la force produit par l’élément  $dl_2$  et agissant sur l’élément  $dl_1$ , notée  $d\mathbf{F}_1$ , est celle-ci :  $dl_1 \times (dl_2 \times \mathbf{a}_{21})$  avec  $\mathbf{a}_{21}$  un vecteur unitaire partant de  $dl_2$  vers  $dl_1$  ;
- le milieu agit surtout s’il est ferreux.

On aboutit à :

$$d\mathbf{F}_1 = I_1 dl_1 \times \underbrace{\left( \frac{\mu}{4\pi R^2} I_2 dl_2 \times \mathbf{a}_{21} \right)}_{d\mathbf{B}_2} . \tag{2.6}$$

La constante  $\mu$  est la perméabilité du milieu exprimée en *Henrys/mètre*. Celle du vide est notée  $\mu_o$  et vaut exactement :

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} . \tag{2.7}$$

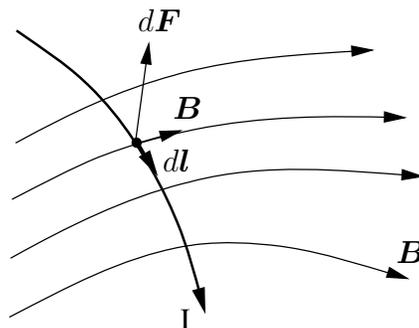


FIGURE 2.8 – Force magnétique exercée sur un élément de courant dans un champ d’induction.

La forme de (2.6) suggère que chaque élément de courant subit une force qui origine d’un champ produit par un autre élément de courant. On l’appelle le champ d’induction

magnétique  $\mathbf{B}$ . Comme pour les champs gravitationnel et électrique, les unités du champ magnétique permettent de convertir le courant linéaire élémentaire  $I_1 d\mathbf{l}_1$  en force. L'unité<sup>2</sup> du champ magnétique  $\mathbf{B}$  est nommée le *Tesla* ou  $Wb/m^2$ . Le terme entre parenthèses de (2.6) représente  $d\mathbf{B}_2$  i.e. le champ d'induction produit par l'élément  $d\mathbf{l}_2$ . On peut généraliser ainsi pour définir la loi de *Biot-Savart* :

$$\mathbf{B} = \int_1 \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{R^2} \quad (2.8)$$

et, tel que montré sur la figure 2.8 :

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} . \quad (2.9)$$

Puisque  $I = \frac{dQ}{dt}$ , la force magnétique qui s'exerce sur une charge ponctuelle  $Q$  en mouvement s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \frac{dQ}{dt} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = dQ \frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} = dQ \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{F} &= Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) est connue sous la loi de *Lorentz* ( $\mathbf{v}$  est le vecteur vitesse de la charge électrique).

**Exemple 2.3**

Soit un élément de courant différentiel  $I_1 dx \mathbf{a}_x$  à  $(1, 0, 0)$  et un autre  $I_2 dy \mathbf{a}_y$  à  $(0, 1, 0)$ . Le matériau environnant est le vide ( $\mu = \mu_o$ ).

- Exprimez les forces de l'élément #2 sur #1 et de l'élément #1 sur #2.

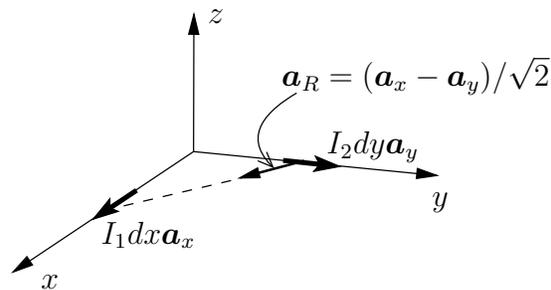


FIGURE 2.9 – Position des éléments de courant pour le calcul de la force magnétique.

<sup>2</sup>Il sera vu à la section 3.2 que le flux magnétique, noté  $\Psi$  s'exprime en *Webers* ( $Wb$ ) alors que la flux électrique  $\Psi_e$  est en *Coulombs* ( $C$ ).

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F}_1 &= (I_1 dx \mathbf{a}_x) \times \left( \frac{\mu_o}{4\pi(2)} I_2 dy \mathbf{a}_y \times \underbrace{\frac{(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)}{\sqrt{2}}}_{-\frac{I_2}{\sqrt{2}} dy \mathbf{a}_z} \right) \\
&= \frac{\mu_o I_1 I_2}{8\sqrt{2}\pi} dx dy \mathbf{a}_y \\
&= \frac{10^{-7} I_1 I_2}{\sqrt{8}} dx dy \mathbf{a}_y \\
d\mathbf{F}_2 &= (I_2 dy \mathbf{a}_y) \times \left( \frac{\mu_o}{4\pi(2)} \frac{I_1}{\sqrt{2}} dx \mathbf{a}_x \right) \\
&= \frac{10^{-7} I_1 I_2}{\sqrt{8}} dx dy \mathbf{a}_x .
\end{aligned}$$

Comme  $d\mathbf{F}_2 \neq -d\mathbf{F}_1$ , on pourrait croire que la troisième loi de *Newton* est violée. Qu'on se rassure, il n'en est rien car il n'existe pas d'éléments de courant isolés. La troisième loi tient toujours avec l'intégrale des forces sur deux boucles entières de courant qui, elles, existent. On verrait alors que les forces totales exercées l'une sur l'autre ont même intensité mais des directions opposées.

#### Exemple 2.4

Soit un fil infiniment long placé sur l'axe  $z$  qui transporte un courant  $I$  dans la direction  $+z$ .

- Donnez l'expression du champ d'induction magnétique en tout point de l'espace.

Le plus simple est de prendre un point dans le plan  $xy$  – le fil étant infiniment long, la position  $z$  ne devrait pas avoir d'importance – en coordonnées cylindriques, comme sur la figure 2.10. On applique la loi de *Biot-Savart* (2.8) et le principe de superposition des champs. L'induction magnétique produit par un élément de courant  $I dz$  à  $(0, 0, z)$  est :

$$\begin{aligned}
[d\mathbf{B}]_{(r,\phi,0)} &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{I dz \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_R}{R^2} \\
&= \frac{\mu I dz \sin \alpha}{4\pi R^2} \mathbf{a}_\phi \\
&= \frac{\mu I r dz}{4\pi (z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\phi
\end{aligned}$$

puisque  $R^2 = r^2 + z^2$  et  $\sin \alpha = r/R$ . Le champ d'induction magnétique produit

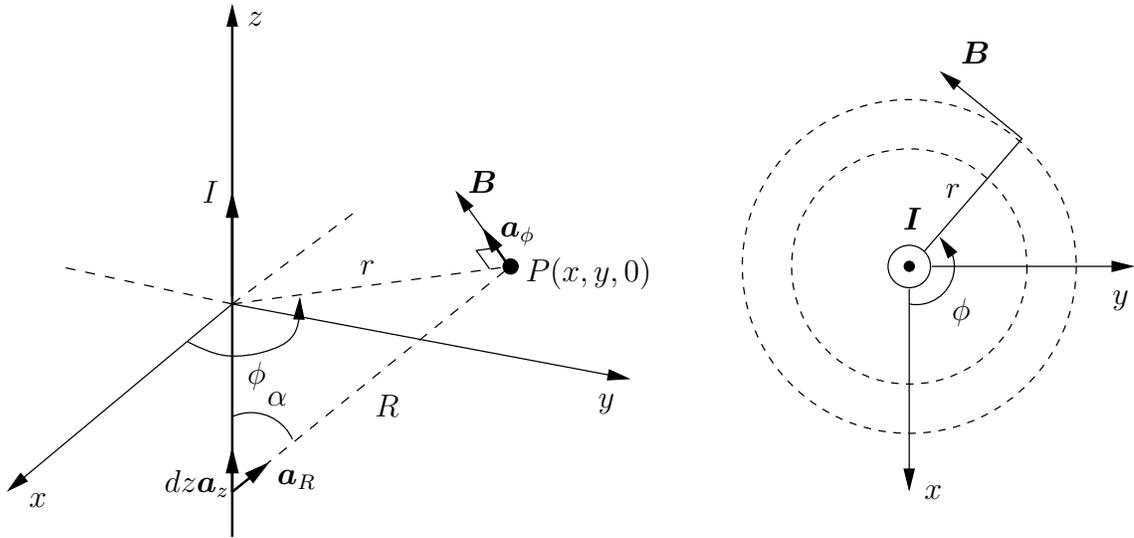


FIGURE 2.10 – Géométrie pour calcul du champ d’induction produit par un fil de courant.

par tout le fil vaut donc :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}]_{(r,\phi,0)} &= \int_{-\infty}^{\infty} [d\mathbf{B}]_{(r,\phi,0)} \\
 &= \frac{\mu I r}{4\pi} \left[ \frac{z}{r^2 \sqrt{z^2 + r^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_{\phi} \\
 &= \frac{\mu I}{2\pi r} \mathbf{a}_{\phi} .
 \end{aligned}$$

Le calcul du champ d’induction fait dans l’exemple précédent assume un courant “filiforme” i.e. un courant qui se déplace le long d’un fil infiniment mince. Il existe deux autres types de distributions de courant moins localisées :

- Le courant de surface qui circule sur une épaisseur infime à la surface d’un corps – souvent conducteur – est comparable à l’eau de pluie qui tombe en bordure d’un toit lors d’une averse. On lui associe une densité de courant de surface  $\mathbf{J}_s$  exprimée en  $A/m$ .
- Le courant de volume passant au travers une section se compare à la pluie qui passe par une ouverture. La densité de courant volumique, ou simplement densité de courant,  $\mathbf{J}$  est en  $A/m^2$ .

On remarque que les densités de courant sont des quantités vectorielles qui pointent dans la direction du mouvement des charges (positives) produisant le courant. L’intégration le long d’un parcours perpendiculaire à la direction de  $\mathbf{J}_s$  donne le courant total  $I$ ; de même que l’intégration sur une surface perpendiculaire à  $\mathbf{J}$ . Si le parcours ou la surface n’est pas perpendiculaire en tout point, il faudra en tenir compte par le biais du cosinus du changement d’angle. Par exemple, le courant  $I$  pour les cas de la figure 2.11

vaut  $J_s w$  et  $J\pi a^2$  si les densités de courant sont uniformes sur la largeur et sur la section respectivement.

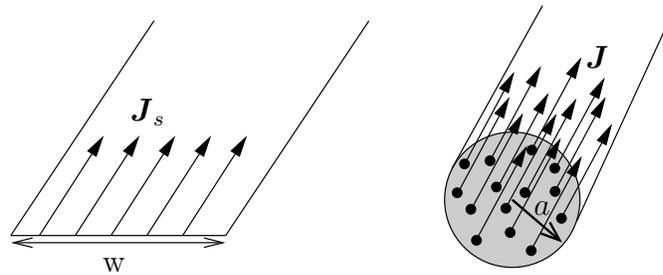


FIGURE 2.11 – Densités de courant de surface et de volume.

**Exemple 2.5**

Soit une feuille mince infinie dans le plan  $xz$  parcourue par un courant de surface uniforme  $\mathbf{J}_s = J_{s0}\mathbf{a}_z$  A/m.

- Donnez l'expression du champ d'induction magnétique en tout point de l'espace.

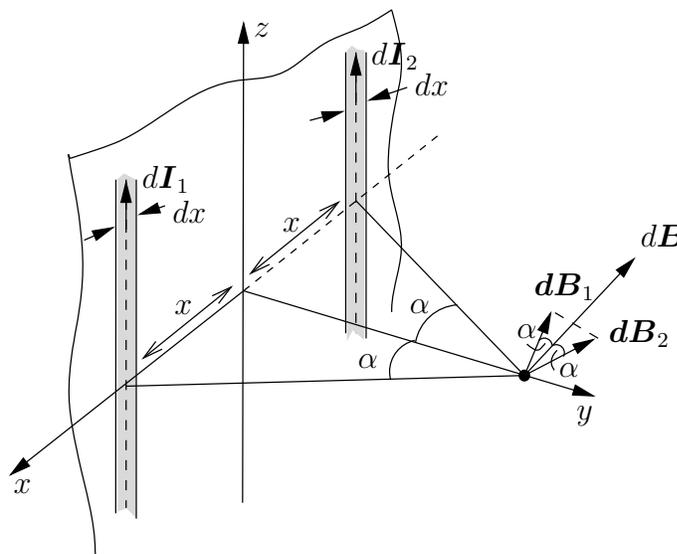


FIGURE 2.12 – Géométrie pour calcul du champ d'induction produit par une feuille mince de courant uniforme.

Le mieux à faire ici est de prendre des bandelettes verticales étroites de largeur  $dx$  et de se servir du résultat du champ produit par un courant “filiforme”. On peut prendre un point sur l'axe  $y$   $(0, y, 0)$  parce que la position en  $x$  et en  $z$  n'a aucune importance du fait d'une feuille infinie dans ces deux axes. En regardant le champ d'induction produit par chaque bande, on s'aperçoit que le champ n'aura que des composantes en  $x$  et en  $y$  – puisque  $\mathbf{B} = B_\phi\mathbf{a}_\phi$ .

On peut, encore une fois, simplifier le travail en prenant simultanément deux bandelettes situées à égale distance de l'axe  $z$  : maintenant, c'est la composante  $B_y$  qui devient nulle :

$$\begin{aligned} [d\mathbf{B}]_{(0,y>0,0)} &= -2 dB_1 \cos \alpha \mathbf{a}_x \\ &= -2 \frac{\mu J_{so} dx}{2\pi \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_x \\ &= -\frac{\mu J_{so} y dx}{\pi(x^2 + y^2)} \mathbf{a}_x . \end{aligned}$$

Le champ d'induction magnétique produit par la feuille entière devient :

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}]_{(0,y>0,0)} &= \int_0^\infty [d\mathbf{B}]_{(0,y>0,0)} \\ &= -\frac{\mu J_{so} y}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + y^2} \mathbf{a}_x \\ &= -\frac{\mu J_{so} y}{\pi} \left[ \frac{1}{y} \arctan \left( \frac{x}{y} \right) \right]_0^\infty \mathbf{a}_x \\ &= -\frac{\mu J_{so}}{2} \mathbf{a}_x . \end{aligned}$$

De manière générale, autant dans le demi-espace  $y > 0$  que  $y < 0$ , on écrit :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{2} \mathbf{J}_s \times \mathbf{a}_n$$

où  $\mathbf{a}_n$  est la normale à la feuille de courant du côté du demi-espace considéré.

## 2.4 Conducteur et conductivité

Les matériaux sont constitués d'atomes, chacun ayant un noyau de protons (charges positives) et neutrons autour duquel gravitent les électrons (charges négatives). Un ion est un atome dont le nombre de charges positives diffère de celui des charges négatives.

Certains électrons se situent dans des bandes d'énergie telles qu'ils peuvent se déplacer d'un atome à l'autre. Ce sont des électrons libres par opposition à la majorité qui eux, sont intimement liés au noyau. La capacité d'un électron libre de se déplacer d'un atome à l'autre – sa mobilité – dépend du type de matériau. Lorsqu'un grand nombre d'électrons mobiles est impliqué, le matériau est conducteur. Par contre, il existe des matériaux où vraiment très peu d'électrons sont disponibles pour participer à la conduction. Ce sont des isolants aussi appelés diélectriques. Entre les deux extrêmes se trouvent les semi-conducteurs où, avec un niveau d'énergie minimal, des électrons liés peuvent devenir libres en passant par dessus une bande d'énergie interdite. Cette dernière est, pour les semi-conducteurs, plus étroite que celle pour les diélectriques, ce qui explique la possibilité plus élevée qu'un électron devienne libre. Sur la figure 2.13, on observe le remplissage des

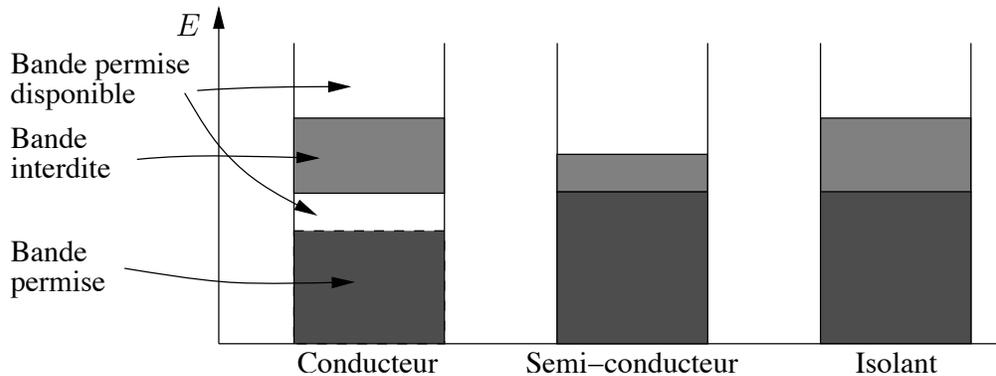


FIGURE 2.13 – Diagramme des bandes d'énergie pour différent type de matériau. (en noir : état occupé ; en blanc : état libre ; en gris : état interdit)

bandes d'énergie selon le type de matériau. On y observe que la bande à énergie minimale des conducteurs n'est pas complètement remplie contrairement aux autres, ce qui permet aux électrons de se déplacer facilement.

Sans entrer dans les détails, la vitesse de mobilité des électrons libres  $\mathbf{v}_e$  est proportionnelle à une constante  $\mu_e$  près, au champ électrique appliqué :

$$\mathbf{v}_e = -\mu_e \mathbf{E} . \quad (2.11)$$

Le courant électrique résultant du mouvement des électrons sera d'autant plus grand que la vitesse de ces électrons est élevée car :

$$\Delta Q = N_e q (\Delta S) (v_d \Delta t) \quad (2.12)$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = N_e q v_e \Delta S \quad (2.13)$$

où  $N_e$  est le nombre d'électrons libres par mètre cube ;  $q$ , la charge de l'électron et  $\Delta S$ , la section considérée. Ainsi la quantité  $N_e |q| v_e$  permet une relation directe entre la densité de courant de conduction, notée  $\mathbf{J}_c$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$ . C'est la conductivité  $\sigma$  exprimée en *Siemens/mètre* ou *mhos/mètre* :

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} . \quad (2.14)$$

Le tableau 2.1 contient différentes valeurs de conductivité selon les matériaux.

## 2.5 Diélectrique et champ de déplacement

Il a été dit que le champ électrique produit par une charge dépend du milieu via la permittivité  $\epsilon$ . Si le milieu est le vide, alors la permittivité est  $\epsilon_o$  mais, dans un diélectrique, il existe des atomes constitués de charges positives et négatives liées ensemble. Sous l'effet du champ électrique, ces atomes deviennent polarisés i.e. le nuage d'électrons de l'atome a tendance à être décentré créant ainsi un dipôle électrique comme sur la figure 2.14. L'intensité du dipôle est définie par le moment dipolaire électrique  $\mathbf{p}$  donné par :

$$\mathbf{p} = Q \mathbf{d} \quad (2.15)$$

Matériau	$\sigma$ [ $S/m$ ]	Matériau	$\sigma$ [ $S/m$ ]
argent	$6.1 \times 10^7$	eau de mer	4
cuivre	$5.8 \times 10^7$	germanium	2.2
or	$4.1 \times 10^7$	silicium	$1.6 \times 10^{-3}$
aluminium	$3.5 \times 10^7$	eau fraîche	$10^{-3}$
tungstène	$1.8 \times 10^7$	terre sèche	$10^{-5}$
fer	$4.8 \times 10^6$	bakelite	$10^{-9}$
mercure	$1.0 \times 10^6$	verre	$10^{-10} - 10^{-14}$

TABLE 2.1 – Conductivité de certains matériaux.

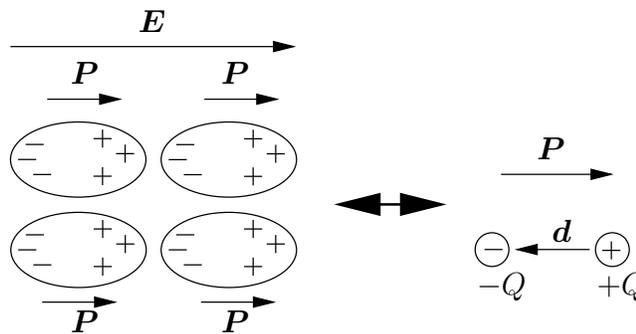


FIGURE 2.14 – Effet de la polarisation et moment dipolaire.

où  $\mathbf{d}$  est le vecteur de déplacement entre le centre du nuage des charges négatives et le noyau positif, chaque charge<sup>3</sup> ayant  $Q$  *Coulombs*. Sur l'ensemble des atomes du milieu,  $\mathbf{P}$ , le vecteur de polarisation électrique, est la somme vectorielle des moment dipolaires par unité de volume.

Bien sur, le vecteur de polarisation électrique en  $C/m^2$  varie d'un matériau à l'autre mais, dans la partie linéaire de la réponse, il est directement proportionnel au champ électrique ambiant dans le diélectrique  $\mathbf{E}$  via la susceptibilité électrique  $\chi_e$  :

$$\mathbf{P} = \epsilon_o \chi_e \mathbf{E} . \tag{2.16}$$

La polarisation électrique est telle qu'elle induit un champ secondaire  $\mathbf{E}_s$  s'opposant au champ électrique responsable de sa création. Le champ ambiant dans le diélectrique  $\mathbf{E}$  est donc plus faible dans un matériau que dans le vide; ceci est d'autant plus vrai lorsque le matériau se polarise facilement. Or le champ ambiant est la superposition du champ appliqué  $\mathbf{E}_a$  (qui ne tient pas compte de la polarisation comme dans le vide) et du champ secondaire  $\mathbf{E}_s$  résultant de la polarisation  $\mathbf{P}$ , ce dernier étant lui-même fonction du champ ambiant. Le champ appliqué et le la champ secondaire s'ajustent pour atteindre un équilibre. Dans le but d'éliminer la connaissance explicite de  $\mathbf{P}$ , on définit une nouveau

<sup>3</sup>On considère ici un matériau neutre électriquement, ce qui veut dire que la charge totale est nulle.

Matériau	$\epsilon_r$	Matériau	$\epsilon_r$
air	1.0006	nylon	3.5
styromousse	1.05	quartz	4-5
papier	2-3	bakelite	5
bois	2-4	mica	6
teflon	2.1	néoprène	6.8
polystyrène	2.6	glycérine	42-50
plexiglass	3-3.5	eau	81
sol	3-5	rutile ( $TiO_2$ )	90-115

TABLE 2.2 – Constante diélectrique de quelques matériaux.

champ vectoriel  $\mathbf{D}$  appelé le champ de déplacement :

$$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.17)$$

$$= \epsilon_o \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\epsilon_r} \mathbf{E} \quad (2.18)$$

$$= \epsilon \mathbf{E} \quad (2.19)$$

avec

$$\epsilon = \epsilon_o \epsilon_r . \quad (2.20)$$

La quantité  $\epsilon_r$  s'appelle la constante diélectrique. La table 2.2 donne quelques valeurs de constante diélectrique. Dans les matériaux usuels, elle est généralement supérieure à l'unité de sorte que  $\epsilon \geq \epsilon_o$ . Ainsi, il suffit d'utiliser la permittivité  $\epsilon$  dans les équations pour tenir compte de la polarisation automatiquement. Quant au champ de déplacement  $\mathbf{D}$ , il a les mêmes unités que la polarisation i.e.  $C/m^2$ . L'avantage du champ de déplacement  $\mathbf{D}$  est son indépendance face au matériau dans lequel on le mesure ; il ne dépend que des charges en présence. Ainsi, le champ électrique produit par une configuration de charges vaut  $\mathbf{D}/\epsilon_o$  dans le vide et  $\mathbf{D}/(\epsilon_r \epsilon_o)$  dans un diélectrique de constante  $\epsilon_r$ . Comme on a généralement  $\epsilon_r \geq 1$ , il s'ensuit que le champ électrique dans le diélectrique est souvent plus faible<sup>4</sup> ou égal à celui qui aurait été obtenu dans le vide, conséquence directe de l'opposition de la polarisation au champ appliqué.

La molécule d'eau, à cause de sa géométrie asymétrique, se polarise facilement. Les deux atomes d'hydrogène sont reliés à l'atome d'oxygène en formant un angle de 104.45°.

Pour un matériau diélectrique isotrope<sup>5</sup>, la permittivité est un scalaire<sup>6</sup>. La direction du champ de déplacement est alors la même que celle du champ électrique car la polarisation suit aussi la même orientation.

<sup>4</sup>Il existe des matériaux particuliers qui présentent une constante diélectrique inférieure à l'unité. Le plasma est un exemple avec ses propriétés exotiques.

<sup>5</sup>Un matériau est dit isotrope si la caractéristique (la permittivité pour un diélectrique ou la conductivité pour un conducteur) reste la même quelle que soit l'orientation du champ (le champ électrique dans le cas de la conductivité ou de la permittivité) dans l'espace.

<sup>6</sup>Pour les matériaux anisotropes, qui ne sont pas considérés dans le cadre de ce cours, la permittivité est une matrice  $3 \times 3$  appelée tenseur de permittivité :  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ .

## 2.6 Matériau magnétique et champ magnétique

Jusqu'à présent, les réponses aux champs électriques ont été couvertes pour les matériaux conducteurs et diélectriques. Les matériaux magnétiques ont eux un comportement reliés au champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$ . Dans la structure atomique, on relève les particularités suivantes :

- Les électrons et le noyau tournent autour d'un axe qui leurs sont propres, c'est le spin, un mouvement quantique qui donne un mouvement cinétique à l'électron et le noyau. Cependant, étant donnée la masse du noyau, son spin a une vitesse angulaire beaucoup plus faible d'où une importance beaucoup moindre que celui d'un électron.
- Les électrons possèdent aussi une quantité de mouvement qui les font décrire une orbite autour du noyau – la vitesse de l'électron est de l'ordre de  $10^6$  m/s. Cette orbite ne peut être déterminée avec exactitude selon le principe d'incertitude. Elle n'est donc pas forcément circulaire, loin de là. Mais, ce mouvement fournit un autre mouvement cinétique dit orbital. Dans un modèle simpliste (qui ne respecte pas en tout point la théorie quantique) mais tout-à-fait satisfaisant pour décrire la magnétisation, le mouvement orbital peut se modéliser par une orbite circulaire centrée sur le noyau.

Le spin des électrons et leur mouvement orbital sont tous deux responsables d'un effet de magnétisation car le spin et le mouvement orbital s'apparentent à un mouvement de charge électrique : ils peuvent être considérés comme autant de boucles de courant à des dimensions sub-atomiques et atomiques respectivement qui se superposent pour former une boucle de courant équivalente par atome. Le rapport de l'effet magnétique du spin à celui du mouvement orbital s'appelle le facteur  $g$  de l'électron ; il vaut 2 pratiquement (la légère différence s'explique par la théorie électrodynamique quantique).

La boucle équivalente pour chaque atome, forme un moment dipolaire magnétique  $\mathbf{m}$ , l'analogue du moment dipolaire électriques  $\mathbf{p}$ , avec :

$$\mathbf{m} = IA\mathbf{a}_n . \tag{2.21}$$

Dans cette équation,  $I$  est le courant circulant dans la boucle ;  $A$  est l'aire délimitée par la boucle et  $\mathbf{a}_n$ , la normale au plan de la boucle suivant la règle de la main droite.

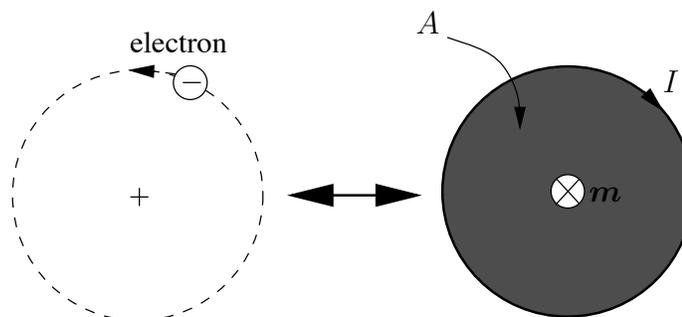


FIGURE 2.15 – Effet de la magnétisation et moment dipolaire magnétique.

La figure 2.15 illustre un moment dipolaire magnétique. Il faut voir le moment dipolaire sous deux échelles : celle au niveau microscopique et l'autre, macroscopique. Sur cette dernière échelle, on définit le vecteur de magnétisation  $\mathbf{M}$ <sup>7</sup> comme la somme des moments dipolaires magnétiques de chaque atome par unité de volume ou densité volumique du moment dipolaire magnétique résultant.

Un matériau peut être vu comme étant composé au niveau microscopique d'un ensemble d'aimants élémentaires. Dans la plupart des matériaux non magnétisés, les orbites et spins de tous les électrons sont disposées de manière assez aléatoire de sorte que le moment magnétique net de l'atome est nul. En effet, pour ces matériaux, sans champ d'induction magnétique appliqué, les spins autant que les plans orbitaux sont disposées de manière quelconque de sorte que le moment magnétique net de l'atome est nul lorsqu'on en fait la somme vectorielle.

Lorsqu'un matériau est soumis à un champ magnétique extérieur, sa structure microscopique se modifie. Chacun des aimants élémentaires peut avoir tendance à s'aligner avec ce champ ou bien à lui résister, selon la nature des atomes et des forces de liaisons qui les lient. La susceptibilité magnétique  $\chi_m$  relie la magnétisation au champ magnétique par :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} . \quad (2.22)$$

Elle indique le type de réponse produite au niveau macroscopique du matériau face au champ d'induction magnétique appliqué :

- $\chi_m < 1$  : Le champ d'induction dans le matériau est affaibli par l'aimantation induite car la magnétisation s'oppose au champ appliqué, c'est le diamagnétisme.
- $\chi_m > 1$  : À l'inverse cette fois, la magnétisation va dans le même sens, c'est le paramagnétisme.
- $\chi_m \gg 1$  : Les forces de liaisons entre les atomes sont grandes de sorte que les magnétisations s'alignent fortement avec le champ appliqué de manière à renforcer le champ ambiant. Ce sont les matériaux ferromagnétiques<sup>8</sup> capables d'exhiber une magnétisation permanente même sans champ d'induction.

Toujours de manière similaire au cas du champ électrique dans un matériau diélectrique, le champ d'induction appliqué  $\mathbf{B}_a$  (qui ne tient pas compte de la magnétisation) provoque un champ d'induction secondaire  $\mathbf{B}_s$  provenant de la magnétisation  $\mathbf{M}$ . Cette magnétisation est dépendante du champ ambiant dans le matériau  $\mathbf{B}$  constitué de la superposition du champ appliqué  $\mathbf{B}_a$  et du champ secondaire  $\mathbf{B}_s$ . La création du champ

<sup>7</sup>On peut voir encore ici, une analogie avec le vecteur de polarisation  $\mathbf{P}$ .

<sup>8</sup>Il s'agit principalement du fer, du cobalt, du nickel et de quelques terres rares, de leurs alliages, composés et oxydes.

Matériau	Groupe	$\mu_r$	Matériau	Groupe	$\mu_r$
bismuth	diamag.	0.99983	cobalt	ferromag.	250
argent	diamag.	0.99998	nickel	ferromag.	600
cuivre	diamag.	0.999991	acier doux (0.2 C)	ferromag.	2000
eau	diamag.	0.999991	fer (0.2 impureté)	ferromag.	5000
vide	non-mag.	1	mumétal (18 Fe, 75 Ni, 5 Cu, 2 Cr)	ferromag.	100,000
air	paramag.	1.0000004	fer purifié (0.05 impureté)	ferromag.	200,000
aluminium	paramag.	1.00002	supermalloy (15 Fe, 5 Mo, 79 Ni)	ferromag.	1,000,000

TABLE 2.3 – Perméabilité relative de quelques matériaux.

magnétique  $\mathbf{H}$  évite le calcul de la magnétisation :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \tag{2.23}$$

$$= \frac{\mathbf{B}}{\underbrace{\mu_o(1 + \chi_m)}_{\mu_r}} \tag{2.24}$$

$$= \frac{\mathbf{B}}{\mu} \tag{2.25}$$

avec

$$\mu = \mu_o \mu_r . \tag{2.26}$$

La quantité  $\mu$  est la perméabilité et  $\mu_r$ , la perméabilité relative. La perméabilité permet de tenir compte des effets de magnétisation en utilisant  $\mu$  plutôt que  $\mu_o$  dans un matériau magnétique. Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  en *Ampères/mètre* est directement lié à la densité surfacique de courant responsable des effets magnétiques, sans référence à la nature du matériau.

Un regard sur le tableau 2.3, montre qu’il est possible d’avoir une perméabilité relative légèrement plus faible que l’unité pour les diamagnétiques ou à peine supérieur à l’unité pour les paramagnétiques. On considère toutefois l’effet insuffisant de sorte qu’on les assimile davantage à des matériaux non-magnétiques. Les matériaux ferromagnétiques sont dits magnétiques car leur perméabilité relative atteint facilement plusieurs ordres de grandeur.

Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  pointe, pour les matériaux isotropes magnétiques, dans la même direction que  $\mathbf{B}$  ; donc  $\mu$  est un scalaire<sup>9</sup>.

Un dernier mot sur le magnétisme. Les matériaux ferromagnétiques présentent une courbe d’hystérésis laquelle prouve que la relation  $B - H$  est souvent complexe. Cette relation devrait apparaître comme une droite mais, pour ces matériaux,  $\mu$  est non linéaire i.e. fonction de l’amplitude du champ magnétique. Plus encore, il existe une rémanence (mémoire) qui fait que le matériau se souvient de son état précédent et qu’il réagit différemment au modification du champ magnétique. Le matériau est alors magnétisé et

<sup>9</sup>Les matériaux anisotropes magnétiques ne sont pas considérés dans le cadre de ce cours, la relation s’écrit alors  $\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$  où  $\boldsymbol{\mu}$  est une matrice  $3 \times 3$  appelée tenseur de perméabilité.

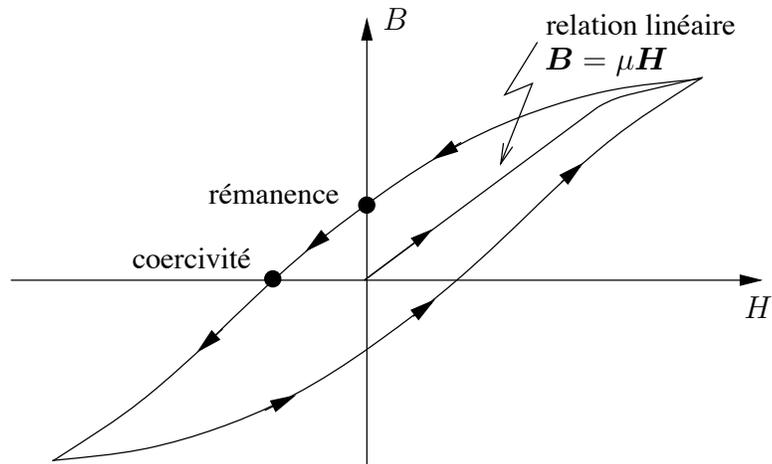


FIGURE 2.16 – Courbe d'hystérésis typique pour un matériau ferromagnétique.

devient un aimant permanent à moins qu'on applique sur lui un champ inverse intense. La figure 2.16 montre l'allure de la relation  $B - H$  caractéristique pour les matériaux ferromagnétiques.

## Exercices

### Question 1

Des charges ponctuelles, chacune d'une valeur de  $\sqrt{4\pi\epsilon_0}C$ , sont situées sur les sommets d'un polygone régulier à  $n$ -côtés inscrit dans un cercle de rayon  $a$ . Trouvez l'amplitude de la force électrique agissant sur chacune des charges pour :

- a)  $n = 3$ ;
- b)  $n = 4$ .

### Question 2

Des feuilles planes infinies sont placées à  $z = 0$ ,  $z = 2$  et  $z = 4$ . Ces feuilles sont uniformément chargées avec les densités surfaciques  $\rho_{s1}$ ,  $\rho_{s2}$  et  $\rho_{s3}$  respectivement. Les champs électriques résultants aux points  $(3, 5, 1)$ ,  $(1, -2, 3)$  et  $(3, 5, 5)$  valent  $\mathbf{0}$ ,  $6\mathbf{a}_z$  et  $4\mathbf{a}_z$  V/m respectivement. Déduisez :

- a) les valeurs des densités de charges  $\rho_{s1}$ ,  $\rho_{s2}$  et  $\rho_{s3}$ ;
- b) le champ électrique à  $(-2, 2, -6)$ .

### Question 3

Soit un disque circulaire de rayon  $a$  centré dans le plan  $xy$ . Sur ce disque est distribuée une charge dont la densité surfacique varie suivant  $r$  comme :

$$\rho_s(r) = 4\pi\epsilon_0 r C/m^2 .$$

Exprimez le champ électrique produit par le disque en tout point sur l'axe  $z$ .

### Question 4

Une charge volumique distribuée uniformément avec une densité  $\rho_o C/m^3$  entre les plans  $z = -a$  et  $z = a$ . En utilisant le principe de superposition et le résultat du champ électrique produit par une feuille de charges surfaciques, exprimez le champ électrique sur l'axe  $z$ .

### Question 5

Soient un courant  $I_1 d\mathbf{l}_1 = I_1 dy \mathbf{a}_y$  passant par  $(1, 0, 0)$  et un courant  $I_2 d\mathbf{l}_2 = I_2 dx \mathbf{a}_x$  passant par  $(0, 1, 0)$ . Trouvez les éléments de forces magnétiques  $d\mathbf{F}_1$  et  $d\mathbf{F}_2$  agissant l'une sur l'autre.

### Question 6

Des courants de surfacique existent sur des feuilles planes infinies placées à  $x = 0$ ,

$y = 0$  et  $z = 0$ . Les densités de courant sont respectivement de  $J_{so}\mathbf{a}_z$ ,  $2J_{so}\mathbf{a}_x$  et  $-J_{so}\mathbf{a}_x$   $A/m$ . Trouvez la valeur des champs d'induction magnétique aux points suivants :

- a)  $(1, 2, 2)$  ;
- b)  $(2, -2, -1)$ .

### Question 7

Un courant de volume circule entre les plans  $z = -a$  et  $z = a$  avec une densité uniforme  $J_o\mathbf{a}_x$   $A/m^2$ . En utilisant le principe de superposition et le résultat du champ d'induction magnétique produit par une feuille de courant de surface, exprimez le champ d'induction magnétique sur l'axe  $z$ .

### Question 8

Une boucle circulaire d'un rayon  $a$  est centrée dans le plan  $xy$ . Sur cette boucle circule un courant  $I$  dans le sens horaire tel que vu du point  $(0, 0, 1)$  i.e. dans le sens des valeurs décroissantes de  $\phi$ . Dérivez l'expression de  $\mathbf{B}$  produit par la boucle de courant en tout point sur l'axe  $z$ .

### Question 9

Soient des feuilles planes infinies avec des densités de charges uniformes de  $1\mu C/m^2$  et  $-1\mu C/m^2$ , placées à  $z = 0$  et  $z = d$  respectivement. La région entre les deux plans  $0 < z < d$  est remplie d'un diélectrique. Trouvez les valeurs de  $\mathbf{D}$  et de  $\mathbf{E}$  dans le diélectrique si :

- a) le diélectrique est de l'air ;
- b) la permittivité vaut  $4\epsilon_o$ .

### Question 10

Une charge ponctuelle  $Q$  est située à l'origine d'un système de coordonnées. Cette charge est enveloppée par une coquille sphérique de rayon interne  $a$  et de rayon externe  $b$  centrée sur la charge. La coquille est faite d'un diélectrique de constante  $\epsilon_r = 4$ . Exprimez les champs de déplacement et électrique dans les trois régions :  $0 < r < a$ ,  $a < r < b$  et  $r > b$ .

### Question 11

Des courants circulent sur deux feuilles planes infinies situées à  $z = 0$  et  $z = d$  avec des densités de  $0.1\mathbf{a}_y$   $A/m$  et  $-0.1\mathbf{a}_y$   $A/m$  respectivement. La région entre les deux feuilles  $0 < z < d$  est constituée d'un matériau magnétique. Trouvez les valeurs de  $\mathbf{H}$  et de  $\mathbf{B}$  dans le matériau si :

- a) le matériau est de l'air ;

b) la perméabilité vaut  $100\mu_o$ .

**Réponses :**

1. a)  $0.577/a^2 N$  ; b)  $0.957/a^2 N$ .

2. a)  $\rho_{s1} = 4\epsilon_o C/m^2$ ,  $\rho_{s2} = 6\epsilon_o C/m^2$ ,  $\rho_{s3} = -2\epsilon_o C/m^2$  ;  
 b)  $[\mathbf{E}]_{(-2,2,-6)} = -4\mathbf{a}_z V/m$ .

3.  $[\mathbf{E}]_{(0,0,z)} = 2\pi z \left( \ln \left( \frac{a+\sqrt{a^2+z^2}}{z} \right) - \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} \right) \mathbf{a}_z$ .

4.  $[\mathbf{E}]_{(0,0,z)} = \begin{cases} -(\rho_o a/\epsilon_o)\mathbf{a}_z & z < -a \\ (\rho_o z/\epsilon_o)\mathbf{a}_z & -a < z < a \\ (\rho_o a/\epsilon_o)\mathbf{a}_z & z > a \end{cases}$ .

5.  $d\mathbf{F}_1 = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{8\sqrt{2}\pi} dx dy \mathbf{a}_x$ ,  $d\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{8\sqrt{2}\pi} dx dy \mathbf{a}_y$ .

6. a)  $\mu_o J_{so}(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) Wb/m^2$  ; b)  $-\mu_o J_{so} \mathbf{a}_z Wb/m^2$ .

7.  $[\mathbf{B}]_{(0,0,z)} = \begin{cases} (\mu_o J_o a)\mathbf{a}_y & z < -a \\ -(\mu_o J_o z)\mathbf{a}_y & -a < z < a \\ -(\mu_o J_o a)\mathbf{a}_y & z > a \end{cases}$ .

8.  $[\mathbf{B}]_{(0,0,z)} = -\frac{\mu_o I}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z Wb/m^2$ .

9. a)  $\mathbf{D} = 10^{-6} \mathbf{a}_z C/m^2$ ,  $\mathbf{E} \approx 36000\pi \mathbf{a}_z V/m$  ;  
 b)  $\mathbf{D} = 10^{-6} \mathbf{a}_z C/m^2$ ,  $\mathbf{E} \approx 9000\pi \mathbf{a}_z V/m$ .

10.  $\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$  partout ;  $\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} & r < a \\ \frac{Q}{16\pi\epsilon_o r^2} & a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} & r > b \end{cases}$

11. a)  $\mathbf{H} = 0.1 \mathbf{a}_x A/m$ ,  $\mathbf{B} = 4\pi \times 10^{-8} \mathbf{a}_x Wb/m^2$  ;  
 b)  $\mathbf{H} = 0.1 \mathbf{a}_x A/m$ ,  $\mathbf{B} = 4\pi \times 10^{-6} \mathbf{a}_x Wb/m^2$ .

# Chapitre 3

## Les lois de Maxwell

### 3.1 Introduction

Les lois de *Maxwell*, au nombre de quatre, sont les équations qui définissent entièrement le comportement de l'électromagnétisme, autant dans le cas statique, quasi-statique que pour les signaux variant dans le temps. Elles ont été formulées dans un traité publié autour de 1867. Lord *James Clerk Maxwell* a dérivé les expressions des observations des expériences de *Michael Faraday* datant de 1831 d'une part, et d'une combinaison des résultats de *Hans Oersted* et d'*André Ampère* d'autre part.

Ces lois, malgré les bouleversements dans ce domaine par la théorie de la relativité, restent toujours valides intégralement dans toutes circonstances entourant les ondes électromagnétiques. Petite anecdote en passant, *Albert Einstein* avait deux portraits dans son bureau de Princeton : celui de *Newton* et celui de *Maxwell* ! C'est dire toute l'estime qu'il vouait à ces deux scientifiques.

Les deux premières équations de *Maxwell* sont aussi connus sous les noms de ces pionniers de l'électromagnétisme : *Faraday* et *Ampère*. Elles sont les deux principales à partir desquelles il est possible de déduire toutes les autres et de là, tout l'électromagnétisme du cas statique au rayonnement par les antennes.

### 3.2 Loi de Faraday

L'équation de *Faraday* constitue la première équation, elle découle de la découverte expérimentale de *Michael Faraday* en 1831. Un champ magnétique variant donne naissance à un champ électrique. L'expérience consistait à mesurer le voltage aux bornes d'une (ou plusieurs) boucle de fil placée dans un champ magnétique. Une force électromotrice *fem* apparaissait dès que la boucle changeait d'aspect ou dès que le champ magnétique variait dans le temps.

Sous forme mathématique, la loi de *Faraday* s'écrit :

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{fem} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.1)$$

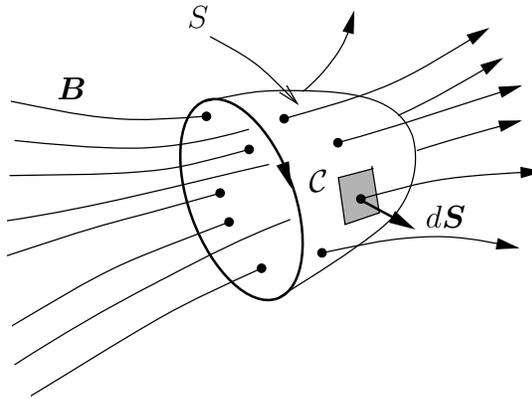


FIGURE 3.1 – Illustration de la loi de *Faraday*.

où  $S$  est la surface délimitée par le contour fermé  $C$  tel que cela apparaît à la figure 3.1

Comme pour tout champ, l'intégrale de  $\mathbf{B}$  traversant une surface est nommé le flux. Le flux magnétique  $[\Psi]_s$  exprimé en *Webers* est défini comme :

$$[\Psi]_s = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \tag{3.2}$$

L'équation 3.1 indique que toute variation du flux magnétique provoque une force électromotrice associée à un champ électrique  $\mathbf{E}$ . Voici quelques points intéressants ou à considérer :

- On doit observer la règle de la main droite pour choisir le sens d'intégration du parcours et le sens de la normale à la surface.
- Toute surface  $S$  délimitée par  $C$  convient pour faire le calcul du flux magnétique<sup>1</sup> ; le résultat n'en sera pas affecté. On a alors avantage à réfléchir sur le choix de la surface car certaines pourront faciliter le travail.
- Le signe négatif vient de la loi de *Lenz* qui dit que la *fem* est telle que le courant produit tend à s'opposer au changement du flux magnétique qui l'a engendré. Un flux entrant et augmentant dans le temps induit une *fem* qui produit un flux sortant ; un flux entrant et diminuant dans le temps induit une *fem* qui produit un flux entrant.
- Si le parcours  $C$  est constitué de plusieurs tours de fil –  $N$  tours – alors la surface  $S$  prend l'allure d'une hélicoïde comme sur la figure 3.2 ( $N = 2$ ), le flux est coupé  $N$  fois par la surface et la *fem* s'en trouve multipliée par  $N$  comparativement à celle produite par un seul tour :

$$fem = -N \frac{d\Psi}{dt} . \tag{3.3}$$

Ce principe est largement utilisé en électrotechnologie pour la construction des transformateurs, des génératrices (ou moteurs) par exemple. On s'en sert aussi pour les mini-antennes boucles dans les récepteurs radio.

<sup>1</sup>En effet, pour avoir une intégrale de surface dépendant uniquement des limites, il suffit que la divergence de l'intégrande soit nulle. On verra plus tard que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

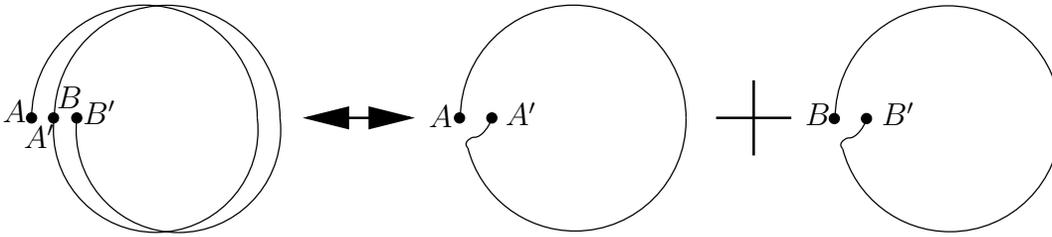


FIGURE 3.2 – Principe de la boucle constituée de 2 tours.

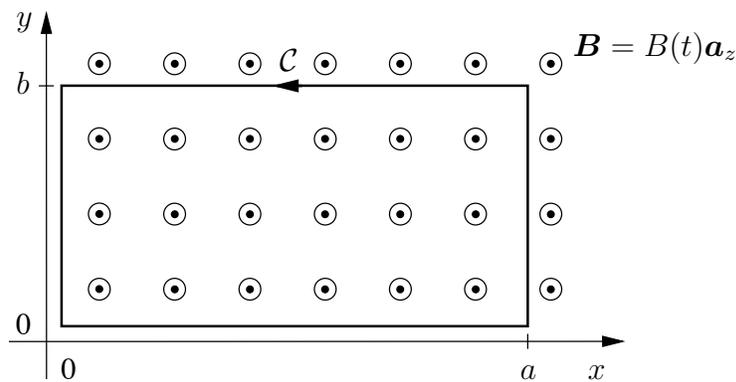
**Exemple 3.1**

FIGURE 3.3 – Parcours rectangulaire dans un champ d'induction variant.

Soit un champ d'induction  $\mathbf{B} = B_o \cos \omega t \mathbf{a}_z$  où  $B_o$  est une constante.

- Exprimez la *fem* induite sur le parcours rectangulaire illustré à la figure 3.3 dans le sens anti-horaire.

La surface choisie est la portion du plan  $xy$  à l'intérieur du cadre. L'unité différentielle de surface est donc  $d\mathbf{S} = dx dy \mathbf{a}_z$  en accord avec la règle de la main droite. Donc ;

$$\begin{aligned} \Psi &= \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^b \int_0^a B_o \cos \omega t \mathbf{a}_z \cdot dx dy \mathbf{a}_z \\ &= abB_o \cos \omega t \end{aligned}$$

Évidemment, le résultat aurait pu être déduit rapidement car le champ est uniforme dans la surface d'aire  $ab$ . La *fem* induite sur le parcours est :

$$\begin{aligned} fem &= -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(abB_o \cos \omega t) \\ &= abB_o \omega \sin \omega t . \end{aligned}$$

- Une boucle conductrice épouse le parcours ; elle est ouverte pour brancher un voltmètre, que lira-t-on.

Le voltmètre a une impédance élevée (idéalement infinie). Ainsi, aucun courant ne devrait circuler dans la boucle susceptible d'induire un champ magnétique secondaire et la tension lue correspondra à la valeur efficace de la *fem* initiale :

$$v_{ue}(t) = abB_o\omega/\sqrt{2}.$$

**Exemple 3.2**

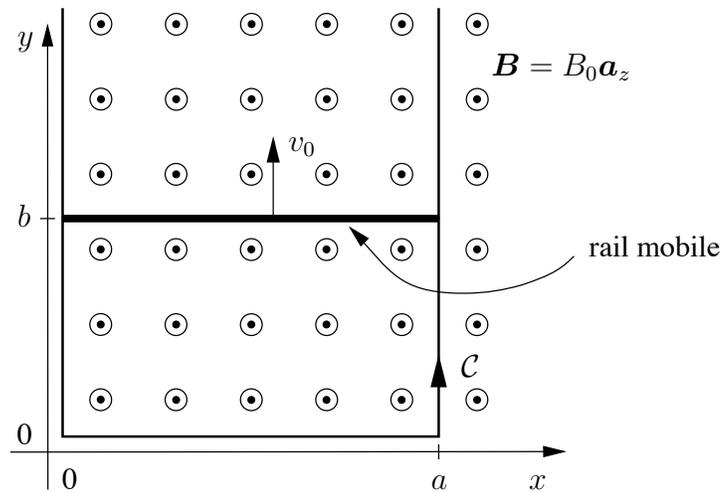


FIGURE 3.4 – Boucle rectangulaire à aire variable dans un champ d'induction constant.

Une boucle rectangulaire est formée de trois côté fixes fait d'un excellent conducteur, et d'un rail mobile qui glisse latéralement sans friction sur les deux colatéraux à une vitesse fixe  $v_o$ . Ce rail possède une résistivité  $R$ . Le tout forme un parcours rectangulaire dont l'aire varie dans le temps, placé perpendiculairement dans un champ d'induction statique  $\mathbf{B} = B_o\mathbf{a}_z$ . La figure 3.4 montre la géométrie du problème au temps  $t = 0$ .

- Exprimez la *fem* induite sur le parcours dans le sens anti-horaire sans considérer l'effet magnétique produit par le courant qui circule dans la boucle.

Encore ici, la surface est le plan  $xy$  à l'intérieur du cadre d'où  $d\mathbf{S} = dx dy \mathbf{a}_z$ . Comme le champ est statique, la variation du flux dans le temps sera causée par le fait que la surface change. On obtient :

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_0^{b+v_o t} \int_0^a B_o dx dy \\ &= aB_o(b + v_o t) \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} fem &= -\frac{d}{dt}(aB_o(b+v_ot)) \\ &= -aB_ov_o. \end{aligned}$$

- Exprimez le courant  $I_{boucle}$  et dites si une force extérieure est nécessaire pour maintenir la vitesse du rail mobile constante.

---


$$I_{boucle} = \frac{fem}{R} = \frac{-aB_ov_o}{R}.$$

Le courant  $I_{boucle}$  circule dans le sens horaire, passant de gauche à droite ( $\mathbf{a}_x$ ) dans le rail mobile. Une force magnétique agit sur le rail. Selon (2.9), cette force est orientée vers le bas ( $-\mathbf{a}_y$ ), s'opposant donc au mouvement du rail tel que prévu par la loi de *Lens*. Une force extérieure doit être appliquée :

$$\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_m = \frac{aB_ov_o}{R}aB_o\mathbf{a}_y = \frac{a^2B_o^2v_o}{R}\mathbf{a}_y.$$


---

### 3.3 Loi d'Ampère

La seconde équation de *Maxwell* est un peu plus compliquée. Elle provient principalement des observations de *Oersted* à propos des champs magnétiques produits par les courants. La contribution mathématique de *Maxwell* lui a permis d'affirmer que des champs électriques variant donnent naissance à des champs magnétiques. Ce dernier a d'ailleurs prédit longtemps avant que le phénomène soit observé, la propagation des ondes électromagnétiques. La loi d'*Ampère* sous la forme intégrale, s'écrit ainsi :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = [I]_s + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.4)$$

où  $S$  est une surface délimitée par le contour fermé  $\mathcal{C}$ .

Cette équation ressemble à celle de *Faraday* sauf qu'il y a deux termes à droite de l'égalité. Cette différence provient du fait qu'il existe un courant électrique mais pas de courant magnétique. On peut pousser plus loin et se demander pourquoi. La réponse : les charges magnétiques isolées n'existent pas et ne se déplacent pas non plus, par conséquent. Pour ajouter à la ressemblance, on utilise l'analogie jusqu'à dire que  $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  est la force magnétomotrice  $fmm$ .

Le terme  $[I]_s$  représente le courant dû au mouvement des charges électriques passant au travers la surface  $S$ . Ce courant peut être de conduction dans un conducteur ou de convection par un nuage de charges dans l'espace. Il ne peut être lié aux phénomènes de polarisation ou de magnétisation dans le matériau car l'effet de ces phénomènes est considéré implicitement dans les définitions de  $\mathbf{D}$  ou  $\mathbf{H}$  respectivement.

Le second terme de droite  $d(\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S})/dt$  représente aussi un courant – il le faut afin de respecter le bilan d’unités avec le premier terme de courant – mais différent de celui auquel on est habitué. Il s’agit encore une fois de l’intégrale d’un champ traversant une surface et donc d’un flux. Le flux électrique  $\Psi_e$  est défini d’une manière analogue aux flux magnétique :

$$[\Psi_e]_s = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} . \tag{3.5}$$

Puisque le champ  $\mathbf{D}$  est en  $C/m^2$ , le flux est en *Coulombs*. Une variation de flux correspond donc à une variation de charge électrique : c’est un courant. En conséquence, tout courant, peu importe sa source (qu’il soit de conduction, de convection ou de déplacement), produit un champ magnétique.

Il faut cependant suivre quelques règles pour déterminer la valeur de la force magnétomotrice  $fmm$  avec l’équation (3.4) :

- les intégrales de surface sont évaluées en accord avec la règle de la main droite exposée auparavant ; la normale à la surface est orientée selon le sens choisi du parcours  $\mathcal{C}$  ;
- les surfaces  $S$  de chaque membre de droite doivent être absolument *identiques*<sup>2</sup> ; cependant toute surface quelconque délimitée par le parcours fermé  $\mathcal{C}$  convient .

Si on suppose un courant de conduction,  $[I_c]_s$ , il peut provenir autant d’un courant filiforme, de surface, de volume ou d’une combinaison de ceux-ci. Formulé à partir de la densité de courant volumique, le courant de conduction vaut :

$$[I_c]_s = \iint_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} . \tag{3.6}$$

De plus, sachant que le champ de déplacement et la densité de courant de conduction sont intimement liés au champ électrique via la permittivité et la conductivité selon (2.19) et (2.14) respectivement, l’équation d’Ampère devient :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} . \tag{3.7}$$

**Exemple 3.3**

Soient les champs

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}(t) &= \pm H_o \delta(t \mp \sqrt{\mu\epsilon}z) \mathbf{a}_y \\ \mathbf{E}(t) &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_o \delta(t \mp \sqrt{\mu\epsilon}z) \mathbf{a}_x \end{aligned} \right\} \text{pour } z \geq 0$$

où  $\delta(\cdot)$  représente la fonction impulsion.

Comme on verra plus tard, il s’agit des champs d’une onde électromagnétique plane et uniforme à toutes les fréquences, qui n’a qu’un seul front d’onde. On

<sup>2</sup>On rappelle que la divergence de l’intégrande doit être nulle pour avoir le choix de la surface. Dans ce cas ci, on a plutôt  $\nabla \cdot (\mathbf{J} + d\mathbf{D}/dt) = 0$ .

peut d'abord remarquer qu'une telle onde se déplace dans la direction  $z+$  si  $z > 0$  et  $z-$  si  $z < 0$ . Pour bien le voir, il faut tracer l'amplitude d'un des champs au temps  $t = 0$  puis à un temps  $t_o > 0$  pour différentes valeurs de  $z$ .

- Exprimez le courant produit par le mouvement des charges à l'intérieur de la section rectangulaire limitée par les points  $(0, 0, 0.2)$ ,  $(0, 1, 0.2)$ ,  $(0, 1, -0.2)$  et  $(0, 0, -0.2)$ .

Pour commencer, on isole la composante du courant de conduction :

$$[I_c]_s = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Les termes de droite peuvent être évalués séparément :

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^1 [H_o \delta(t - \sqrt{\mu\epsilon}z)]_{x=0} \mathbf{a}_y \cdot (dy \mathbf{a}_y) + \int_0^{0.2} [H_o \delta(t - \sqrt{\mu\epsilon}z)]_{x=0} \underbrace{\mathbf{a}_y \cdot (-dz \mathbf{a}_z)}_0 \\ &+ \int_{-0.2}^0 [-H_o \delta(t + \sqrt{\mu\epsilon}z)]_{x=0} \underbrace{\mathbf{a}_y \cdot (-dz \mathbf{a}_z)}_0 + \int_0^1 [-H_o \delta(t + \sqrt{\mu\epsilon}z)]_{x=0} \underbrace{\mathbf{a}_y \cdot (-dy \mathbf{a}_y)}_0 \\ &+ \int_{-0.2}^0 [-H_o \delta(t + \sqrt{\mu\epsilon}z)]_{x=0} \underbrace{\mathbf{a}_y \cdot (dz \mathbf{a}_z)}_0 + \int_0^{0.2} [H_o \delta(t - \sqrt{\mu\epsilon}z)]_{x=0} \underbrace{\mathbf{a}_y \cdot (dz \mathbf{a}_z)}_0 \\ &= H_o \delta(t - 0.2\sqrt{\mu\epsilon}) + 0 + 0 + H_o \delta(t - 0.2\sqrt{\mu\epsilon}) + 0 + 0 \\ &= 2H_o \delta(t - 0.2\sqrt{\mu\epsilon}) \end{aligned}$$

et, sachant que  $d\mathbf{S} = dydz(-\mathbf{a}_x)$  :

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{-0.2}^0 \int_0^1 [\sqrt{\mu\epsilon}H_o \delta(t + \sqrt{\mu\epsilon}z)]_{x=0} \mathbf{a}_x \cdot (-dydz \mathbf{a}_x) \\ &+ \int_0^{0.2} \int_0^1 [\sqrt{\mu\epsilon}H_o \delta(t - \sqrt{\mu\epsilon}z)]_{x=0} \mathbf{a}_x \cdot (-dydz \mathbf{a}_x) \\ &= -\sqrt{\mu\epsilon}H_o \left( \int_{-0.2}^0 \delta(t + \sqrt{\mu\epsilon}z) dz + \int_0^{0.2} \delta(t - \sqrt{\mu\epsilon}z) dz \right) \\ &= -\sqrt{\mu\epsilon}H_o \left( \left[ \frac{u(t + \sqrt{\mu\epsilon}z)}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right]_{z=-0.2}^0 + \left[ \frac{u(t - \sqrt{\mu\epsilon}z)}{-\sqrt{\mu\epsilon}} \right]_{z=0}^{0.2} \right) \\ &= H_o (u(t - 0.2\sqrt{\mu\epsilon}) - u(t) - u(t) + u(t - 0.2\sqrt{\mu\epsilon})) \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = -2H_o \delta(t) + 2H_o \delta(t - 0.2\sqrt{\mu\epsilon}) .$$

Finalement, le courant de conduction passant au travers la surface vaut :

$$[I_c]_s = 2H_o \delta(t) .$$

Il est intéressant d'interpréter ces derniers résultats. On s'aperçoit selon l'expression de  $[I_c]_s$ , que le courant de conduction est responsable de l'émission de l'onde électromagnétique en produisant une impulsion au temps  $t = 0$ . C'est en quelque sorte, une source  $s(t)$  placée dans le plan  $z = 0$  variant temporellement qui produit l'onde. Cette impulsion se propage dans le milieu avec une vitesse finie car elle est perçue en un instant  $t = t_o$  plus tard sous la forme d'un champ électrique et d'un champ magnétique pour tout point des plans  $z = \pm z_o$  lesquels se situent à égale distance du plan  $z = 0$ . La relation entre le délai  $t_o$  et la position  $z_o$  dépend de la vitesse de propagation de l'onde. On vérifie facilement que pour cet exemple, la vitesse de propagation, notée plus tard  $v_p$ , vaut :

$$v_p = \frac{z_o}{t_o} = \frac{z_o}{\sqrt{\mu\epsilon}z_o} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} .$$

Si le milieu est le vide, on prends  $\epsilon = \epsilon_o$  et  $\mu = \mu_o$ . Avec les valeurs de ces constantes, on trouve alors que  $v_p = c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  la vitesse de la lumière dans le vide!

On remarque aussi que la forme temporelle de l'amplitude des champs observés à une certaine distance reproduit celle de la source nonobstant le délai de propagation. En fixant le temps et en observant cette fois suivant l'axe  $z$ , la forme spatiale de l'amplitude des champs observés ressemblerait à la forme temporelle de la source inversée i.e.  $s(-t)$ .

Finalement, on note que l'amplitude des champs ne décroît pas en fonction de la distance  $z$  car la source a une dimension infinie (ce qui n'existe pas dans la réalité). Cette onde est dite uniforme.

### 3.4 Équation de continuité

L'équation de continuité est une équation supplémentaire aux équations de *Maxwell* qui fait le pont entre les charges et le courant. On l'appelle aussi la loi de conservation des charges. On ne peut démontrer l'équation de continuité qu'en assumant que physiquement, les charges électriques ne peuvent disparaître. Si la charge nette à l'intérieur d'un volume varie, c'est que des charges ont quitté ou sont entrées dans le volume. Le signe des charges et le principe de superposition des charges sont considérés dans l'équation de continuité.

On présente la loi de conservation des charges avant les deux dernières équations de *Maxwell*, parce qu'elle intervient dans la démonstration de l'une des deux.

Selon cette loi, le courant produit par le mouvement des charges au travers une surface fermée  $S$  doit correspondre au taux de décroissance de la charge dans le volume  $V$  délimité par la surface fermée  $S$  – cette charge est notée  $[Q]_V$  :

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \underbrace{\iiint_V \rho dv}_{[Q]_V} . \tag{3.8}$$

Une charge positive qui quitte le volume crée un courant positif de conduction ou de convection – le terme  $[I]_s$  a été employé précédemment pour désigner ce type de courant. En même temps, la charge contenue dans le volume a diminué d'où le signe négatif.

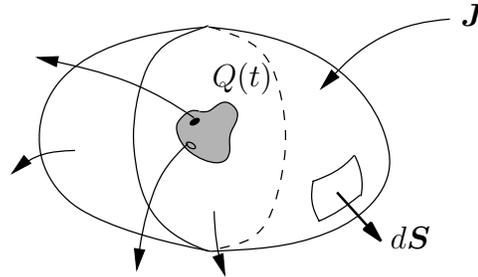


FIGURE 3.5 – Principe de la conservation des charges.

On note que  $[Q]_V$  peut être une charge ponctuelle, provenir d'une densité linéique, surfacique, volumique de charges ou encore une combinaison de tous ces modes. La figure 3.5 schématise le concept physique.

## 3.5 Équations de Gauss

Les équations de *Gauss* se dérivent directement des équations de *Faraday* et d'*Ampère* en prenant une surface fermée. Si les deux premières font appels à des intégrales de ligne des champs électrique et magnétique sur des parcours fermés, les deux dernières équations de *Maxwell* sont des intégrales de surfaces fermées.

On sait qu'une intégrale sur une surface fermée donne le bilan du flux émanant du volume délimité par la surface. Elle indique donc la présence d'une source si positive, ou d'un absorbant si négative. Dans le cas présent, l'intégrale est liée aux charges qui sont sources de flux électrique ou de flux magnétique.

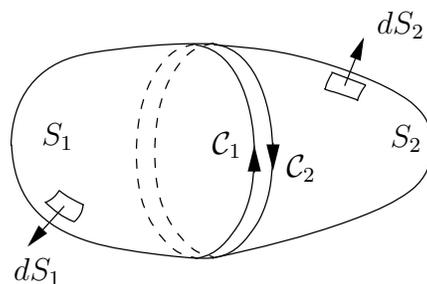


FIGURE 3.6 – Deux parcours d'intégration de sens opposés délimitant une surface fermée.

Pour la démonstration, on considère deux parcours  $C_1$  et  $C_2$  identiques mais se parcourant dans des sens opposés comme sur la figure 3.6. Ils délimitent chacun des surfaces différentes  $S_1$  et  $S_2$ . Les deux surfaces mises ensemble forment donc une surface “patatoïdale” fermée.

### 3.5.1 Charges magnétiques

En équation, cela revient à dire, à partir de *Faraday*, que :

$$\oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \underset{\uparrow}{\oint_{C_2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.9)$$

car ce sont les mêmes parcours mais qui sont parcourus dans des sens opposés. De là, on a :

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ 0 &= \frac{d}{dt} \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= - \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \end{aligned}$$

On peut tirer deux conclusions dont l'une a des conséquences directes avec la troisième équation de Maxwell :

- Même si  $S_1$  et  $S_2$  sont des surfaces différentes mais délimitées par un même parcours, le résultat reste inchangé, nonobstant le signe  $-$  qui origine du sens opposé et du respect de la règle de la main droite. Cela indique bien que la surface n'a pas d'importance quand vient le temps de choisir pour résoudre les membres de droite des équations de *Faraday* et d'*Ampère* ;
- D'autre part :

$$\frac{d}{dt} \oint_{S=S_1+S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ou encore

$$\oint_{S=S_1+S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \text{cte} .$$

Il reste à déterminer la valeur de cette constante. Or, l'intégrale fermée du flux magnétique informe sur la présence de charges magnétiques isolées à l'intérieur. Comme il n'existe pas de monopôle magnétique, alors il semble logique de prendre la constante égale à zéro : toutes les lignes de flux sortant du volume par une partie de la surface entreront par d'autres parties de la surface. Les charges magnétiques sont des éléments de courant nécessairement associés à des boucles de courant. Une charge magnétique est par conséquent un dipôle constituée à la fois d'une borne positive et d'une borne négative – les pôles sud et nord. De plus aucune expérience n'a pu démontrer le contraire en isolant un monopôle magnétique. La troisième loi de *Maxwell* et loi de *Gauss* magnétique dit que le bilan de flux magnétique émanant d'une surface fermée est toujours nul. Elle s'énonce ainsi :

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (3.10)$$

### 3.5.2 Charges électriques

Comme il a été fait avec l'équation de *Faraday*, on reprend les deux contours fermés  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  identiques mais parcourus dans le sens opposé. La surface fermée  $S$  de la figure 3.6 est obtenue en prenant les deux surfaces quelconques  $S_1$  et  $S_2$  délimitées par les deux contours. On obtient :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ 0 &= \oint_{S=S_1+S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \oint_{S=S_1+S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} . \quad (3.11)$$

Ainsi, le courant de déplacement émanant d'une surface fermée est égal au courant dû aux charges quittant le volume délimité par la surface fermée. Or, la loi de conservation des charges indique justement comment le courant  $I(t)$  est lié à la variation de la charge électrique par unité de temps :

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I(t) = \frac{d[Q]_V}{dt} \quad (3.12)$$

Partant de (3.11) et de (3.12), on déduit immédiatement la dernière équation de *Maxwell* :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = [Q]_V . \quad (3.13)$$

La charge  $[Q]_V$  exclut les phénomènes de polarisation qui sont pris en compte implicitement dans la définition de  $\mathbf{D}$ .

Formulée en terme de densité volumique, on obtient :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \, dv . \quad (3.14)$$

La seconde loi de *Gauss* sur le champ électrique indique simplement que le bilan du flux de déplacement émanant d'une surface fermée est égal à la charge contenue dans le volume délimité par la surface.

Cette loi de *Gauss* permet d'expliquer la continuité du courant au travers un condensateur pour un signal variant dans le temps. Avec une surface fermée autour d'une seule plaque d'un condensateur, on fait le lien entre le courant de déplacement et le courant de conduction. Selon (3.11) appliquée à la surface fermée  $S$  de la figure 3.7, on a :

$$\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = i(t) \quad (3.15)$$

où  $i(t)$  représente le courant fourni par la source et entrant dans le condensateur. En supposant que le champ  $D = \epsilon E$  est normal et uniforme entre les deux plaques de surface

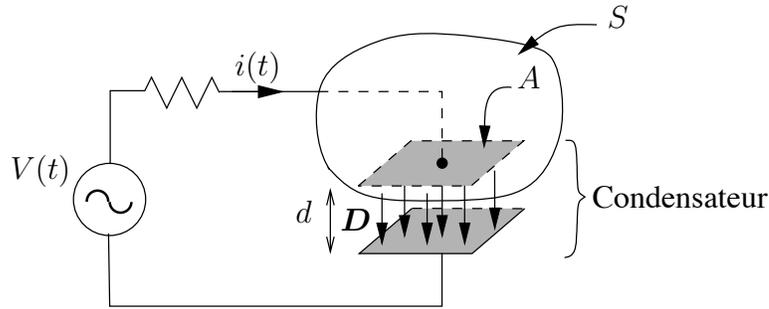


FIGURE 3.7 – Surface fermée autour d’une plaque d’un condensateur.

$A$ , en négligeant aussi les effets des bords, on peut exprimer le côté gauche de (3.15) ainsi<sup>3</sup> :

$$\frac{d}{dt}(D A) = A\epsilon \frac{dE}{dt} = i(t) .$$

**Exemple 3.4**

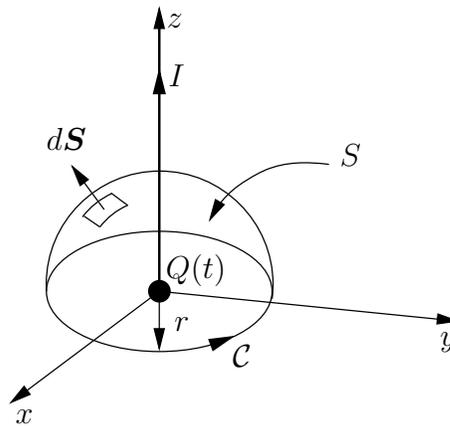


FIGURE 3.8 – Courant sur un fil semi-infini partant d’une charge  $Q(t)$  à l’origine.

Soit une petite sphère chargée qui se décharge au travers un courant constant  $I$  tel que montré à la figure 3.8. La charge de la sphère varie dans le temps selon  $I = -\frac{dQ}{dt}$ .

- Exprimez la force magnétomotrice produite le long d’un parcours circulaire  $C$  de rayon  $r$  centré sur la petite sphère.

On commence par vérifier s’il est plus simple de trouver le champ  $\mathbf{H}$  produit par le courant sur le fil semi-infini, et de l’intégrer sur le parcours<sup>4</sup>; ou de

<sup>3</sup>On retrouve facilement la relation  $v - i$  aux bornes  $a - b$  d’un condensateur sachant que  $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_{ab} = E d$  où  $d$  est l’espacement entre les plaques. Le relation entre le champ électrique et la différence de potentiel sera montrée au prochain chapitre. Ainsi, on a  $I(t) = \frac{A\epsilon}{d} \frac{dV}{dt}$ .

<sup>4</sup>En remplaçant les bornes de l’intégrale de l’exemple 2.4 par 0 à  $\infty$ , on trouve  $\mathbf{H}(z = 0) = \frac{I}{4\pi r} \mathbf{a}_\phi$ ; puisque  $d\mathbf{l} = r d\phi \mathbf{a}_\phi$ , on déduit rapidement  $fmm = \frac{I}{2}$ .

trouver les courants de conduction et de déplacement passant par une surface  $S$  délimitée par  $\mathcal{C}$ . Les deux manières sont bonnes mais on choisira ici la seconde :

$$fmm = [I_c]_s + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} .$$

On prend comme surface l'hémisphère supérieure pour faciliter le traitement qui suit.

- D'abord, le courant dû au mouvement des charges se limite à celui de conduction :

$$[I_c]_s = I$$

puisque'il passe au travers  $S$ .

- La détermination du courant de déplacement nécessite la connaissance du flux électrique. Partant de la loi de *Gauss*, on utilise les déductions suivantes :

- avec deux hémisphères – inférieure et supérieure qui forment ainsi une surface fermée – le flux électrique est égal à  $Q$  selon la loi de *Gauss*<sup>5</sup> ;
- les deux hémisphères sont identiques ; donc le flux traversant chacune d'elles vaut la moitié i.e. :

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{2} .$$

- la dérivée par rapport au temps du flux traversant la surface  $S$  combinée à la loi de conservation des charges donne donc :

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{2} I$$

La  $fmm$  est ensuite déduite en substituant les équations des courants :

$$fmm = I - \frac{1}{2} I = \frac{I}{2} .$$

On aurait trouvé un résultat identique en prenant l'hémisphère inférieure. Dans ce cas, il n'y a pas de courant de conduction qui passe au travers de la surface et le courant, par le champ de déplacement, change de signe pour respecter la règle de la main droite.

---

<sup>5</sup>Il est intéressant de noter que l'expression du champ  $E$  produite par une sphère chargée s'obtient facilement :  $\oint_{\text{sphère}} \epsilon E_r dS = 4\pi r^2 \epsilon E_r = Q$  donc  $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \mathbf{a}_r$

### 3.6 Formes différentielles

Les formes différentielles des quatre<sup>6</sup> équations de *Maxwell* permettent de voir ce qui se passe en un point particulier de l'espace. Leur utilité apparaîtra pour spécifier que toute variation spatiale d'un champ – qu'il soit électrique ou magnétique – en un point de l'espace, entraîne l'existence et la variation temporelle de l'autre champ au même point de l'espace. On verra que le comportement des champs électrique et magnétique sont intimement liés en chaque point. Ils ne sont dissociés qu'en régime statique. D'ailleurs, on appellera champ électromagnétique, le couplage constitué d'un champ électrique et d'un champ magnétique variant temporellement.

Des formes intégrales, en s'appuyant sur les théorèmes de *Stokes* et de *Green* vus précédemment, découlent les équations sous formes différentielles. Elles ne sont pas vraiment pratiques lorsque prises séparément ; c'est pourquoi elles sont présentées en bloc dans cette section.

Le théorème de *Stokes* sert pour amener les équations de *Faraday* et d'*Ampère* de la forme intégrale à la forme différentielle de la même manière que (1.26) devient (1.36). Voici l'équation de *Faraday* :

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{3.16}$$

et d'*Ampère* :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} . \tag{3.17}$$

Quant à celles de *Gauss*, le théorème de *Green* permet de faire le passage comme de (1.37) vers (1.45) :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{3.18}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \tag{3.19}$$

On se sert encore du théorème de *Green* pour exprimer l'équation de continuité sous la forme différentielle :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{d}{dt} \rho . \tag{3.20}$$

On aurait pu trouver la forme différentielle de l'équation de continuité en partant de celle de *Faraday* avec l'aide de celle de *Gauss* pour charge électrique. Il faut toutefois savoir au préalable que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle d'où :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 &= \nabla \cdot \left( \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{J} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{D}}_{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} . \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

---

<sup>6</sup>Le nombre 4 s'explique ainsi. Selon le théorème de *Helmholtz*, tout champ vectoriel peut être généré par un potentiel scalaire  $\Phi$  et un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  ; ou encore, on doit connaître la divergence et le rotationnel de tout champ vectoriel pour le déterminer. Comme, on désire connaître les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , il faudra donc 4 équations soit la divergence et le rotationnel de chacun des champs.

### 3.7 Conditions aux limites

Dans la grande majorité des problèmes d'électromagnétisme, on est confronté à plusieurs milieux. Il faut savoir comment réagissent les champs à la frontière entre différents milieux : certaines composantes sont continues en ce sens que leur valeur est identique d'un côté ou de l'autre de la frontière ; d'autres composantes sont cependant discontinues ; la discontinuité dépend de la présence d'une densité surfacique de charges ou d'un courant surfacique. On pourrait ajouter que les problèmes les plus intéressants font appel à ces conditions aux limites d'où leur grande importance.

Des exemples du rôle des conditions aux limites : la réflexion ou la transmission des ondes électromagnétiques (optiques ou autres) à l'interface sur un matériau, la distribution des champs dans une structure tels un condensateur, un câble et même une antenne.

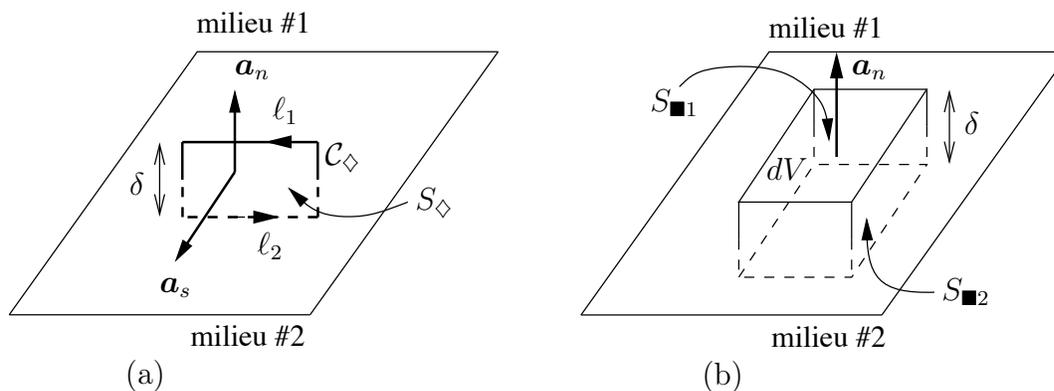


FIGURE 3.9 – Géométries pour conditions aux limites avec surface de séparation entre deux milieux.

La figure 3.9 montre les géométries considérées pour l'étude des conditions aux limites. La surface de séparation entre les deux milieux est assumée comme étant localement plane. Aucune supposition concernant les propriétés respectives des matériaux n'est prise afin d'obtenir des relations générales. Un parcours d'intégration fermé rectangulaire  $\mathcal{C}_\diamond$  (a) est déterminé, de même qu'une surface fermée  $S_\blacksquare$  (b).

Pour le parcours tout comme pour la surface, une moitié se situe dans le milieu #1 et l'autre moitié dans le milieu #2. Sur les segments ( $\ell_1$  et  $\ell_2$ ) du parcours ainsi que sur les aires ( $S_{\blacksquare 1}$  et  $S_{\blacksquare 2}$ ) de la surface qui sont parallèles au plan de séparation, on assume des champs uniformes. Cette supposition s'avère de plus en plus exacte en faisant tendre  $\ell = \ell_{1,2}$  ou  $S_\blacksquare = S_{\blacksquare 1,2}$  vers des dimensions infinitésimales.

On fait ensuite tendre  $\delta$  vers "0" afin de rendre :

- la surface  $S_\diamond$  délimitée par  $\mathcal{C}_\diamond$  nulle ;
- le volume  $V_\blacksquare$  délimité par  $S_\blacksquare$  nul.

Les champs qui interviennent dans les relations des conditions aux limites sont mesurés de part et d'autre de la surface de séparation.

### 3.7.1 Composante tangentielle du champ électrique

La composante tangentielle correspond à la partie du vecteur du champ en question qui est parallèle à la surface de séparation. Pour se fixer les idées, si le plan de séparation est  $z = 0$ , alors les composantes en  $x$  et en  $y$  sont toutes deux tangentielles.

Pour obtenir la condition aux limites de la composante tangentielle du champ électrique, on applique l'équation de *Faraday* sur le parcours  $\mathcal{C}_\diamond$  défini ci-dessus :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_{\mathcal{C}_\diamond} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \iint_{S_\diamond} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.21)$$

Il est évident qu'avec une surface  $S_\diamond$  quasi-nulle, le terme de droite devient lui-même nul. Le terme de gauche se limite aux intégrations sur les segments  $\ell_1$  et  $\ell_2$  qui ne font intervenir que les composantes tangentes à la surface à cause du produit scalaire. Si  $\ell$  est assez court, les champs sont uniformes, d'où :

$$0 = \int_{\ell_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_p dl + \int_{\ell_2} \mathbf{E}_2 \cdot (-\mathbf{a}_p) dl \quad (3.22)$$

$$= E_{\parallel 1} \ell - E_{\parallel 2} \ell \quad (3.23)$$

avec  $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_s \times \mathbf{a}_n$ , un vecteur unitaire pointant dans la direction du segment  $\ell_1$  donc parallèle à la surface de séparation. Il en ressort que les composantes tangentielles du champ électrique au plan de séparation, notées  $E_{\parallel 1}$  dans le milieu #1 et  $E_{\parallel 2}$  dans le milieu #2, sont continues : leur valeur doit être la même de part et d'autre de cette surface i.e.

$$E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2} \quad (3.24)$$

ou encore

$$E_{\parallel 1} - E_{\parallel 2} = 0 . \quad (3.25)$$

Écrite de façon vectorielle, la condition aux limites de  $\mathbf{E}$  devient :

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 . \quad (3.26)$$

### 3.7.2 Composante tangentielle du champ magnétique

On procède ici de la même manière mais à partir de l'équation d'*Ampère* :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_{\mathcal{C}_\diamond} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{S_\diamond} \left( \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.27)$$

Cette fois, lorsque la surface  $S_\diamond$  tend vers zéro, le terme de droite ne devient pas forcément nul car il peut exister un courant de surface  $\mathbf{J}_s$  sur la surface de séparation. Ainsi, le terme de droite vaut :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{S_\diamond} \left( \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{J}_s \ell \cdot \mathbf{a}_s . \quad (3.28)$$

Quant au terme de gauche, il se limite toujours à l'intégration sur les segments  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sur lesquels les champs sont uniformes. Il faut, par contre, porter davantage attention car le résultat est vectoriel comme le montre le résultat du terme de droite. D'où :

$$\int_{\ell_1} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{a}_p dl + \int_{\ell_2} \mathbf{H}_2 \cdot (-\mathbf{a}_p) dl = \mathbf{J}_s \ell \cdot \mathbf{a}_s \quad (3.29)$$

$$\int_{\ell} \mathbf{a}_s \times \mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) dl = \mathbf{a}_s \cdot \mathbf{J}_s \ell \quad (3.30)$$

$$\mathbf{a}_s \cdot \mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \ell = \mathbf{a}_s \cdot \mathbf{J}_s \ell . \quad (3.31)$$

La dernière égalité nécessite l'application d'une identité vectorielle à savoir :  $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ . La condition aux limites de la composante du champ magnétique au plan de séparation ne doit s'utiliser que vectoriellement à moins de bien comprendre ce que l'on fait. Elle s'exprime comme suit :

$$\mathbf{a}_n \times \underset{\uparrow}{(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)} = \mathbf{J}_s . \quad (3.32)$$

Les composantes tangentielles du champ magnétique au plan de séparation sont discontinues avec la présence d'un courant de surface ; la discontinuité dépend de l'importance du courant de surface. Il serait possible d'écrire la condition aux limites sous la forme scalaire, mais s'en servir est un jeu dangereux. La voici, à titre indicatif seulement :

$$H_{\parallel 1} - H_{\parallel 2} = J_s .$$

### 3.7.3 Composante normale du champ d'induction

La composante normale correspond à la partie du vecteur du champ qui est normale à la surface de séparation. Si le plan de séparation est  $z = 0$  alors, la composante en  $z$  est la seule normale. Quoiqu'il s'agisse d'un exemple, le lieu des composantes tangentielles a toujours deux dimensions (un plan) tandis que celui des normales n'en a qu'une.

La condition aux limites de la composante normale du champ d'induction s'obtient de l'équation de *Gauss* sur la surface  $S_{\blacksquare}$  définie auparavant :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_{S_{\blacksquare}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.33)$$

Il est évident que l'intégrale de surface se limite aux deux surfaces parallèles au plan de séparation  $S_{\blacksquare 1}$  et  $S_{\blacksquare 2}$  qui sont, par ailleurs, égales en superficie. Comme les champs sont uniformes sur ces surface, le membre de gauche devient :

$$0 = \iint_{S_{\blacksquare 1}} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{a}_n dS + \iint_{S_{\blacksquare 2}} \mathbf{B}_2 \cdot (-\mathbf{a}_n) dS \quad (3.34)$$

$$= B_{\perp 1} S_{\blacksquare} - B_{\perp 2} S_{\blacksquare} . \quad (3.35)$$

En conséquence, la composante normale du champ d'induction au plan de séparation, notées  $B_{\perp 1,2}$  dans le milieu #1 et #2 respectivement, est continue. La condition aux limites de  $\mathbf{B}$  s'écrit :

$$B_{\perp 1} - B_{\perp 2} = 0 \quad (3.36)$$

ou vectoriellement :

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 . \quad (3.37)$$

### 3.7.4 Composante normale du champ de déplacement

Il est facile de déduire que la dernière loi de *Maxwell* – celle de *Gauss* sur les charges électriques – servira pour établir la condition aux limites sur la composante normale du champ de déplacement. La surface fermée  $S_{\blacksquare}$  servira aussi comme dans la sous-section précédente.

Cependant, lorsque l'épaisseur du volume  $\delta$  tend vers zéro, la charge à l'intérieur du volume infinitésimal peut être non-nulle s'il s'agit d'une densité surfacique de charges présent à la surface de séparation. Donc :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_{S_{\blacksquare}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_s S_{\blacksquare} . \tag{3.38}$$

L'intégration du terme de gauche sur les surfaces parallèles au plan de séparation  $S_{\blacksquare 1,2}$ , égales en superficie et sur lesquelles les champs sont uniformes, donne :

$$D_{\perp 1} S_{\blacksquare} - D_{\perp 2} S_{\blacksquare} = \rho_s S_{\blacksquare} . \tag{3.39}$$

Contrairement à la condition aux limites de la composante du champ d'induction, la condition aux limites du champ de déplacement peut très bien s'utiliser sous forme scalaire car le résultat est un scalaire. Elle s'écrit alors :

$$D_{\perp 1} - D_{\perp 2} = \rho_s . \tag{3.40}$$

ou vectoriellement :

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s . \tag{3.41}$$

La composante normale du champ de déplacement ne sera continue qu'en l'absence de charges surfaciques sur la surface de séparation.

### 3.7.5 Résumé des conditions aux limites

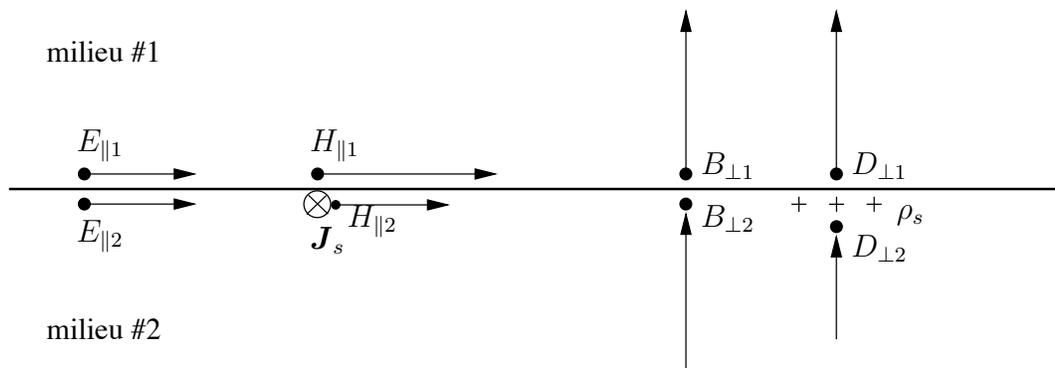


FIGURE 3.10 – Composantes des champs à l'interface entre deux matériaux quelconques.

En résumé, les quatre conditions s'expriment comme suit :

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (3.42)$$

$$\mathbf{a}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (3.43)$$

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (3.44)$$

$$\mathbf{a}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s. \quad (3.45)$$

Le vecteur unitaire  $\mathbf{a}_n$  est normal à la surface de séparation. L'indice des champs correspond au milieu dans lequel les champs sont mesurés, et ce juste au niveau de la surface de séparation.

### 3.7.6 Propriétés supplémentaires

Il est important de rajouter qu'en pratique un courant de surface n'est rencontré que sur un conducteur parfait. Il en va de même pour les charges surfaciques. Cela s'explique facilement car pour obtenir un courant ou des charges sur une surface infiniment mince, les charges doivent être libres. Idéalement, il faut donc une conductivité infinie pour avoir une mobilité des charges avec entière liberté. On considère toutefois qu'un bon conducteur ayant une conductivité élevée mais finie ( $\sigma \gg \gg$ ), est assimilable à un conducteur parfait tant que la perte d'énergie provenant de l'effet *Joule* reste faible devant l'énergie contenue dans les champs. Le rapport maximal toléré entre les deux niveaux d'énergies, dépend du degré de précision sur la valeur des champs que l'on désire. En pratique, les charges et courants sont toujours répartis dans des volumes non infinitésimaux. Les courants sont donc toujours volumiques et les quantités surfaciques ou linéiques n'existent formellement pas. Il s'agit cependant d'approximations qui peuvent s'avérer très pratiques pour simplifier les problèmes mathématiques lorsque les volumes en jeu sont très petits. Ces approximations sont similaires à l'utilisation de l'impulsion de *Dirac* pour représenter une grande quantité dans une dimension infinitésimale qui n'est jamais en réalité totalement nulle. Le cas des conducteurs parfaits est une telle approximation. Si d'autres situations supposant l'utilisation de tels courants ou de telles charges sont nécessaires, elles seront mentionnées clairement.

Une autre propriété apparaît pour des conducteurs parfaits, soit l'absence de champ électrique à l'intérieur. L'explication est la suivante : avec une conductivité infinie  $\sigma \rightarrow \infty$ , la densité de courant – et le courant par conséquent – deviendrait infinie ce qui n'est pas possible. Il en résulte que le champ  $E$  dans un conducteur parfait doit être nul<sup>7</sup>. Encore une fois, un bon conducteur possède cette propriété si l'observation du champ se fait à une distance plus grande – selon la précision voulue – que la profondeur de pénétration  $\delta_p$  – laquelle sera définie plus tard. On peut aller plus loin et dire qu'il n'existe aucun champ variant dans un conducteur à cause du couplage entre les champs électromagnétiques.

<sup>7</sup>Cette conclusion est tirée de (2.14)  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , avec  $\sigma \rightarrow \infty$  et une densité  $J$  finie (même nulle selon la première propriété énoncée car uniquement  $\mathbf{J}_s$  existe).

Dans certains matériaux ferromagnétiques, la perméabilité relative  $\mu_r$  est très grande, ce qui permet de poser en première approximation que  $\mu_r \rightarrow \infty$  – ils seront appelés des conducteurs magnétiques parfaits. Comme le champ d'induction  $B$  ne peut être infini, il faut donc que le champ magnétique  $H$  soit nul dans le matériau.

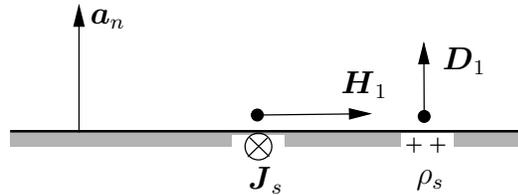


FIGURE 3.11 – Composantes des champs incidents sur un conducteur.

En appliquant les conditions aux limites, on a :

- sur un conducteur électrique :

Le champ  $\mathbf{E}$  au niveau de la surface de séparation dans l'autre milieu (le #1) arrive toujours perpendiculairement à cette surface ; le champ  $H$ , si variant, est tangentiel et responsable de la création d'un courant de surface. La figure 3.11 démontre l'incidence des champs sur un conducteur.

$$\mathbf{a}_n \times \mathbf{E}_1 = 0 \tag{3.46}$$

$$\mathbf{a}_n \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s \tag{3.47}$$

$$\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \tag{3.48}$$

$$\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_s \tag{3.49}$$

Les conditions aux limites sont dites dures<sup>8</sup> – en opposition à molles – lorsque l'un des deux milieux est un conducteur électrique. On rencontre fréquemment cette situation, d'où son importance.

- sur un conducteur magnétique :

Le champ  $\mathbf{H}$  dans l'autre milieu (le #1) est toujours perpendiculaire à la surface de séparation.

$$\mathbf{a}_n \times \mathbf{H}_1 = 0 \tag{3.50}$$

Un matériau diélectrique parfait possède une conductivité nulle ; le courant, volumique ou surfacique, ne peut circuler. De plus, aucune charge libre sauf si le diélectrique est ionisé en surface. À l'interface d'un diélectrique, les conditions aux limites s'appliquent en prenant les densités  $\mathbf{J}_s$  et, normalement,  $\rho_s$  nulles. Par contre, les champs électromagnétiques pénètrent très bien. L'analyse par le champ électrique montre que sa composante tangentielle conserve la même valeur, mais la composante normale change dans le rapport des constantes diélectriques des deux milieux – ce sont les composantes normales de  $\mathbf{D}_{1,2}$

<sup>8</sup>Le terme provient de la réflexion d'une onde sur une corde. Si la corde est solidement attachée à un mur, elle ne peut bouger et l'onde réfléchie doit être à  $180^\circ$ . La réflexion est dite dure.

qui sont continues. Ceci amène directement le phénomène de changement d'inclinaison d'une onde électromagnétique (optique autant que radio) passant par une lentille de verre par exemple.

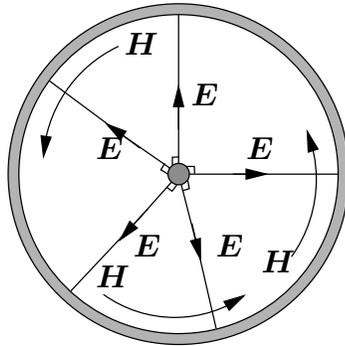


FIGURE 3.12 – Représentation des champs dans la section d'un câble coaxial.

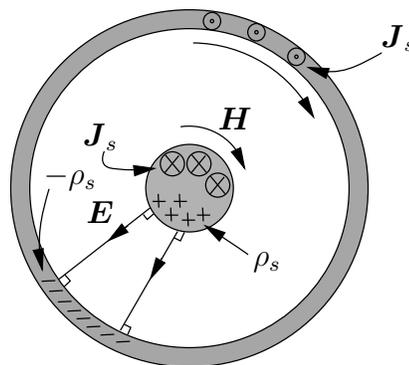


FIGURE 3.13 – Charges, différence de potentiel et courants dans un câble coaxial.

Rien de mieux qu'une image tirée d'un exemple connu pour se rappeler la manière dont les champs doivent être incidents sur un conducteur. Dans un câble coaxial, les champs sont contenus entre les deux conducteurs, dans le diélectrique. Le champ électrique est radial ( $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{a}_r$  en coordonnées cylindriques) et le champ magnétique est circulaire ( $\mathbf{H} = H(r)\mathbf{a}_\phi$ ). On voit bien sur la figure 3.12, que le champ électrique est toujours à angle droit avec la surface du conducteur ; et que le champ magnétique est parallèle à la surface du conducteur lorsque  $r = a$  et  $r = b$ . Sur la figure 3.13, des charges de signes opposés existent sur chacune des surfaces en cause des conducteurs selon la condition aux limites sur le champ de déplacement. Une différence de potentiel apparaît à cause de ces charges, différence de potentiel dont la valeur est donnée par  $V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ . L'application de la condition aux limites sur la composante tangentielle du champ magnétique explique le courant de surface qui s'en va vers la charge sur le conducteur interne et qui revient sur le conducteur externe.

**Exemple 3.5**

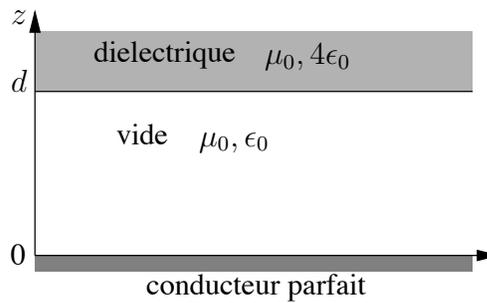


FIGURE 3.14 – Géométrie pour l’application des conditions aux limites.

Des champs électromagnétiques variants s’expriment ainsi dans la région  $0 < z < d$  et à un certain temps  $t$  :

$$\mathbf{E}_v = E_1 \sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi z}{2d}\right) \mathbf{a}_x + E_2 \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi z}{2d}\right) \mathbf{a}_y + E_3 \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right) \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H}_v = H_1 \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi z}{2d}\right) \mathbf{a}_x + H_2 \sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi z}{2d}\right) \mathbf{a}_y + H_3 \cos(\pi x) \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) \mathbf{a}_z .$$

L’espace est divisé en trois régions tel que sur la figure 3.14 :

- un conducteur parfait pour  $z < 0$  ;
  - le vide lorsque  $0 < z < d$  ;
  - un diélectrique parfait ayant  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$  et  $\epsilon = 4\epsilon_0$  pour  $z > d$ .
- Déterminez  $\rho_s$  et  $\mathbf{J}_s$  sur la surface du conducteur en  $z = 0$  et indiquez les termes des champs – les  $E_i$  et les  $H_i$  – qui doivent être nuls à cause des conditions dures.

Des équations (3.46) à (3.49), on déduit respectivement :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{a}_z \times [\mathbf{E}]_{z=0} \\ &= \underbrace{[E_1 \sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi z}{2d}\right)]_{z=0}}_{0 \text{ car } \sin(0)=0} (\mathbf{a}_y) + \underbrace{[E_2 \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi z}{2d}\right)]_{z=0}}_{E_2 \cos(\pi x) \text{ car } \cos(0)=1} (-\mathbf{a}_x) \end{aligned}$$

donc forcément :

$$E_2 = 0 .$$

D’autre part, avec la seconde équation aux limites, on a :

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_s]_{z=0} &= \mathbf{a}_z \times [\mathbf{H}]_{z=0} \\ &= \underbrace{[H_1 \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi z}{2d}\right)]_{z=0}}_{H_1 \cos(\pi x)} (\mathbf{a}_y) + \underbrace{[H_2 \sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi z}{2d}\right)]_{z=0}}_0 (-\mathbf{a}_x) \end{aligned}$$

puis, de la troisième :

$$0 = \mathbf{a}_z \cdot \mu_o [\mathbf{H}]_{z=0} = \mu_o \underbrace{[H_3 \cos(\pi x) \sin(\frac{\pi z}{d})]_{z=0}}_0$$

de laquelle on ne peut rien conclure. De la dernière, on retire :

$$\begin{aligned} [\rho_s]_{z=0} &= \mathbf{a}_z \cdot \epsilon_o [\mathbf{E}]_{z=0} \\ &= \epsilon_o \underbrace{[E_3 \sin(\pi x) \cos(\frac{\pi z}{d})]_{z=0}}_{E_3 \sin(\pi x)} = \epsilon_o E_3 \sin(\pi x) . \end{aligned}$$

- Exprimez les champs dans le diélectrique  $\mathbf{E}_d$  et  $\mathbf{H}_d$ , à l'interface avec le vide.

On reprend les conditions aux limites (3.42) à (3.45) avec  $z = d$ ,  $\rho_s = 0$  et  $\mathbf{J}_s = 0$  :

$$\begin{cases} [E_{dx}]_{z=d^+} = [E_{vx}]_{z=d^-} = E_1 \sin(\pi x) & \text{car } \sin(\pi/2) = 1 \\ [E_{dy}]_{z=d^+} = [E_{vy}]_{z=d^-} = 0 & \text{car } E_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [H_{dx}]_{z=d^+} = [H_{vx}]_{z=d^-} = 0 & \text{car } \cos(\pi/2) = 0 \\ [H_{dy}]_{z=d^+} = [H_{vy}]_{z=d^-} = H_2 \sin(\pi x) & \text{car } \sin(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu_o [H_{dz}]_{z=d^+} &= \mu_o [H_{vz}]_{z=d^-} = 0 & \text{car } \sin(\pi) = 0 \\ 4\epsilon_o [E_{dz}]_{z=d^+} &= \epsilon_o [E_{vz}]_{z=d^-} = -\epsilon_o E_3 \sin(\pi x) & \text{car } \cos(\pi) = -1 . \end{aligned}$$

Exprimées sous une forme plus succincte, on aboutit aux équations :

$$[\mathbf{E}_d]_{z=d^+} = E_1 \sin(\pi x) \mathbf{a}_x - \frac{E_3}{4} \sin(\pi x) \mathbf{a}_z$$

$$[\mathbf{H}_d]_{z=d^+} = H_2 \sin(\pi x) \mathbf{a}_y .$$

- Si on remplace le diélectrique par un autre conducteur parfait, donnez les modifications à apporter aux composantes  $E_i$  et  $H_i$  des champs.

On doit maintenant appliquer les conditions aux limites dures à  $z = d$ . On obtient alors :

$$0 = (-\mathbf{a}_z) \times [\mathbf{E}]_{z=d^-} = \underbrace{[E_1 \sin(\pi x) \sin(\frac{\pi z}{2d})]_{z=d}}_{E_1 \sin(\pi x)} (-\mathbf{a}_y)$$

car  $E_2$  est déjà égal à zéro. Cette expression implique maintenant que :

$$E_1 = 0$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{J}_s]_{z=d} &= (-\mathbf{a}_z) \times [\mathbf{H}]_{z=d^-} \\
 &= \underbrace{[H_1 \cos(\pi x) \cos(\frac{\pi z}{2d})]_{z=d^-}}_0 (-\mathbf{a}_y) + \underbrace{[H_2 \sin(\pi x) \sin(\frac{\pi z}{2d})]_{z=d^-}}_{H_2 \sin(\pi x)} (\mathbf{a}_x) \\
 0 &= (-\mathbf{a}_z) \cdot \mu_0 [\mathbf{H}]_{z=d^-} \\
 &= \underbrace{[H_3 \cos(\pi x) \sin(\frac{\pi z}{d})]_{z=d^-}}_0 \\
 [\rho_s]_{z=d} &= (-\mathbf{a}_z) \cdot \epsilon_o [\mathbf{E}]_{z=d^-} \\
 &= \underbrace{[-\epsilon_o E_3 \sin(\pi x) \cos(\frac{\pi z}{d})]_{z=d^-}}_{\epsilon_o E_3 \sin(\pi x)} .
 \end{aligned}$$

Aucune information supplémentaire ne peut être extraite des trois dernières égalités en ce qui concerne les composantes des champs. On connaît cependant les expressions du courant de surface et de la densité surfacique de charges sur ce deuxième conducteur.

---

## Exercices

### Question 1

Soit le champ d'induction :

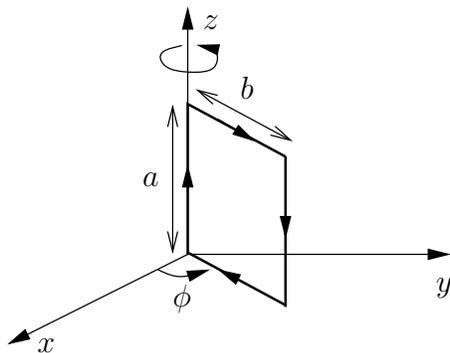
$$\mathbf{B} = B_o y \sin(\omega t) \mathbf{a}_x - B_o x \cos(\omega t) \mathbf{a}_y \text{ Wb/m}^2 .$$

Évaluez la force électromotrice induite autour du parcours fermé rectangulaire suivant les coordonnées de  $(0, 0, 0)$  à  $(1, 1, 0)$  à  $(1, 1, 1)$  à  $(0, 0, 1)$  pour revenir à  $(0, 0, 0)$ .

### Question 2

Un champ d'induction s'exprime comme  $\mathbf{B} = (B_o/x) \mathbf{a}_y \text{ Wb/m}^2$  dans le plan  $xz$ . Une boucle rectangulaire rigide est placée dans le plan  $xz$  avec les coins aux coordonnées  $(x_o, 0, z_o)$ ,  $(x_o, 0, z_o + b)$ ,  $(x_o + a, 0, z_o + b)$  et  $(x_o + a, 0, z_o)$ . Si la boucle se déplace avec une vitesse constante telle  $\mathbf{v} = v_o \mathbf{a}_x \text{ m/s}$ , donnez l'expression de la *fem* induite autour de la boucle parcourue dans le sens de l'énumération des coins.

### Question 3



Une boucle rectangulaire rigide de base  $b$  et de hauteur  $a$  est perpendiculaire au plan  $xy$  et pivote autour de l'axe  $z$  par un des ses côtés à une fréquence angulaire  $\omega \text{ rad/s}$  dans le sens croissant de  $\phi$ , comme sur la figure ci-dessus ( $\phi = 0$  à  $t = 0$ ). Donnez l'expression de la *fem* induite sur le parcours fermé dans le sens des flèches pour les cas suivants du champ d'induction :

- $\mathbf{B} = B_o \mathbf{a}_y \text{ Wb/m}^2 ;$
- $\mathbf{B} = B_o (y \mathbf{a}_x - x \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \text{ Wb/m}^2 ;$
- $\mathbf{B} = B_o (x \mathbf{a}_x - y \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \text{ Wb/m}^2 .$

### Question 4

Un champ électrique  $\mathbf{E} = E_o t e^{-t^2} \mathbf{a}_z$  existe dans l'espace libre. Déterminez la valeur du courant de déplacement traversant du côté  $z^-$  au côté  $z^+$  via une surface de  $0.1 \text{ m}^2$

dans le plan  $xy$ , pour  $t = 0$  et  $t = 1$  s.

### Question 5

Une source tension connectée à un condensateur à plaques parallèles génère un champ électrique uniforme (on néglige les effets de bords) entre les plaques :

$$\mathbf{E} = 180 \sin(2\pi \times 10^6 t) \sin(4\pi \times 10^6 t) \mathbf{a}_z \text{ V/m} .$$

La surface de chacune des plaques est de  $0.1 \text{ m}^2$  tandis que l'espacement entre les deux plaques, constitué d'air, n'est que de  $2 \text{ mm}$ . En supposant que le champ électrique est nul à l'extérieur de la région directement entre les deux plaques, calculez la valeur efficace du courant fourni par la source.

*Note#1 : la valeur efficace d'un signal harmonique – sinus ou cosinus – correspond à la valeur crête divisée par  $\sqrt{2}$ .*

*Note#2 : la valeur crête d'une somme de signaux harmoniques à différentes fréquences se calcule comme la norme d'un vecteur puisque les fonctions harmoniques forment une base orthogonale.*

### Question 6

Divers types de charges sont placées, en coordonnées cartésiennes, comme suit : une charge ponctuelle de  $1 \mu\text{C}$  à  $(1, 1, -1.5)$  ; une charge linéique uniforme ayant une densité de  $2 \mu\text{C}/\text{m}$  le long d'une ligne droite partant de  $(-1, -1, -1)$  jusqu'à  $(3, 3, 3)$  ; et une charge surfacique répartie uniformément sur la surface planaire en  $x = 0$  entre les droites  $z = -1$  et  $z = 1$  avec une densité de  $-1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Déterminez le flux électrique  $[\Psi_e]_S$  émanant de la surface fermée cubique  $S$  limitée par les plans  $x = \pm 2$ ,  $y = \pm 2$  et  $z = \pm 2$ .

### Question 7

Pour chacune des distributions de charges suivantes, déterminez le flux de déplacement émanant de la surface fermée indiquée :

a)  $\rho(x, y, z) = \rho_o(x + y + z)^2$  pour  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  et  $0 < z < 1$  ;

b)  $\rho(r, \phi, z) = \rho_o \cos^2(\phi)$  pour  $0 < r < 1$ ,  $0 < \phi < \pi/2$  et  $0 < z < 1$ .

### Question 8

Soit  $\mathbf{E} = E_o \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \mathbf{a}_x \text{ V/m}$ . Déterminez le taux de variation temporelle des composantes du champ d'induction  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  au temps  $t = 10^{-8} \text{ s}$  et à la position  $(1, 1, 0.25) \text{ m}$ .

### Question 9

Soient  $\mathbf{J} = 0$  et  $\mathbf{H} = H_o e^{-(3 \times 10^8 t - z)^2} \mathbf{a}_y \text{ A/m}$ . Déterminez le taux de variation temporelle des composantes du champ de déplacement  $D_x$ ,  $D_y$  et  $D_z$  au temps  $t = 10^{-8} \text{ s}$  et à

la position  $(1, 1, 2) m$ .

### Question 10

À l'intérieur d'une petite région autour de l'origine, la densité de courant produite par le déplacement de charges, est donnée par :

$$\mathbf{J} = J_o(x^2\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y + z^2\mathbf{a}_z) A/m^2$$

où  $J_o$  est une constante. Déterminez le taux d'augmentation temporelle de la densité de charges à la position  $(0.02, 0.01, 0.01) m$ .

### Question 11

Soit le champ électrique :

$$\mathbf{E} = E_o \cos(3\pi \times 10^8 t + 0.2\pi(4x + 3z)) \mathbf{a}_y V/m .$$

Trouvez l'expression du champ d'induction qui satisfait la loi de *Faraday*.

### Question 12

Soit un champ électrique dans le vide ( $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ) :

$$\mathbf{E} = E_o e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x V/m .$$

Trouvez la condition nécessaire entre les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $\mu_o$  et  $\epsilon_o$ , qui satisfait les deux premières équations de *Maxwell*.

### Question 13

La région  $x > 0$  est constituée d'un diélectrique parfait dont la permittivité vaut  $2\epsilon_o$  tandis que la région  $x < 0$  est constituée d'un autre diélectrique parfait ayant cette fois, une permittivité  $3\epsilon_o$ . On dénote avec le sous-indice 1, les composantes des champs à la frontière de séparation mais en  $x = 0^+$  ; avec le sous-indice 2, les composantes à  $x = 0^-$ . Si  $\mathbf{E}_1 = E_o(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y) V/m$ , trouvez :

- a)  $E_{x1}/E_{x2}$  ;
- b)  $E_1/E_2$  ;
- c)  $D_1/D_2$ .

### Question 14

Le plan  $z = 0$  forme une frontière entre le vide ( $z > 0$ ) et un matériau quelconque. Trouvez :

- a)  $[\mathbf{J}_s]_{(0,0,0)}$  à  $t = 0$  si l'autre matériau est un conducteur parfait et :

$$[\mathbf{H}]_{(0,0,0^+)} = H_o(3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y) \cos(\omega t) ;$$

b)  $[\mathbf{H}]_{(0,0,0^+)}$  si l'autre matériau est un matériau magnétique ayant  $\mu = 20\mu_o$  et :

$$[\mathbf{H}]_{(0,0,0^-)} = H_o(10\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) ;$$

c) le rapport  $[B]_{(0,0,0^-)}/[B]_{(0,0,0^+)}$  avec les mêmes conditions qu'en b).

### Question 15

Deux plaques infinies parfaitement conductrices sont localisés à  $x = 0$  et  $x = 0.1 m$ . Les champs électromagnétiques dans l'espace entre les deux plaques sont décrits par :

$$\mathbf{E} = E_o \sin(10\pi x) \cos(3\pi \times 10^9 t) \mathbf{a}_z V/m$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_o}{120\pi} \cos(10\pi x) \sin(3\pi \times 10^9 t) \mathbf{a}_y A/m .$$

a) Démontrez que  $\mathbf{E}$  satisfait les conditions aux limites ;

b) déduisez la densité de courant de surface sur les deux plaques.

### Réponses :

1.  $fem = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega B_o \cos(\omega t + \pi/4) V.$

2.  $fem = B_o b v_o \left( \frac{1}{x_o + v_o t} - \frac{1}{x_o + a + v_o t} \right) V$

3. a)  $fem = B_o a b \omega \sin(\omega t) V$  ; b)  $[\Psi]_s = -\frac{1}{2} B_o (a b^2)$ ,  $fem = 0$

c)  $[\Psi]_s = -B_o (a b^2) \sin(\phi) \cos(\phi)$ ,  $fem = B_o (a b^2) (\omega \cos^2(\omega t) - \omega \sin^2(\omega t)) V.$

4.  $[I_d(t=0)]_s = 0.1\epsilon_o E_o A$ ,  $[I_d(t=1)]_s = -0.1e^{-1}\epsilon_o E_o A.$

5.  $I = 1.118 mA_{rms}.$

6.  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 3.3923 \mu C.$

7. a)  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{5}{2}\rho_o$  ; b)  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{8}\rho_o.$

8.  $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial B_y}{\partial t} = 2\pi E_o$ ,  $\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0.$

9.  $\frac{\partial D_x}{\partial t} = -0.7358 H_o$ ,  $\frac{\partial D_y}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial D_z}{\partial t} = 0.$

10.  $-0.08 J_o (C/m^3)/s.$

11.  $\mathbf{B} = \frac{E_o}{3 \times 10^8} (0.6\mathbf{a}_x - 0.8\mathbf{a}_z) \cos(3\pi \times 10^8 t + 0.2\pi(4x + 3z)) Wb/m^2.$

12.  $\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu_o \epsilon_o.$

13. a) 1.5 ; b)  $3/\sqrt{5}$  ; c)  $2/\sqrt{5}.$

14. a)  $[\mathbf{J}_s(t=0)]_{(0,0,0)} = H_o(4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y)$  ;

b)  $[\mathbf{H}]_{(0,0,0^+)} = 10H_o(\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_z)$  ; c) 8.989 .

15. a)  $[E_z]_{x=0} = 0$  et  $[E_z]_{x=0.1} = 0$  donc les composantes tangentielle sont bien nulles ;

b)  $[\mathbf{J}_s]_{x=0} = -[\mathbf{J}_s]_{x=0.1} = \frac{E_o}{120\pi} \sin(3\pi \times 10^9 t) \mathbf{a}_z.$

# Chapitre 4

## Statique et Quasi-statique

### 4.1 introduction

Lorsqu'on parle de statique, le terme est sans équivoque. Il n'y a aucune variation temporelle des entités physiques. On peut voir le cas statique comme un cas particulier de la dynamique. C'est exactement la manière d'aborder la chose ici, en électromagnétisme : les nouvelles équations de *Maxwell* s'obtiennent en annulant toutes les dérivées par rapport au temps. Cependant, l'histoire des découvertes en électromagnétisme n'a pas suivi cette approche, qu'on peut qualifier de plus académique.

Le terme quasi-statique est un peu plus ambigu. En fait, on considère le cas de fréquences relativement basses. Jusqu'où ? Cela dépend de plusieurs facteurs mais l'idée est la suivante :

- les champs électriques et magnétiques découplés

En statique, il est clair que ces deux quantités semblent sans lien : longtemps on a cru en deux forces distinctes. Les deux premières équations de *Maxwell* montrent bien que tel n'est pas le cas avec des signaux variant dans le temps.

- les dérivées par rapport au temps faibles

Les variations temporelles sont dépendantes de la fréquence : la dérivée augmentent dans le même rapport que la fréquence. Aux basses fréquences, les dérivées dans le temps sont suffisamment faibles pour que le comportement des champs ressemble à celui obtenu en statique.

- seul le terme du premier ordre en  $\omega$  retenu

Les solutions peuvent être obtenus de manière itérative en prenant les deux premières équations de *Maxwell*, l'une après l'autre e.g. de  $\mathbf{B}$ , on trouve  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{D}$ ) avec *Faraday*; puis de  $\mathbf{D}$ , on trouve  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{B}$ ) avec *Ampère*. À chaque itération, la dérivée fait naître un terme de puissance supérieure en  $\omega$ . On ne considère que la première passe de ce processus en quasi-statique, plutôt que de continuer vers une série infinie qui converge vers la solution électromagnétique<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Il vaut mieux déduire la solution électromagnétique en solutionnant une équation aux différentielles partielles du deuxième ordre obtenue par combinaison des deux premières équations de *Maxwell*. C'est le protocole suivi dans le prochain chapitre.

## 4.2 Applications directes aux champs statiques

Les quatre équations de *Maxwell* se résument ainsi lorsque  $\frac{d}{dt} = 0$  :

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{4.1}$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = [I_c]_s = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{4.2}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv \tag{4.3}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{4.4}$$

tandis que celle de continuité devient :

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \tag{4.5}$$

On voit immédiatement le découplage des champs électrique et magnétique. L'équation (4.1) indique que le champ électrique est maintenant conservatif : l'intégrale de ligne est une fonction des points de départ et d'arrivée mais est indépendante du parcours suivi. Avec (4.2), on remarque que le champ magnétique statique est créé uniquement par le déplacement de charges libres. Pas de courant de déplacement car il n'y a aucune variation de la charge dans le temps, propriété aussi indiquée par (4.5). Le courant de convection ou de conduction  $[I]_s$  existe au travers une boucle fermée.

L'utilisation la plus simple et la plus directe des équations de *Maxwell* statiques consiste à dériver l'expression des champs statiques. Dans certaines conditions où il est possible de se servir des symétries, les intégrales se simplifient. Il suffit de bien choisir la surface ou le parcours d'intégration, analyser la géométrie et faire ressortir des produits scalaires nuls (angle droit entre les deux vecteurs) ou maximum (angle nul). Souvent le travail de calcul se réalise rapidement si le travail de réflexion a été bien mené.

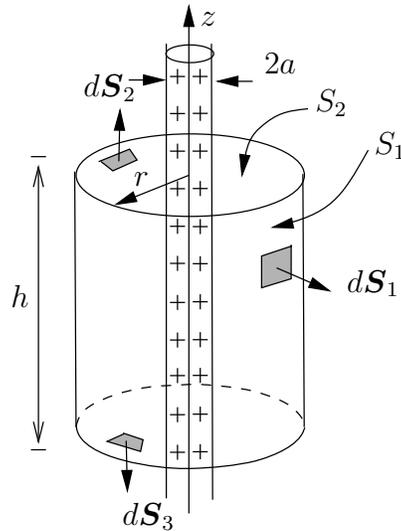
Rien de mieux que quelques exemples pour se fixer les idées. On s'apercevra que les équations les plus employées dans ce genre d'opération sont celles ayant un membre de droite non-nul ; les autres mènent à la solution triviale ou servent simplement à confirmer l'absence de certaines composantes des champs provoquée par la symétrie.

**Exemple 4.1**

Un fil infini de rayon  $a$  est chargé uniformément avec une densité volumique  $\rho_o C/m^3$  comme sur la figure 4.1.

- Exprimez le champ électrique dans le vide à une distance  $r$  du centre du fil.

Il y a lieu de se servir de la symétrie de fil pour choisir une surface fermée car on parle de charge électrique. La meilleure est une surface constituée d'un cylindre  $S_1$  de longueur  $h$  centrée sur l'axe  $z$ , fermé aux deux extrémités à

FIGURE 4.1 – Géométrie d'analyse du champ  $\mathbf{E}$  d'un fil infini chargé uniformément.

$z = 0$  et  $z = h$  par des surfaces planes  $S_2$  et  $S_3$ . On se servira de l'équation (4.3).

La charge emmagasinée dans le volume délimitée par la surface vaut :

$$\begin{aligned} Q &= \int_{r=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \rho_o r \, dz dr d\phi \\ &= \pi a^2 h \rho_o \quad \text{pour } r \geq a \end{aligned}$$

sinon il faudra limiter l'intégration sur  $r$  et obtenir :

$$Q = \pi r^2 h \rho_o \quad \text{pour } r < a .$$

Seconde étape : solutionner le coté gauche de l'égalité dans lequel on retrouve l'inconnu à déterminer. Par une analyse rapide qui utilise les connaissances acquises, le flux électrique au travers les surfaces  $S_2$  et  $S_3$  est nul car le champ  $\mathbf{E}$  est radial donc orthogonal à la normale de ces surfaces. L'équation (4.1) sur des trajets judicieusement déterminés démontre que seule la composante  $E_r$  est non-nulle. De plus, partout sur le cylindre  $S_1$  – dont la normale est aussi radiale –, le flux électrique est maximal et uniforme : chaque point de la surface est à égale distance du fil. En conséquence, on a :

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \underbrace{\iint_{S_{2,3}} D_r \mathbf{a}_r \cdot (\pm dS \mathbf{a}_z)}_0 + \iint_{S_1} D_r \mathbf{a}_r \cdot dS \mathbf{a}_r \\ &= D_r \iint_{S_1} dS \\ &= 2\pi r h D_r \end{aligned}$$

En rapprochant les deux termes, on arrive à :

$$D_r = \begin{cases} \frac{a^2 \rho_o}{2r} & r \geq a \\ \frac{r \rho_o}{2} & r < a \end{cases}$$

d'où finalement :

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{a^2 \rho_o}{2\epsilon_o r} \mathbf{a}_r & r \geq a \\ \frac{r \rho_o}{2\epsilon_o} \mathbf{a}_r & r < a \end{cases}$$

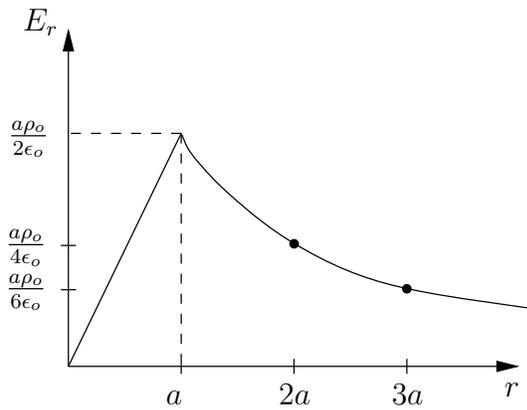


FIGURE 4.2 – Champ  $E_r(r)$  produit par un fil infini chargé uniformément.

La variation du champ  $E_r$  selon  $r$  est tracée sur la figure 4.2.

**Exemple 4.2**

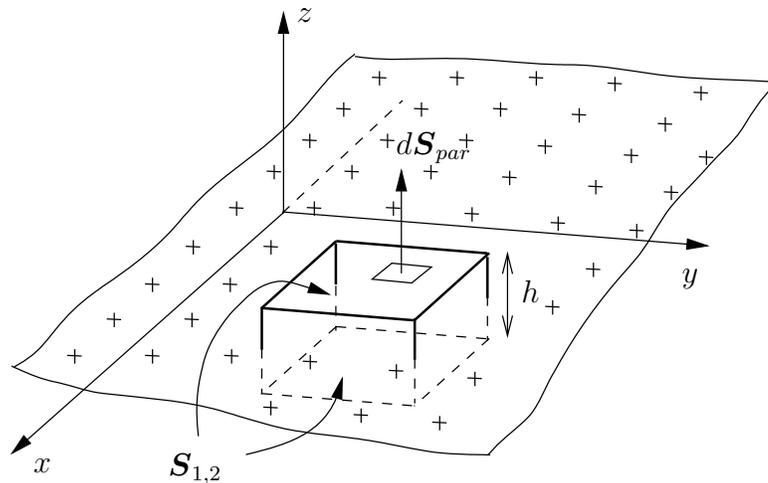


FIGURE 4.3 – Géométrie d'analyse du champ  $\mathbf{E}$  d'un plan infini chargé uniformément.

Une densité surfacique uniforme de charges  $\rho_{so} C/m^2$  existe dans le plan  $z = 0$ .

- Exprimez le champ électrique dans le vide à une distance  $z$  du plan.

Ici, on répète les mêmes étapes que dans l'exemple précédent mais en prenant comme surface fermée  $S$  celle d'une boîte rectangulaire placée de part et d'autre du plan  $z = 0$  comme sur la figure 4.3. Par symétrie, le champ  $\mathbf{E} = \pm E_z \mathbf{a}_z$ ,  $z \gtrless 0$  donc pas de flux électrique sortant par les surfaces latérales, seulement sur les deux surfaces parallèles  $S_{par_{1,2}}$  au plan de dimension  $A$  chacune. De plus, le champ est pareil en tout point sur ces surfaces. Ainsi :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dv$$

$$D_z \iint_{S_{par_1}} dx dy + D_z \iint_{S_{par_2}} dx dy = \rho_{so} A$$

$$2 D_z A = \rho_{so} A$$

d'où :

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_{so}}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z & z > 0 \\ -\frac{\rho_{so}}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z & z < 0 \end{cases}$$

Le résultat correspond bien à celui obtenu dans l'exemple 2.2.

### Exemple 4.3

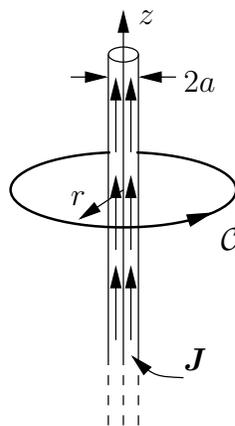


FIGURE 4.4 – Géométrie d'analyse du champ  $\mathbf{H}$  d'un fil infini parcouru par un courant de densité uniforme.

Un courant circule dans un fil infini de rayon  $a$  centré sur l'axe  $z$  représenté sur la figure 4.4. La densité de courant uniforme est donnée par  $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{a}_z A/m^2$ .

- Exprimez le champ magnétique à une distance  $r$  du centre du fil.

D'abord, la symétrie selon  $z$  convainc facilement de l'absence de la composante axiale :  $B_z = 0$ . L'intégrale de Gauss magnétique sur un cylindre  $S_1$  fermé par

les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , centré, de hauteur  $h$  et de rayon  $a$  (voir figure 4.1), démontre que la composante radiale du champ magnétique est nulle :

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \underbrace{\int_{S_{2,3}} \mathbf{B} \cdot (\pm dS \mathbf{a}_z)}_0 + \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot dS \mathbf{a}_r \\ &= \mathbf{B} \cdot dS \mathbf{a}_r . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\mathbf{B}$  n'a pas de composante radiale non plus :  $B_r = 0$ . Reste la composante angulaire  $H_\phi$ .

On choisit maintenant un parcours fermé  $\mathcal{C}$  qui saura renseigner sur la valeur de  $H_\phi$ . Idéalement, chaque point devrait se trouver à égale distance du fil et exploiter la symétrie angulaire du fil. Le parcours décrit un cercle de rayon  $r$  centré sur l'axe  $z$ . On obtient de l'intégrale d'Ampère (4.2) :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \begin{cases} \int_{r=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} J_z r d\phi dr & r \geq a \\ \int_{r=0}^r \int_{\phi=0}^{2\pi} J_z r d\phi dr & r < a \end{cases} \\ H_\phi 2\pi r &= \begin{cases} J_o \pi a^2 & r \geq a \\ J_o \pi r^2 & r < a \end{cases} \end{aligned}$$

Le champ magnétique s'exprime :

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{J_o a^2}{2r} \mathbf{a}_\phi & r \geq a \\ \frac{J_o r}{2} \mathbf{a}_\phi & r < a \end{cases}$$

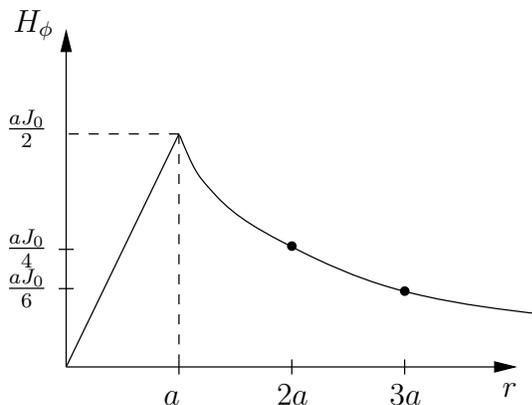


FIGURE 4.5 – Champ  $H_\phi(r)$  produit par un fil infini parcouru par un courant de densité uniforme.

La variation du champ  $H_\phi$  selon  $r$  est tracée sur la figure 4.5.

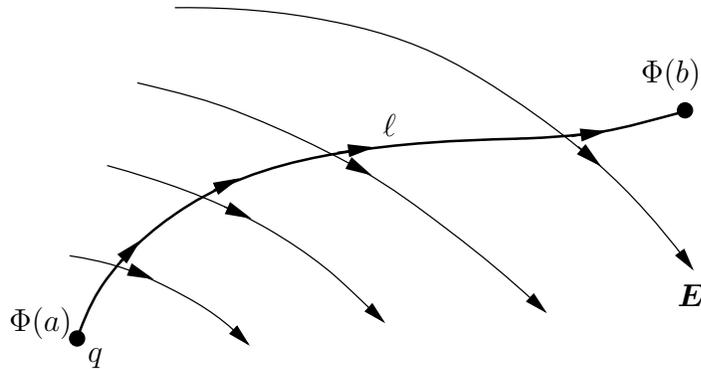


FIGURE 4.6 – Travail nécessaire pour déplacer une charge test dans un champ électrique.

### 4.3 Voltage et potentiel

Lorsqu'une charge électrique  $q$  se déplace dans un champ électrique suivant un parcours  $\ell$ , un certain travail est fourni par le champ lui-même. En effet, à chaque point du parcours, le champ exerce une force sur la charge donc un travail doit être fait pour l'amener à l'autre point adjacent du parcours. Le travail nécessaire pour se rendre du point  $a$  au point  $b$  suivant  $\ell$  de la figure 4.6 vaut donc :

$$W_{ab} = q \int_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (4.6)$$

#### 4.3.1 Voltage et potentiel scalaire

Le voltage représente la quantité de travail par unité de charge accomplie :

$$V_{ab} = \int_{a,\ell}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (4.7)$$

Dans les cas statiques, le voltage est indépendant du parcours, ce qui revient à dire que la circulation est nulle. Le preuve physique est immédiate car, dans un parcours fermé,  $a$  et  $b$  coïncident et deux sondes d'oscilloscope branchées sur le même point devraient observer un signal identique même si les parcours (décrits par les cables) sont différents.

Pour un champ électrique variant dans le temps, l'intégrale sur un parcours fermé devient non-nulle signifiant qu'un travail par unité de charge est fait par le champ sur la charge afin de lui faire parcourir le trajet. C'est la force électromotrice *fem*.

#### Exemple 4.4

Soit une charge de  $3\mu C$  qui se déplace dans un champ électrique donné par :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = z\mathbf{a}_y + y\mathbf{a}_z .$$

- Calculez le travail fourni pour amener la charge du point  $a(0, 0, 0)$  au point  $b(0, 1, 1)$  le long du trajet parabolique décrit par  $z = y^2$ .

Avant de commencer, on pourrait vérifier si l'expression du champ donné est bien celle d'un champ électrique statique. Pour ce faire, il faut remplir deux conditions. D'abord, le temps ne doit pas intervenir ; ce qui est le cas. Ensuite, il faut que le champ soit conservatif puisque, selon l'équation de *Faraday*,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  en statique. La vérification permet d'affirmer que l'expression remplit les exigences du champ électrique statique.

De (4.6), on obtient :

$$\begin{aligned} W_{ab} &= (3 \times 10^{-6}) \int_{\mathcal{C}(0,0,0)}^{(0,1,1)} z \mathbf{a}_y + y \mathbf{a}_z \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z) \\ &= (3 \times 10^{-6}) \left( \int_0^1 z dy + \int_0^1 y dz \right) = (3 \times 10^{-6}) \left( \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 \sqrt{z} dz \right) \\ &= (3 \times 10^{-6}) \left( \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{2z^{3/2}}{3} \right]_0^1 \right) \\ &= 3 \mu J. \end{aligned}$$

On obtiendrait un résultat identique en intégrant sur tout autre parcours, e.g.  $z = y$ .

Le voltage peut aussi être déduit des mathématiques. On sait que le champ  $\mathbf{E}$  statique est conservatif car son intégrale de ligne est nulle pour un parcours fermé. La preuve vient de l'équation de *Faraday* sous la forme différentielle, dans laquelle la dérivée par rapport au temps de  $\mathbf{B}$  est nulle. Or, le rotationnel d'un gradient est toujours nul. Ce qui amène à dire que le champ  $\mathbf{E}$  statique correspond à un gradient d'une fonction qui est le voltage :

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 = \nabla \times \nabla V$$

donc

$$\mathbf{E} = - \underset{\uparrow}{\nabla} V. \tag{4.8}$$

On aurait pu utiliser le théorème de *Stoke* pour trouver la même chose. Le signe négatif veut simplement faciliter la relation entre le voltage et la différence de potentiel définie ci-après.

On peut généraliser la notion pour introduire la fonction de potentiel  $\Phi$  valide en statique, quasi-statique mais aussi pour des signaux variant dans le temps. Elle s'apparente à un champ dans la mesure où elle est une fonction de l'espace, e.g.  $\Phi(x, y, z)$  en coordonnées cartésiennes.

Sa démonstration mathématique est un peu plus difficile que celle du voltage quoiqu'elle y ressemble. Tout débute avec l'équation de *Gauss* sur les charges magnétiques écrite sous forme différentielle. On sait que la divergence d'un rotationnel est toujours nul. Ainsi  $\mathbf{B}$  est égal au rotationnel d'une fonction qui est appelée le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

donc :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (4.9)$$

Le potentiel vecteur n'a aucun sens physique, c'est un être purement mathématique. Son seul avantage réside lors des calculs de rayonnement. Utilisant (4.9) dans l'équation de *Faraday* (3.16), il en découle que :

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{d \nabla \times \mathbf{A}}{dt} \quad (4.10)$$

$$0 = - \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{d \mathbf{A}}{dt} \right) . \quad (4.11)$$

On est maintenant rendu, à un point similaire avec le voltage car le rotationnel d'un gradient est toujours nul, d'où :

$$\mathbf{E} + \frac{d \mathbf{A}}{dt} = - \underset{\uparrow}{\nabla} \Phi . \quad (4.12)$$

La fonction  $\Phi$  est le potentiel scalaire ou plus simplement, le potentiel. Il représente la quantité de travail par unité de charge demandée pour amener une charge test  $q$  de l'infini – où on assume un potentiel nul – jusqu'au point  $(x, y, z)$ .

Lorsque  $d\mathbf{A}/dt$  tend vers zéro comme en statique et quasi-statique, les deux quantités  $V$  et  $\Phi$  sont confondues. Tout se résume à :

$$V_{ab} = \Phi_b - \Phi_a . \quad (4.13)$$

On comprend pourquoi sont appelés indifféremment voltage et différence de potentiel<sup>2</sup>.

### 4.3.2 Équipotentielle

La relation  $V = \text{cte}$  définit une surface dans un espace en 3 dimensions – une courbe dans un espace à 2 dimensions. Cette surface est une équipotentielle : tout point sur cette surface a le même potentiel.

Or, le gradient d'une fonction est un vecteur qui pointe dans la direction de la plus forte pente de la fonction au point considéré ; son amplitude vaut justement la grandeur de cette pente maximale. Un skieur qui voudrait atteindre une vitesse instantanée maximale, suivrait une trajectoire qui représenterait le gradient négatif – il descend – du relief de la montagne. Dans l'analogie du skieur, les équipotentielles correspondent aux courbes de niveau de la montagne que l'on voit sur une carte topographique. Selon (4.8), le champ  $\mathbf{E}$  statique ou quasi-statique est aussi ce vecteur issu d'un gradient – le voltage ; il dépend donc de la variation du voltage dans l'espace.

Il en résulte que les équipotentielles et les lignes de champ électrique se coupent à angle droit ( $\mathbf{a}_n \times \nabla \Phi = 0$  avec  $\mathbf{a}_n$ , le vecteur unitaire perpendiculaire à l'équipotentielle) comme le montre la figure 4.7.

<sup>2</sup>Attention, les termes de potentiel, voltage ou tension désignent tous la même quantité physique en statique ou quasi-statique ; le potentiel ou potentiel scalaire de (4.12) est la notion plus générale qui reste toujours valide.

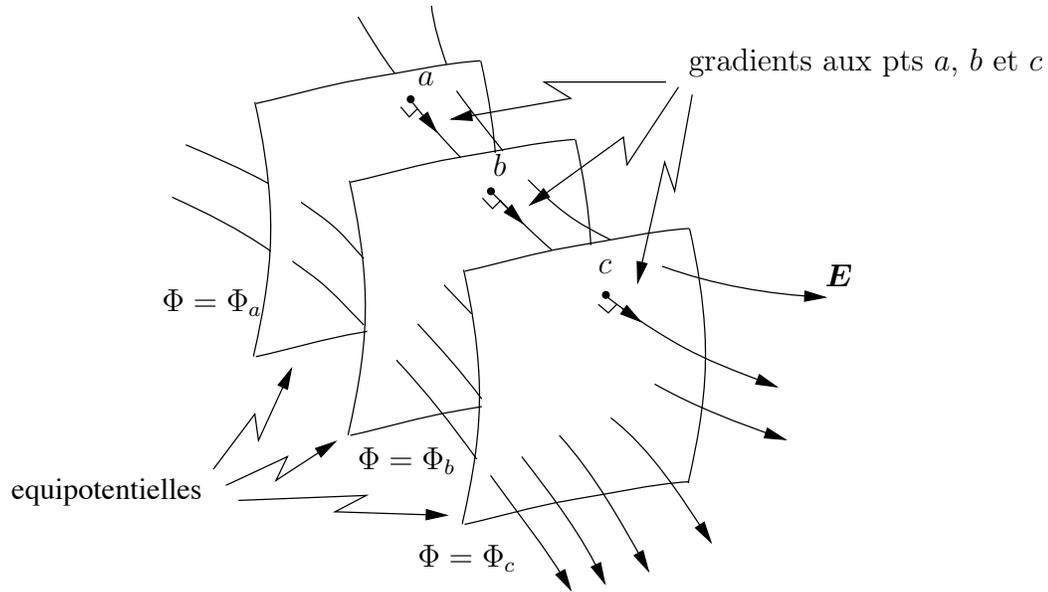


FIGURE 4.7 – Équipotentielles, gradient du potentiel et lignes de champ électrique.

**Exemple 4.5**

Une charge  $Q$  est placée dans un diélectrique de permittivité  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ .

- Si le potentiel est nul à l’infini, exprimez le potentiel à une distance  $r$  de la charge.

On peut supposer que la charge est au centre d’un système de coordonnées sphériques, ceci facilite les mathématiques. Il faut d’abord exprimer le champ électrique produit par la charge. Plusieurs possibilités s’offrent : passer par la loi de Gauss sur les charges électriques, ou utiliser directement l’expression découlant de la définition du champ électrique (2.3). Quoi qu’il en est, on obtient :

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_R .$$

De (4.8), on s’intéresse à la seule composante non-nulle du gradient en coordonnées sphériques, la composante radiale car  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r$ , pour aboutir à :

$$\frac{dV}{dr} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} .$$

L’intégrale indéfinie donne :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + \underbrace{C}_0 \tag{4.14}$$

où la constante  $C$  doit être choisie selon une condition fixée a priori. Ici, on veut que le voltage soit nul à l’infini ( $r \rightarrow \infty$ ), donc  $C = 0$ .

Les surfaces équipotentielles sont simplement des sphères centrées sur la charge à  $r = \text{cte}$ . Cet exemple montre bien que les lignes de champ sont orthogonales à toutes équipotentielles.

L'exemple précédent fait intervenir une seule charge. Avec plusieurs charges, le principe de superposition des champs électriques demeure valide. Comme l'opération pour déduire le voltage à partir du champ est linéaire<sup>3</sup>, le voltage en un point et en présence de plusieurs charges se calcule par une somme algébrique des voltages produits par chacune des charges prise isolément. Plus simple encore qu'avec le champ parce que le voltage est un scalaire.

La meilleure illustration de la superposition des voltages est obtenue avec le dipôle électrique, l'équivalent électrique de l'aimant. Il consiste en deux charges égales mais de signes opposés  $+Q$  et  $-Q$ . Si on place les charges sur l'axe  $z$ , l'une à  $d/2$  et l'autre à  $-d/2$ , le potentiel au point  $P$  vaut :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon r_2} \quad (4.15)$$

avec  $r_1$  la distance entre  $P$  et la charge  $+Q$ ;  $r_2$ , entre  $P$  et  $-Q$ .

En éloignant le point  $P$  du dipôle i.e.  $r \gg d$ , on peut approximer les valeurs de  $r_1$  et  $r_2$  en prenant l'expansion binomiale :

$$r_1 \approx r - \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$r_2 \approx r + \frac{d}{2} \cos \theta$$

ce qui conduit à :

$$V \approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (4.16)$$

Les équipotentielles sont décrites par  $r^2 \sec \theta = \text{cte}$  et sont montrées à la figure 4.8.

Dernière remarque : un conducteur est un corps équipotentiel car le potentiel reste le même partout sur le conducteur. Les charges libres sur le conducteur se meuvent sans contrainte jusqu'à ce que le champ électrique devienne nul ; sans quoi la force électrique continue d'être appliquée sur les charges pour les déplacer. Lorsque l'état permanent est atteint, les charges créent un champ électrique qui annule celui initial dans le conducteur. Ne pouvant quitter le conducteur, les charges sont rendues à la surface du conducteur d'où résulte une densité surfacique. Ainsi, le corps conducteur devient équipotentiel.

## 4.4 Théorie des images

La théorie des images ne s'explique que par le respect des conditions aux limites et de l'équipotentialité sur un conducteur parfait lorsqu'on trace la cartographie ("mapping") du champ électrique et de la fonction de potentiel d'un dipôle électrique comme celle de

<sup>3</sup>Le gradient, tout comme les autres opérateurs de type  $\nabla$ , est un opérateur linéaire.

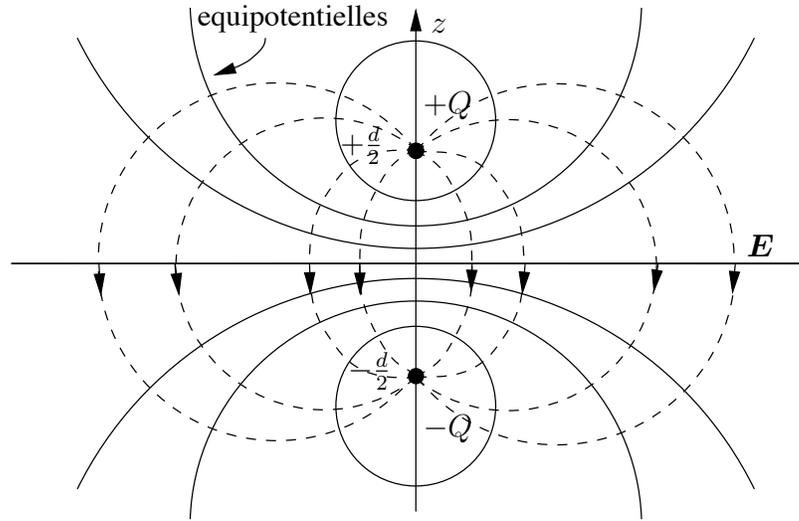


FIGURE 4.8 – Équipotentiels et lignes de champ électrique d’un dipôle électrique.

la figure 4.8. Le dipôle électrique étant constitué d’une charge  $+Q$  et d’une charge  $-Q$ , la charge nette est nulle.

On se rend compte qu’en considérant le plan milieu et normal au segment reliant les deux charges :

- le champ électrique est perpendiculaire en tout point du plan ;
- le plan correspond à une équipotentielle.

Ainsi, en plaçant un plan conducteur parfait exactement à la position de ce plan, la cartographie du champ électrique et de la fonction de potentielle ne serait nullement affectée. Si maintenant, on retire la charge  $-Q$  par exemple, le champ électrique devient nul automatiquement du côté de la charge négative mais demeure inchangé de l’autre côté du plan conducteur.

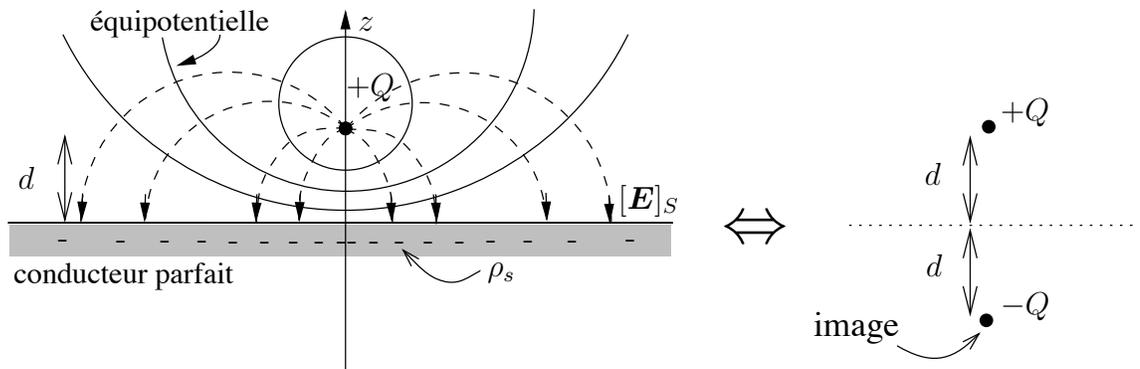


FIGURE 4.9 – Théorie des images sur une charge électrique  $+Q$ .

En conséquence, mettre un plan conducteur parfait à côté d’une charge électrique correspond à simuler une charge de signe opposé à une distance équivalente sous le plan conducteur. C’est l’image de la charge électrique statique comme le résume la figure 4.9. En

fait, la charge image est créée par une distribution non-uniforme de la densité surfacique de charges  $\rho_s$  à la surface du conducteur. Cette densité de charges est de même signe que la charge image et sa valeur dépend de l'intensité du champ de déplacement  $\mathbf{D}$  à cette position.

En présence de plusieurs charges électriques, le plan conducteur parfait simulera autant de charges de l'autre côté avec une même configuration, de mêmes grandeurs mais de signes opposés. On comprend facilement qu'une densité linéaire  $\rho_l$ , surfacique  $\rho_s$  ou volumique  $\rho$  de charges peut être imagée de la même manière, toujours avec le signe opposé.

**Exemple 4.6**

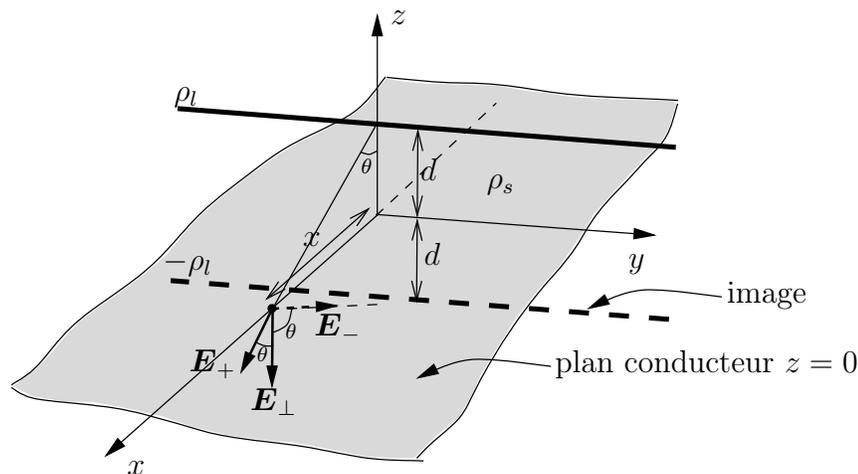


FIGURE 4.10 – Image d'une charge linéaire au dessus d'un conducteur.

Une charge linéaire infinie ayant une densité  $\rho_l$  est placée parallèlement à une distance  $d$  d'un plan conducteur. Pour se fixer les idées, la charge linéaire est à  $(x = 0, z = d)$  et le conducteur est à  $z = 0$ .

- Trouvez l'expression de la densité surfacique de charges à la surface du conducteur.

On sait que  $\rho_s = -[D_\perp]_S = -\epsilon[E_\perp]_S$  par l'application de la condition aux limites du champ électrique sur la surface  $S$ . Or, selon ce qui a été trouvé à l'exemple 4.1, le champ électrique produit par une charge linéaire infinie vaut<sup>4</sup> :

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} \mathbf{a}_r$$

avec  $r^2 = d^2 + x^2$ .

La charge image produit un champ électrique de même magnitude  $E_- = E_+$ .

<sup>4</sup>Il suffit de comprendre que la densité linéaire équivaut à  $\rho_l = \rho(\pi a^2)$  i.e. le produit de la densité volumique par la surface du fil.

Remarquons que l'image de la charge annule la composante tangentielle du champ électrique sur le conducteur afin que soit respectées les conditions aux limites. Le champ total est la somme vectorielle des deux champs soit, dans le plan  $z = 0$  :

$$[E_{\perp}]_S = \left| [\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-]_{z=0} \right| = 2E_+ \cos \theta .$$

L'angle  $\theta$  représente l'angle d'inclinaison entre le champ électrique et la normale  $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_z$  du plan conducteur. Son cosinus s'exprime aisément en fonction de  $d$  et  $x$  puisque  $\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+x^2}}$ .

On obtient finalement

$$[E_{\perp}]_S = \frac{\rho_l d}{\pi \epsilon (d^2 + x^2)}$$

donc

$$\rho_s = -\frac{\rho_l d}{\pi (d^2 + x^2)} .$$

Jusqu'ici, la discussion des images a été limitée à une distribution statique des charges électriques. On peut l'étendre à un mouvement de charges.

En effet, une charge électrique positive qui se déplace vers la droite à une distance constante d'un plan conducteur produit une image d'une charge électrique négative se déplaçant aussi vers la droite, à même vitesse. Ceci est équivalent à un mouvement d'une charge positive vers la gauche. Par extension, l'image d'un courant – lequel est formé par un flot continu de charges en mouvement – parallèle à un plan conducteur est un courant de même amplitude mais de sens opposé.

Cependant, un déplacement d'une charge positive vers le haut perpendiculairement à un plan conducteur engendre une image d'une charge négative s'éloignant vers le bas. Ainsi, un élément de courant à la verticale vers le haut produit une image d'un élément de courant à la verticale aussi orienté vers le haut.

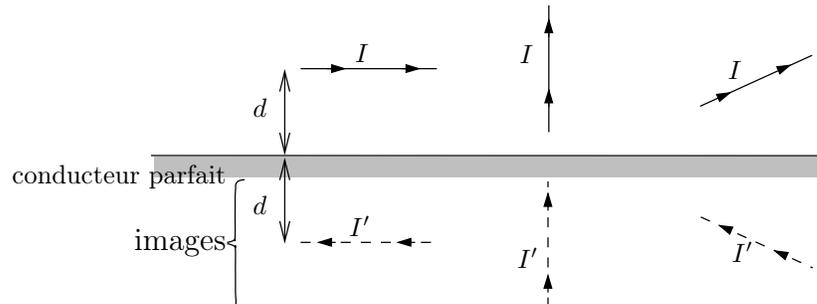


FIGURE 4.11 – Théorie des images sur des éléments de courant électrique.

L'image d'un courant circulant à un angle arbitraire par rapport à un plan conducteur est déduit en résolvant les composantes parallèles et perpendiculaires, tel que montré sur la figure 4.11

## 4.5 Équation de Laplace, méthode des différences finies

On a vu de quelle manière le champ électrique influe sur le potentiel scalaire. La substitution de (4.8) dans l'équation de *Gauss* électrique, donne :

$$-\nabla \cdot \epsilon \nabla V = \rho .$$

Utilisant une identité vectorielle, l'équation précédente s'exprime aussi de la façon suivante :

$$\epsilon \nabla^2 V + \nabla \epsilon \cdot \nabla V = -\rho . \quad (4.17)$$

Dans les cas usuels rencontrés, on assume que la permittivité est uniforme dans la région d'intérêt de sorte que  $\nabla \epsilon = 0$ , et (4.17) devient ce qui est connu sous le nom d'équation de *Poisson* :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} . \quad (4.18)$$

On peut faire ici une dernière supposition : le lieu où on désire estimer  $V$  a une densité nulle de charges libres. L'équation de *Poisson* se réduit à celle de *Laplace* qui gouverne le comportement du potentiel dans des régions caractérisées par une permittivité uniforme et sans charge libre. L'équation de *Laplace* :

$$\nabla^2 V = 0 \quad (4.19)$$

semble inintéressante mais c'est tout le contraire car elle permet de trouver la distribution du potentiel dans un diélectrique borné par des conducteurs de configurations diverses mis à différents potentiels. Les solutions analytiques de l'équation de *Laplace* passent par la technique de séparation des variables. En coordonnées cartésiennes par exemple, on assume que  $V(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)$  d'où :

$$\frac{\nabla^2 V}{V} = \underbrace{\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2}}_{k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2}}_{k_y^2} + \underbrace{\frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2}}_{k_z^2} \quad (4.20)$$

avec la contrainte

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 . \quad (4.21)$$

L'équation aux dérivées partielles a été remplacée par trois équations différentielles linéaires à coefficients constants.

### 4.5.1 Laplacien discret

Cependant, c'est plutôt une des solutions numériques de l'équation de *Laplace* qui retient l'attention<sup>5</sup>. Dans cette solution en coordonnées cartésiennes, on remplace les différences infinitésimales par des différences finies d'où le nom de "méthode des différences finies". Quoique la méthode ne se limite pas à une région planaire – la version 3D de la méthode

<sup>5</sup>Il existe plusieurs solutions numériques, qui permettent de trouver la distribution du potentiel. Partant du laplacien discret, il y a la méthode aux éléments finis et la méthode des différences finies.

des différences finies peut être vue comme une extension –, elle suppose que la structure analysée est constituée de surfaces prismatiques infinies selon l'axe  $z$  i.e. la section de la structure dans le plan transversal  $xy$  demeure identique quel que soit  $z$ . La symétrie est telle que la solution est indépendante de  $z$ .

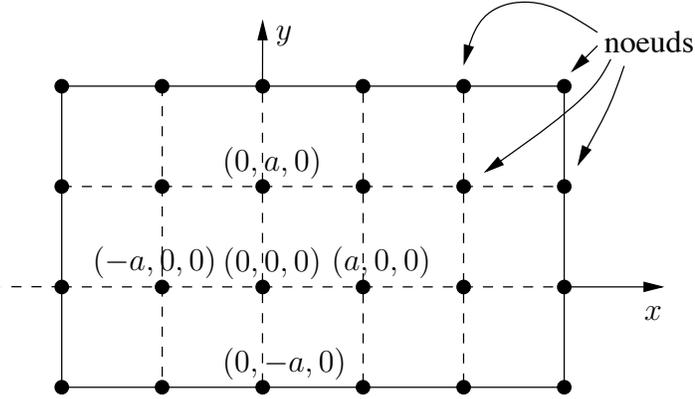


FIGURE 4.12 – Répartition des points d'échantillonnage à l'intérieur du domaine de définition pour la méthode des différences finies.

Ainsi, le potentiel est estimé à certains points d'échantillonnage que sont les noeuds ou les intersections d'un maillage, à l'intérieur de la section étudiée, appelée domaine de définition. En considérant que les points sont régulièrement espacés les uns des autres par une distance  $a$  comme sur la figure 4.12, on a pour le laplacien :

$$\left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]_{(0,0,0)} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right]_{(0,0,0)} \tag{4.22}$$

$$\approx \frac{1}{a} \left( \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \right]_{(a/2,0,0)} - \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \right]_{(-a/2,0,0)} \right) \tag{4.23}$$

$$\approx \frac{1}{a} \left( \frac{[V]_{(a,0,0)} - [V]_{(0,0,0)}}{a} - \frac{[V]_{(0,0,0)} - [V]_{(-a,0,0)}}{a} \right) \tag{4.24}$$

$$\approx \frac{1}{a^2} ([V]_{(-a,0,0)} + [V]_{(a,0,0)} - 2[V]_{(0,0,0)}) . \tag{4.25}$$

On procède de manière similaire par la dérivée seconde en  $y$  :

$$\left[ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]_{(0,0,0)} \approx \frac{1}{a^2} ([V]_{(0,-a,0)} + [V]_{(0,a,0)} - 2[V]_{(0,0,0)}) , \tag{4.26}$$

on réorganise puis on substitue (4.25) et (4.26) dans (4.19) sans la variable  $z$ , pour obtenir :

$$[V]_{(0,0,0)} \approx \frac{1}{4} ([V]_{(-a,0,0)} + [V]_{(a,0,0)} + [V]_{(0,-a,0)} + [V]_{(0,a,0)}) . \tag{4.27}$$

Cette équation indique qu'une approximation valable du potentiel en un point donné est celle déterminée en prenant la moyenne des potentiels des noeuds voisins équidistants. Cette formule provient des séries de *Taylor* tronquées, ce qui permet de connaître rapidement l'ordre de grandeur de l'erreur : ici de  $a^2$ .

La suite de la méthode consiste à appliquer l'équation des différences finies (4.27) aux noeuds dans le domaine de définition, en tenant compte des conditions imposées par le potentiel des conducteurs agissant comme frontières. Il faut maintenant solutionner ce système qui comporte souvent beaucoup d'inconnues (le potentiel à chaque noeud). Selon les contraintes, on pourra utiliser :

- la solution matricielle :

On génère la matrice des multiples équations – une équation pour chaque noeud du domaine de définition – des différences finies qui est ensuite inversée. L'inversion d'une matrice aussi grande est grandement accélérée si l'on considère la propriété "sparse" de la matrice.

- la solution par relaxation :

On débute en supposant que tous les potentiels sont nuls sauf ceux imposés sur les conducteurs, et on résout successivement les équations en utilisant la dernière valeur obtenue des quatre potentiels nécessaires à chacun des noeuds. La solution corrigée après une itération sert comme nouvelle solution de départ à la prochaine itération. On répète tant que la correction à appliquer à un seul des noeuds dépasse un seuil fixé au départ.

#### Exemple 4.7

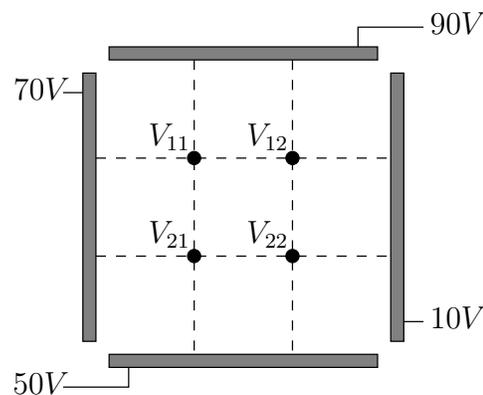


FIGURE 4.13 – Géométrie des quatre électrodes et maillage utilisé par la méthode des différences finies.

Quatre électrodes à différents potentiels sont disposées en carré. Elles délimitent un domaine de définition quadrillé par deux lignes horizontales et deux lignes verticales comme sur la figure 4.13. Au total, on compte quatre noeuds.

- Compte tenu du potentiel des électrodes, déterminez le potentiel à chacun des noeuds.

	Relaxations		
	1ère	2ème	3ème
$V_{11}$	40	58.75	65.32
$V_{12}$	35	48.13	51.41
$V_{21}$	40	53.13	56.41
$V_{22}$	33.75	40.32	41.96

TABLE 4.1 – Valeurs du potentiel aux noeuds à chacune des trois premières itérations de la relaxation.

On doit résoudre les quatre équations :

$$\begin{aligned}
 V_{11} &= 0.25(V_{12} + V_{21} + 70 + 90) \quad V \\
 V_{12} &= 0.25(V_{11} + V_{22} + 90 + 10) \quad V \\
 V_{21} &= 0.25(V_{11} + V_{22} + 70 + 50) \quad V \\
 V_{22} &= 0.25(V_{12} + V_{21} + 10 + 50) \quad V
 \end{aligned}$$

desquelles découlent le système linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -0.25 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 & 1 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 25 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} .$$

Par inversion de la matrice  $\underline{A}$  puis post-multiplication par  $\underline{b}$ , on trouve :

$$V_{11} = 67.5 \text{ V}, \quad V_{12} = 52.5 \text{ V}, \quad V_{21} = 57.5 \text{ V}, \quad \text{et} \quad V_{22} = 42.5 \text{ V} .$$

Les résultats des trois premières itérations par relaxation apparaissent au tableau 4.1 avec, comme point de départ,  $V_{11} = V_{12} = V_{21} = V_{22} = 0$ .

### 4.5.2 Interface entre diélectriques

Si on désire employer la méthode des différences finies lorsqu'on est en présence de deux diélectriques, il faut au préalable modifier l'équation (4.27) pour les points du maillage situés à l'interface entre les deux matériaux car  $\nabla\epsilon \neq 0$  contrairement à ce qui était supposé. On n'obtient donc plus l'équation de *Laplace*.

La façon de faire consiste à partir de l'équation de *Gauss* pour les charges électriques sous la forme intégrale en prenant une surface fermée parallélépipède rectangle de dimensions  $a \times a \times \Delta z$  qui entoure chacun des points à l'interface. Comme, il n'y a aucune charge à l'intérieur du volume délimitée par la surface fermée, alors.  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$  avec

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla V$ . En se référant à la figure 4.12 où un diélectrique de permittivité  $\epsilon_1$  couvre la partie  $y < 0$  et un autre de permittivité  $\epsilon_2$  dans  $y > 0$ , on trouve alors :

$$\epsilon_2 \frac{V_{(0,a,0)} - V_{(0,0,0)}}{a} a \Delta z + \epsilon_2 \frac{V_{(-a,0,0)} - V_{(0,0,0)}}{a} \frac{a}{2} \Delta z + \epsilon_2 \frac{V_{(a,0,0)} - V_{(0,0,0)}}{a} \frac{a}{2} \Delta z + \epsilon_1 \frac{V_{(0,-a,0)} - V_{(0,0,0)}}{a} a \Delta z + \epsilon_1 \frac{V_{(-a,0,0)} - V_{(0,0,0)}}{a} \frac{a}{2} \Delta z + \epsilon_1 \frac{V_{(a,0,0)} - V_{(0,0,0)}}{a} \frac{a}{2} \Delta z \approx 0 . \quad (4.28)$$

Un réarrangement des termes conduit à l'expression à utiliser pour les points à l'interface seulement en fonction des constantes diélectriques :

$$[V]_{(0,0,0)} \approx \frac{([V]_{(-a,0,0)} + [V]_{(a,0,0)})}{4} + \frac{(\epsilon_{r1}[V]_{(0,-a,0)} + \epsilon_{r2}[V]_{(0,a,0)})}{2(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \quad (4.29)$$

Ce choix commun de discrétisation n'est pas totalement compatible avec celui effectué plus tôt pour la dérivée seconde. De manière effective, la discontinuité sur  $\epsilon$  se retrouve à mi-chemin entre les points de la grille de tension. Cette subtilité ne pose pas problème lorsque la discrétisation est très fine mais peut occasionner des difficultés de validation à faible nombre de points.

**Exemple 4.8**

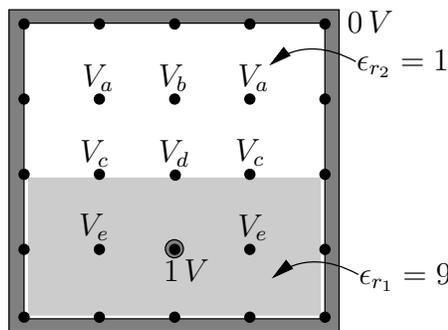


FIGURE 4.14 – Géométrie impliquant deux diélectriques et maillage utilisé par la méthode des différences finies.

La figure 4.14 montre un domaine de définition de 4 par 4 unités contenant deux diélectriques : celui du haut est l'air et celui du bas a une constante diélectrique  $\epsilon_{r1} = 9$ . Le potentiel aux limites de ce domaine vaut  $0\text{ V}$  alors qu'un seul noeud du domaine a un potentiel fixe de  $1\text{ V}$ . À cause de la symétrie, seulement 5 valeurs du potentiel sont inconnues soient  $V_a, V_b, V_c, V_d$  et  $V_e$ .

- Déterminez ces 5 valeurs du potentiel en assumant un seul diélectrique de constante  $\epsilon_r = 9$ .

---

La valeur de la constante diélectrique n'intervient pas dans les calculs de sorte

que :

$$\begin{aligned} V_a &= 0.25(V_b + V_c) \quad V \\ V_b &= 0.25(2V_a + V_d) \quad V \\ V_c &= 0.25(V_a + V_d + V_e) \quad V \\ V_d &= 0.25(V_b + 2V_c + 1) \quad V \\ V_e &= 0.25(V_c + 1) \quad V. \end{aligned}$$

On obtient les valeurs suivantes avec un seul diélectrique :  $V_a = 0.0811 \text{ V}$ ,  $V_b = 0.1351 \text{ V}$ ,  $V_c = 0.1892 \text{ V}$ ,  $V_d = 0.3784 \text{ V}$  et  $V_e = 0.2973 \text{ V}$ .

- Déterminez ces 5 valeurs du potentiel par inversion matricielle avec les deux diélectriques.

Les cinq équations à résoudre sont :

$$\begin{aligned} V_a &= 0.25(V_b + V_c) \quad V \\ V_b &= 0.25(2V_a + V_d) \quad V \\ V_c &= 0.25(V_d) + \frac{V_a + 9V_e}{20} \quad V \\ V_d &= 0.25(2V_c) + \frac{V_b + 9}{20} \quad V \\ V_e &= 0.25(V_c + 1) \quad V. \end{aligned}$$

On note la différence imputable à l'interface dans les expressions de  $V_c$  et  $V_d$  qui se situent à l'interface. Par la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & -0.25 & 0 \\ -0.05 & 0 & 1 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.05 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ V_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.45 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

on obtient  $V_a = 0.1317 \text{ V}$ ,  $V_b = 0.2195 \text{ V}$ ,  $V_c = 0.3073 \text{ V}$ ,  $V_d = 0.6146 \text{ V}$  et  $V_e = 0.3268 \text{ V}$ .

Note : les matrices à inverser sont de grandes dimensions dans les problèmes pratiques rencontrés ( $N^2M^2 \times N^2M^2$  avec  $N$  et  $M$  représentant le nombre d'unités en largeur et en hauteur du domaine de définition). Par contre, elles contiennent une quantité importante d'éléments nuls, faisant d'elles des matrices éparées ("sparse matrix"). Les mathématiciens se sont amusés à trouver un algorithme optimal d'inversion de ce type de matrices, algorithme que l'on retrouve dans *Matlab*<sup>TM</sup>.

## 4.6 De l'électromagnétisme aux circuits

La théorie des circuits, bien connue et largement employée en ingénierie, n'est applicable que dans le cas statique et quasi-statique. Elle suppose :

- des délais de propagation nuls entre deux points d'un même noeud ;
- des éléments très petits par rapport à la longueur d'onde de sorte qu'ils réagissent au premier ordre de la fréquence.

L'effet de propagation est couvert dans les chapitres ultérieurs sur les lignes de transmission entre deux points. L'effet des éléments suit dans cette section.

Mais avant, il est intéressant de voir comment les lois fondamentales des circuits électriques dérivent des équations de *Maxwell*.

- L'équation de *Faraday* statique (4.1) est l'extension de la loi des mailles car en statique et quasi-statique, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= - \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_a^b \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 - \int_b^c \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 - \dots - \int_z^a \mathbf{E}_K \cdot d\mathbf{l}_K \\ &= V_1 + V_2 + \dots + V_K . \end{aligned}$$

- De la même manière, l'équation de continuité statique (4.5) est l'extension de la loi des noeuds :

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \dots + \int_{S_K} \mathbf{J}_K \cdot d\mathbf{S}_K \\ &= [I_c]_{S_1} + [I_c]_{S_2} + \dots + [I_c]_{S_K} \end{aligned}$$

où l'ensemble des  $K$  surfaces  $S_i$  forment une surface fermée  $S$ .

On comprend maintenant qu'aux fréquences plus élevées, les deux lois fondamentales de *Kirchoff* ne tiennent plus ; il faut alors revenir à la source soit l'électromagnétisme.

### 4.6.1 Capacitance

On appelle capacitance<sup>6</sup>  $C$ , exprimée en *Farads* ( $F$ ), le rapport entre la charge et la différence de potentiel entre deux conducteurs – qui constituent les bornes ou les électrodes  $a$  et  $b$  – dans un milieu diélectrique de permittivité  $\epsilon$ . C'est-à-dire que :

$$C = \frac{Q_a}{V_{ab}} = \frac{Q_b}{V_{ba}} . \quad (4.30)$$

<sup>6</sup>La capacité ou le condensateur représente plutôt le dispositif lui-même capable d'emmagasiner une charge.

Lorsqu'une tension est appliquée à deux électrodes quelconques, des charges égales avec polarités opposées sont transférées sur la surface des conducteurs. L'électrode branchée du côté positif accumule une charge  $Q_a = +Q$  et une charge  $Q_b = -Q$  s'accumule sur l'autre électrode. L'évaluation de la capacitance se fait par l'intermédiaire du champ électrique à partir de la loi de *Gauss* (4.3) et de la définition du voltage (4.7) :

$$C = \epsilon \frac{\oint_{S_a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} . \tag{4.31}$$

Cependant, on vérifie que la valeur de  $C$  pour différentes configurations de condensateur, est toujours indépendante de  $\mathbf{E}$ . La capacitance est gouvernée uniquement par la géométrie (tailles, formes et positions relatives des électrodes) et par la permittivité du diélectrique.

**Exemple 4.9**

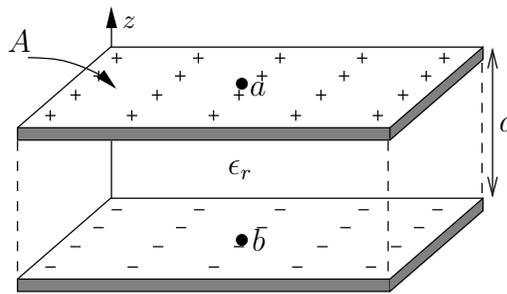


FIGURE 4.15 – Géométrie pour la détermination d'une capacité de 2 plaques parallèles.

Un condensateur est constitué de deux plaques conductrices de surface  $A$ , parallèles et espacées par une distance  $d$ . Un diélectrique de permittivité  $\epsilon$  remplit l'espace entre les plaques. On néglige les effets de bord : le champ électrique reste confiné dans l'espace immédiatement entre les deux plaques. La figure 4.15 illustre la géométrie de l'arrangement. La configuration idéale est celle de deux plaques infinies où on ne s'intéresse qu'à une section finie d'aire  $A$ .

► Exprimez la capacitance de cette structure.

---

Le voltage  $V_{ab}$  fait apparaître des charges  $+Q$  et  $-Q$  sur chacune des plaques, soit des densités surfaciques de charges  $\rho_{sa} = Q/A$  et  $\rho_{sb} = -Q/A$  respectivement. Le champ électrique peut être déduit de plusieurs manières :

- par l'application des conditions aux limites sur une plaque conductrice pour trouver  $E_{\parallel}$  et  $D_{\perp}$  ;
- par l'intégrale de *Gauss* statique sur une surface fermée constituée d'un boîte rectangulaire placée de part et d'autre d'une plaque conductrice comme à l'exemple 4.2 ;

- par l'intégrale sur une surface infinie comme à l'exemple 4.2 et superposition des champs avec deux plaques.

On comprend que, selon la configuration idéale, le champ électrique est uniforme dans le diélectrique. On trouve alors :

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_{sa}}{\epsilon} (-\mathbf{a}_z) .$$

La différence de potentiel entre les deux plaques peut maintenant être déterminée comme suit ( $d\mathbf{l} = -dz\mathbf{a}_z$ ) :

$$\begin{aligned} V_{ab} &= - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_b^a \frac{\rho_{sa}}{\epsilon} dz \\ &= \frac{\rho_{sa}}{\epsilon} d . \end{aligned}$$

La capacitance vaut donc :

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q_a}{V_{ab}} = \frac{\rho_{sa}A}{\rho_{sa}d/\epsilon} \\ &= \frac{\epsilon A}{d} . \end{aligned}$$

## 4.6.2 Conductance

La conductance  $G$  est l'inverse de la résistance  $R$  définie à partir de la loi d'Ohm  $R = V/I$  en Ohms ( $\Omega$ ). Dans la structure qui servait à la capacité, on remplace le diélectrique par un matériau dont la conductivité est finie mais non-nulle. Un courant de conduction  $[I_c]_S$  (ou plus simplement  $I$ ) traverse un matériau lorsqu'une tension  $V_{ab}$  est appliquée aux bornes  $a$  et  $b$ . Or les deux quantités sont reliées au champ électrique via :

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.32)$$

$$V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.33)$$

où  $S$  est une surface qui coupe l'ensemble des lignes de champ électrique pour mesurer le flux électrique total dans le matériau. Cette surface ne contient pas les fils qui se rendent aux électrodes. Donc :

$$G = \sigma \frac{\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} . \quad (4.34)$$

La conductance devient plus difficile à déterminer dans une situation complexe où la fréquence augmente. En effet, un champ magnétique naît dans le matériau à cause du

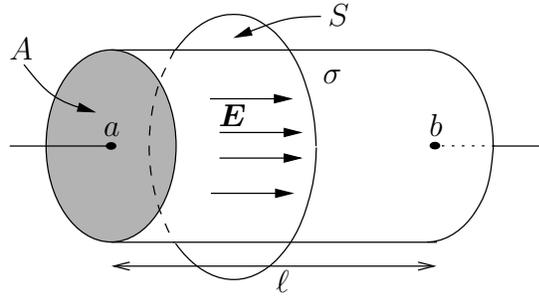


FIGURE 4.16 – Géométrie pour la détermination d’une résistance cylindrique.

couplage électromagnétique qui affecte la distribution de la densité de courant. Aussi, un effet pelliculaire apparaît en périphérie du matériau entre les bornes.

**Exemple 4.10**

Soit une résistance cylindrique de longueur  $\ell$  et de section  $A$ , faite d’un matériau de conductivité finie  $\sigma$ . On assume un champ uniforme dans le matériau en question. Pour cela, deux plaques circulaires agissent comme bornes à chaque extrémité du cylindre.

► Exprimez la valeur de la résistance  $R$ .

- D’une part, un champ électrique uniforme  $E$  fait en sorte que le voltage corresponde à  $V_{ab} = E\ell$ .
- D’autre part, la surface choisie est transversale aux lignes de champ (voir figure 4.16) donc  $I = \sigma E A$

La conductance vaut :

$$G = \frac{\sigma A}{\ell}$$

ou

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} .$$

### 4.6.3 Inductance

L’inductance est un concept plus difficile que les deux précédents. Dans sa version propre ou “self” (en français plus correct, on dirait auto-inductance ; mais on préfère le raccourci inductance), elle représente l’effet d’une variation du courant sur lui-même. Elle fait donc intervenir à la fois le courant et le champ magnétique lié – ou la partie du champ lié avec une partie du courant, c’est la subtilité de la chose. La version mutuelle relie le champ magnétique produit par un courant avec le courant induit dans un autre arrangement. Les transformateurs constituent un bel exemple d’inductance mutuelle.

## 4.6.3.1 Inductance externe

En général, on est tenu de considérer l'épaisseur du fil afin de séparer les contributions du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur. On parle alors d'inductance propre interne  $L_i$  ou externe  $L_e$ . Mais dans un but de simplification, on se limitera au champ externe en assumant aucun champ interne.

L'inductance dans ces conditions se définit comme le rapport entre le flux magnétique par le courant électrique lié au flux :

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (4.35)$$

ou plus généralement :

$$L = \mu \frac{\iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}}{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}} \quad (4.36)$$

où  $S$  est une surface qui intercepte tout le flux et  $C$ , un parcours fermé entourant le conducteur.

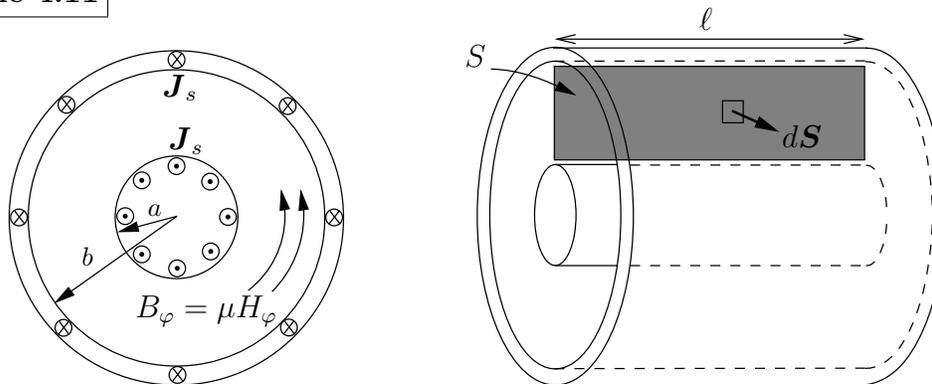
**Exemple 4.11**

FIGURE 4.17 – Section et surface d'intégration pour le flux d'une inductance constituée de deux cylindres centrés.

Soit un dispositif constitué d'un cylindre conducteur plein de longueur  $\ell$  et de rayon  $a$ , sur lequel circule un courant  $I$  avec une densité surfacique uniforme  $\mathbf{J}_s = J_{so} \mathbf{a}_z$  A/m. Le courant revient sur la surface d'un conducteur cylindrique creux centré sur le premier mais de rayon  $b > a$ . On insère un matériau de perméabilité  $\mu$  entre les deux cylindres.

- Exprimez l'inductance externe de l'arrangement dont la section est montrée à gauche sur la figure 4.17.

On commence par exprimer le champ d'induction dans le diélectrique en coordonnées cylindriques. On profite de la symétrie pour affirmer que le champ magnétique est indépendant de  $\phi$ . De l'équation d'Ampère sur un parcours circulaire centrée avec  $a < r < b$ , on trouve que :

$$H_\phi 2\pi r = J_{so} 2\pi a$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu J_{so} a}{r} \mathbf{a}_\phi .$$

Tout le flux passe complètement dans le matériau (le champ d'induction est nul pour  $r > b$  et  $r < a$ ). Prenant la section rectangulaire montrée à droite sur la figure 4.17 comme surface d'intégration pour trouver le flux total, on trouve :

$$\begin{aligned} \Psi &= \iint_S \frac{\mu J_{so} a}{r} \mathbf{a}_\phi \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{r=a}^b \int_{z=0}^\ell \frac{\mu J_{so} a}{r} dz dr \\ &= \mu \underbrace{J_{so} a}_I / (2\pi) \ell \ln \left( \frac{b}{a} \right) . \end{aligned}$$

La valeur de l'inductance est :

$$L = \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right) .$$

Aussi, il arrive que la surface d'intégration "coupe" à plusieurs reprises –  $N$  fois par exemple – les lignes de champ magnétique. Des boucles de fil constituées de  $N$  tours constitue le meilleur exemple. Dans ce cas, l'inductance augmente d'un facteur égal à  $N$  comparativement à celle d'une seule boucle. La figure 4.19 montre que la surface hélicoïdale délimitée par le fil conducteur ressemble à  $N = 2$  vrilles superposées et le flux magnétique total passe par chacune des vrilles. On écrit pour ces inductances bobinées :

$$L = N \frac{\Psi_{1\text{boucle}}}{I} . \tag{4.37}$$

**Exemple 4.12**

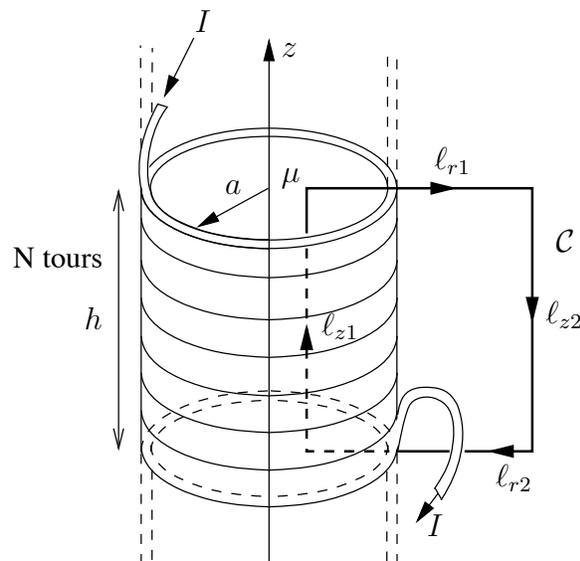


FIGURE 4.18 – Géométrie du solénoïde infini et parcours/surface d'intégration pour  $B$ .

Un solénoïde infini comporte  $N$  tours sur une longueur  $h$ . Le fil du solénoïde est enroulé sur une tige cylindrique infinie de rayon  $a$  dont le matériau est ferromagnétique de perméabilité très élevée  $\mu$ .

- Déduisez l'inductance par unité de longueur du solénoïde.

En premier lieu, on évalue le champ d'induction à l'intérieur des boucles de fil dans le matériau. Si le solénoïde est dans l'axe  $z$ , on peut affirmer que pour des considérations géométriques, le champ ne peut être fonction de  $z$  et de  $\phi$ . De plus, comme la portion  $\ell_{z2}$  peut être située à une distance quelconque sans en modifier le résultat, le champ d'induction extérieur  $B_e(-\mathbf{a}_z)$  est donc une constante. Or, le flux extérieur  $\Psi_e = \int_{z=\text{cte}} B_e dS = B_e \int_{z=\text{cte}} dS = B_e \cdot \infty$  ne peut être infini de sorte qu'on peut considérer le champ d'induction extérieur comme étant pratiquement nul  $B_e \approx 0$  pour limiter le flux externe. Finalement, le champ d'induction dans le matériau est orientée selon  $\mathbf{a}_z$ . En procédant à partir de la loi d'Ampère statique sur un parcours rectangulaire montré sur la figure 4.18, on obtient :

$$\begin{aligned} NI &= \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\ell_{z1}} H_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z dz + \underbrace{\int_{\ell_{r1}} H_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r dr}_0 + \underbrace{\int_{\ell_{z2}} H_z \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_z dz)}_{\int H_e dz = \int 0 dz = 0} + \underbrace{\int_{\ell_{r2}} H_z \mathbf{a}_z \cdot (-\mathbf{a}_r dr)}_0 \\ &= H_z h \end{aligned}$$

et, de là :

$$B_z = \frac{\mu NI}{h}.$$

On remarque que le champ d'induction dans le matériau est uniforme. Le flux magnétique qui traverse une boucle est facile à calculer ; il vaut :

$$\Psi_{1\text{boucle}} = \frac{\mu NI \pi a^2}{h}.$$

Il faut bien voir que l'analyse a été faite en ne prenant qu'une partie de longueur  $h$  du solénoïde. L'obtention de l'inductance par unité de longueur qui est notée  $\mathcal{L}$  découle de (4.37) en divisant ensuite par  $h$ . Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{L}{h} = \frac{1}{h} N \frac{\left( \frac{\mu NI \pi a^2}{h} \right)}{I} \\ &= \frac{\mu N^2 \pi a^2}{h^2}. \end{aligned}$$

### 4.6.3.2 Inductance interne

L'inductance telle que définie à l'équation (4.35), exige que tout le flux soit lié par le courant complet. C'est le cas usuel en pratique, car on suppose que le courant dans un bon conducteur est confiné à la surface – courant de surface  $\mathbf{J}_s$  – où il contribue entièrement au flux. Parfois, le flux entier ne peut être lié à tout le courant : une partie seulement du courant est liée à une partie du flux. Il convient alors de travailler sur des éléments différentiels du flux pondérés au prorata de la fraction du courant qui contribue au flux, puis d'intégrer sur la surface par laquelle passe le flux entier. On parle alors d'inductance interne et d'inductance externe. Pour l'inductance interne, le flux intégré est lié à une partie du courant, et non à tout le courant :

$$L_{int} = \iint_S \varepsilon \frac{\Psi}{[I]_{dS}} dS$$

où  $\varepsilon$  représente la partie du flux liée du courant liée au courant passant par  $dS$ . L'inductance totale de l'arrangement est la somme des inductances interne et externe ; on intègre alors tout le flux.

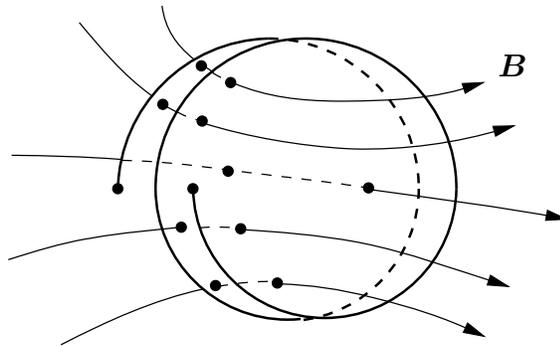


FIGURE 4.19 – Surface délimitée par deux boucles de fil conducteur.

### 4.6.3.3 Réluctance

La réluctance  $\mathfrak{R}$ , exprimée en  $H^{-1}$ , sert pour déterminer le flux magnétique dans un circuit magnétique. Ce dernier est une analogie directe du circuit électrique avec :

- les sources tension remplacées par des forces magnétomotrices  $fmm$  ou, avec plusieurs tours, par des potentiels scalaires magnétiques  $V_m = NI$  ;
- les courants remplacés par les flux magnétique  $\Psi$  ;
- les résistances remplacées par les réluctances  $\mathfrak{R}$ .

Il faut effectivement une force magnétomotrice pour faire circuler un flux magnétique entre deux points d'un circuit magnétique tout comme une force électromotrice (ou voltage) crée un courant au travers une résistance. Donc :

$$V_m = \mathfrak{R}\Psi . \tag{4.38}$$

Pour un bloc de longueur  $l$ , de section  $A$  et de perméabilité  $\mu$ , la réluctance vaut :

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu A} . \quad (4.39)$$

**Exemple 4.13**

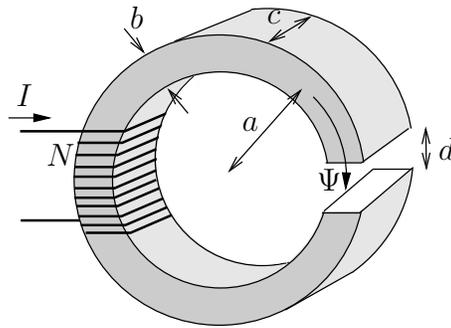


FIGURE 4.20 – Tore magnétique avec entrefer.

Un tore magnétique est constitué d'un noyau de ferrite  $\mu_{r_{tore}} = 10^3$  à section rectangulaire  $b \times c = 200 \text{ mm}^2$ , de rayon moyen  $a = 15 \text{ mm}$  avec un petit entrefer d'une distance  $d = 3 \text{ mm}$  comme sur la figure 4.20. L'enroulement comporte  $N = 1000$  tours de fil conducteur sur lequel circule un courant  $I_o = 0.2 \text{ A}$ . On suppose qu'il n'y a pas de fuite de flux et que les effets de bord sont négligeables dans l'entrefer.

- Déterminez approximativement le flux magnétique  $\Psi_{entrefer}$  dans l'entrefer.

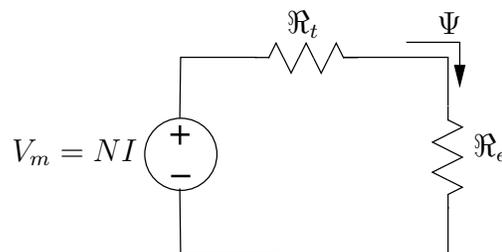


FIGURE 4.21 – Circuit magnétique équivalent de l'exemple 4.13.

Le schéma du circuit magnétique est illustré sur la figure 4.21 où  $\mathfrak{R}_e$  et  $\mathfrak{R}_t$  sont respectivement les réluctances de l'entrefer et du tore. Selon (4.39), elles valent (après conversion des  $mm$  en  $m$ ) :

$$\mathfrak{R}_e = \frac{d}{\mu_o bc} = \frac{0.003}{(4\pi \times 10^{-7})(0.0002)} = 11.937 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_t = \frac{2\pi a - d}{\mu_{r_{tore}} \mu_o bc} = \frac{2\pi(0.015) - 0.003}{(10^3)(4\pi \times 10^{-7})(0.0002)} = 0.363 \times 10^6 \text{ H}^{-1} .$$

Le circuit magnétique se résout selon (4.38) :

$$V_m = NI = (\mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_t) \Psi$$

car il n'y a qu'un seul courant magnétique et les deux réluctance sont en série. Ainsi, le flux circulant dans le tore est le même que le flux dans l'entrefer  $\Psi_{tore} = \Psi_{entrefer} = \Psi$ . Ceci donne :

$$\Psi = \frac{(1000)(0.2)}{(11.937 + 0.363) \times 10^6} = 16.26 \times 10^{-6} \text{ Wb} .$$

► Vérifiez en utilisant l'équation d'Ampère et les conditions aux limites.

Selon l'équation d'Ampère, on trouve :

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{\phi_{tore}}(2\pi a - d) + H_{\phi_{entrefer}}(d) = NI$$

$$\frac{B_{\phi_{tore}}}{\mu_{rtore}\mu_o}(2\pi a - d) + \frac{B_{\phi_{entrefer}}}{\mu_o}(d) = NI .$$

Le champ  $\mathbf{H}$  est normal à la frontière entre tore et entrefer. Il y a continuité de la composante normale du champ d'induction selon (3.44) :

$$B_{\phi_{tore}} = B_{\phi_{entrefer}} = B_{\phi}$$

ce qui confirme l'égalité des flux dans le tore et dans l'entrefer.

On obtient finalement :

$$B_{\phi} = \frac{(1000)(0.2)}{72.61 + 2387.32} = 0.0813 \text{ Wb/m}^2$$

d'où

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_{\phi}bc = (0.0813)(0.0002) = 16.26 \times 10^{-6} \text{ Wb} .$$

**Exemple 4.14**

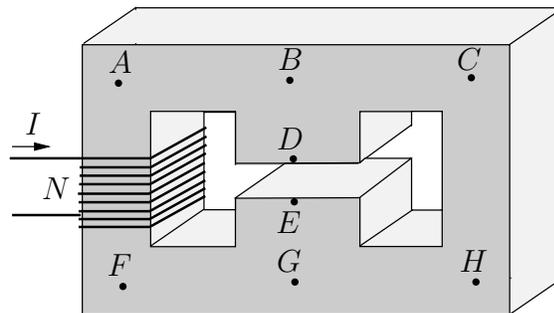


FIGURE 4.22 – Tore magnétique avec entrefer.

Un tore magnétique est reproduit sur la figure 4.22. Les longueurs moyennes valent  $\ell_{BAFG} = \ell_{BCHG} = 120 \text{ mm}$  et  $\ell_{BD} = \ell_{EG} = 20 \text{ mm}$ . Le noyau de ferrite

$\mu_{\text{tore}} = 10^3$  a une section rectangulaire de  $A_{CAHF} = 200 \text{ mm}^2$  entre les points  $ACHF$ ; l'entrefer d'une distance  $\ell_{DE} = 1 \text{ mm}$  a une section rectangulaire  $A_{DE} = A_{BD} = A_{EG} = 300 \text{ mm}^2$ .

► Dessinez le circuit magnétique équivalent.

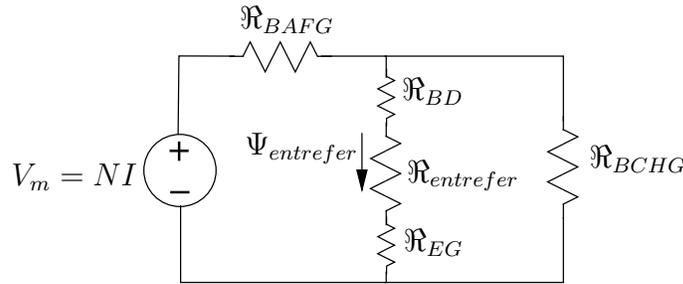


FIGURE 4.23 – Circuit magnétique équivalent de l'exemple 4.14.

Le schéma du circuit magnétique est un peu plus compliqué que celui de l'exemple précédent. Il est illustré sur la figure 4.23. Les réluctances sont calculées selon (4.39) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{BAFG} = \mathcal{R}_{BCHG} &= \frac{0.12}{(10^3)(4\pi \times 10^{-7})(0.0002)} = 0.477 \times 10^6 H^{-1} \\ \mathcal{R}_{BD} = \mathcal{R}_{EG} &= \frac{0.02}{(10^3)(4\pi \times 10^{-7})(0.0003)} = 0.053 \times 10^6 H^{-1} \\ \mathcal{R}_{\text{entrefer}} &= \frac{0.001}{(4\pi \times 10^{-7})(0.0003)} = 2.653 \times 10^6 H^{-1} . \end{aligned}$$

## 4.7 Énergie emmagasinée

On sait que les champs électriques ou magnétiques sont liés à des forces en présence.

- Un ensemble de charges électriques possède une énergie potentielle pour que les charges demeurent fixes. Cette énergie correspond au travail requis pour amener chacune des charges de l'infini jusqu'à sa position respective. Une fois l'ensemble en place, cette énergie potentielle est emmagasinée dans le champ électrique. En effet, on tire une énergie d'un condensateur chargé, énergie qui provient de celle stockée dans le champ électrique.
- De manière analogue, une énergie potentielle maintient une boucle de courant dans un champ magnétique produit par d'autres boucles de courant. Cette énergie est emmagasinée cette fois dans le champ magnétique comme dans une inductance chargée capable, elle aussi, de fournir une énergie.

En mettant en parallèle un condensateur et une inductance, l'énergie est transférée de l'une forme à l'autre en alternance créant ainsi un circuit oscillant.

La détermination de l'énergie emmagasinée sert énormément lorsque vient le temps de faire des calculs de force électrostatique ou magnétostatique sachant que

$$W_{ab} = \int_{a,\ell}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{ou mieux} \quad \mathbf{F} = \nabla W . \quad (4.40)$$

### 4.7.1 Énergie électrique emmagasinée

Pour déterminer l'expression de l'énergie électrique, on peut procéder par deux manières qui aboutissent à la même conclusion (heureusement).

Avec une seule charge en présence  $Q_1$ , amener une nouvelle charge  $Q_2$  de l'infini jusqu'à une certaine position requiert un travail  $W_{e2} = Q_2 V_{12}$  où  $V_{12}$  correspond au voltage à la position finale de la charge  $Q_2$  produit par  $Q_1$ . En continuant d'assembler le système de charges, on amène une charge  $Q_3$  de l'infini à sa position finale. Le travail nécessaire vaut  $W_{e3} = Q_3 V_{13} + Q_3 V_{23}$ . Le travail total électrique  $W_e$  pour  $n$  charges s'exprime :

$$W_e = Q_2 V_{12} + Q_3 (V_{13} + V_{23}) + \dots + Q_n (V_{1n} + V_{2n} + \dots + V_{n-1,n}) . \quad (4.41)$$

Il est intéressant de remarquer que le travail est identique en amenant une charge  $Q_1$  à sa position en considérant la charge  $Q_2$  déjà à sa place i.e.  $Q_2 V_{12} = Q_1 V_{21}$ . On peut donc réécrire (4.41) pour  $n$  charges, comme suit :

$$W_e = Q_1 (V_{21} + V_{31} + \dots + V_{n1}) + Q_2 (V_{32} + V_{42} + \dots + V_{n2}) + \dots + Q_{n-1} V_{n,n-1} . \quad (4.42)$$

En sommant les équations (4.41) et (4.42), on déduit que

$$2W_e = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Q_i V_{ji} . \quad (4.43)$$

Si, au lieu d'avoir des charges discrètes, le système consiste en une distribution volumique de charges :

- les sommes deviennent des intégrales car  $\sum Q_i = \int_V \rho dv$ ,
- les voltages deviennent une fonction de l'emplacement dans le volume  $V(x, y, z)$  en considérant l'ensemble complet (une unité différentielle de charge  $dQ$  ne modifie pas la fonction à cause de sa contribution non significative).

Ainsi, on obtient :

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V(x, y, z) dv . \quad (4.44)$$

Pour faire une association avec la notion de champ, il convient de remplacer  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$  selon l'équation de *Gauss* sous forme différentielle. Par une identité vectorielle, on a :

$$\nabla \cdot (V \mathbf{D}) = V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \underbrace{\mathbf{D} \cdot (\nabla V)}_{-\mathbf{E}}$$

de sorte que maintenant

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla \cdot (V\mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv \quad (4.45)$$

$$= \iiint_V \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}_{w_e} dv . \quad (4.46)$$

Le passage de l'avant-dernière à la dernière équation se justifie par le fait que, selon le théorème de *Green*,  $\int_V \nabla \cdot (V\mathbf{D}) = \oint_S V\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ . Or, à grande distance d'une charge ou d'une distribution de charges, le voltage décroît en  $1/r$  et le champ de déplacement en  $1/r^2$  alors que la surface  $dS$  ne croît qu'en  $r^2$ . L'intégrale sur  $S$  donne donc zéro.

Le terme à l'intérieur de l'intégrale de (4.46) possède les unités de joules par unité de volume soit une densité d'énergie; c'est la densité d'énergie électrique emmagasinée. On le note  $w_e$  :

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} . \quad (4.47)$$

L'autre manière de procéder passe par l'énergie stockée dans un condensateur<sup>7</sup> qui vaut  $W_c = \frac{1}{2} CV_{ab}^2$  où  $V_{ab}$  est la tension finale aux bornes du condensateur. Comme

- $CV_{ab} = Q_a = \oint_{S_a} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$  selon la définition de la capacitance ;
- $V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  avec  $d\mathbf{l}$  en tout point dans la direction de la normale à la surface  $d\mathbf{S}$

on déduit assez rapidement que :

$$W_c = \frac{1}{2} \oint_{S_a} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv . \quad (4.48)$$

Comme l'énergie doit être contenue à quelque part, c'est dans le champ électrique qu'elle se trouve d'où  $W_c = W_e$ .

#### Exemple 4.15

Un condensateur à plaque parallèle est chargé directement par une source tension  $V_o$ . La source est ensuite retirée. La capacitance vaut  $C = \epsilon \frac{A}{d}$  où  $A$  est l'aire de chacune des plaques et  $d$ , la distance entre les plaques du condensateur.

<sup>7</sup>L'énergie est reliée à la puissance par le temps :

$$W = \int_{-\infty}^T \mathcal{P}(t) dt = \int_{-\infty}^T v(t)i(t) dt .$$

Or, la relation  $v - i$  aux bornes d'un condensateur s'exprime par  $i(t) = C \frac{dv}{dt}$  ce qui revient à écrire

$$W_c = \int_{-\infty}^T v(t)C \frac{dv}{dt} dt = \int_{-\infty}^T Cv(t) dv = C \left[ \frac{v^2(t)}{2} \right]_{-\infty}^T = \frac{1}{2} CV_{ab}^2$$

puisque  $v(-\infty) \rightarrow 0$  et que  $v(T) = V_{ab}$ .

CQFD.

- Donnez l'expression de la force qui agit sur les plaques.

On peut exprimer la force en passant par la loi de *Coulomb* (2.1) sur des densités surfaciques de charge. Cela exige deux intégrales de surface entre des éléments différentiels de charge  $dQ_1 = \rho_{s1}dS$  et  $dQ_2 = \rho_{s2}dS$  avec  $R$  qui varie selon les positions des deux éléments de charge. Quoique les intégrales demeurent relativement simples, on veut utiliser ici le concept d'énergie emmagasinée dans le champ électrique entre les plaques.

Pour trouver l'énergie emmagasinée, on peut soit choisir l'une ou l'autre des expressions (équivalentes d'ailleurs) de  $W_c$  (4.48) ou  $W_e$  (4.47). On vérifie aisément selon (4.48) avec  $C = \epsilon \frac{A}{d}$ , que :

$$W_e = W_c = \frac{1}{2} \epsilon \frac{A}{d} V_o^2 .$$

Si on augmente la distance entre les deux plaques par un incrément différentiel  $dz$  tel que  $d' = d + dz$ , alors l'énergie emmagasinée devient :

$$W'_e = \frac{1}{2} \epsilon \frac{A}{d + dz} V_o^2 .$$

La différence d'énergie  $dW_e$  provient du travail virtuel effectué pour déplacer l'une des plaques sur une distance  $dz$ , soit  $dW_v = Fdz$ . On trouve donc que la force électrostatique entre les deux plaques s'exprime :

$$F = \frac{dW_e}{dz} = \frac{1}{2dz} \epsilon A V_o^2 \underbrace{\left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d + dz} \right)}_{\approx \frac{dz}{d^2}} \approx \frac{\epsilon A V_o^2}{2d^2} .$$

La pression électrostatique  $P_e$  peut être simplement tirée selon le rapport  $F/A$ .

Si la source reste branchée aux bornes du condensateurs, la force électrostatique doit garder la même expression alors que de l'énergie est fournie par la source  $dW_s = V_o dQ = \frac{\epsilon A V_o^2}{d^2}$  pour transporter une charge  $dQ = V_o dC$  à partir du potentiel 0 jusqu'à  $V_o$ . L'explication vient du bilan d'énergie qui s'écrit maintenant  $dW_s = dW_e + dW_v$  plutôt que  $dW_e = dW_v$  utilisé lorsque la source est retirée.

### 4.7.2 Énergie magnétique emmagasinée

Dès que l'on traite de magnétisme, c'est toujours un peu plus compliqué. Par contre, on peut se fier sur une démonstration similaire à celle faite l'énergie électrique. Le problème vient du fait que la charge magnétique ponctuelle n'existe pas. On peut prendre à la place, des petites boucles de courant produisant un champ magnétique que l'on assemble pour former le système. Des forces magnétiques existent entre les boucles de courant, forces

que l'on somme. On peut aussi y aller par le biais du calcul de puissance qui mène à l'énergie emmagasinée dans une inductance<sup>8</sup> qui vaut  $W_l = \frac{1}{2}LI_o^2$  où  $I_o$  est le courant final traversant l'inductance.

Utilisant cette seconde manière plus simple, l'énergie magnétique emmagasinée  $W_m$  se détermine pour les étapes suivantes. Comme

- $LI_o = \Psi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  selon la définition de l'inductance ;
- $I_o = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  avec  $d\mathbf{l}$  en tout point dans la direction de la normale à la surface  $d\mathbf{S}$  pour former un volume  $dv$  ;

on déduit assez rapidement que :

$$W_m = W_l = \frac{1}{2} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \tag{4.49}$$

$$= \iiint_V \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}_{w_m} dv . \tag{4.50}$$

Le terme à l'intérieur de l'intégrale de (4.50) possède aussi les unités d'une densité d'énergie en joules par unité de volume. C'est la densité d'énergie magnétique emmagasinée  $w_m$  telle que :

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} . \tag{4.51}$$

**Exemple 4.16**

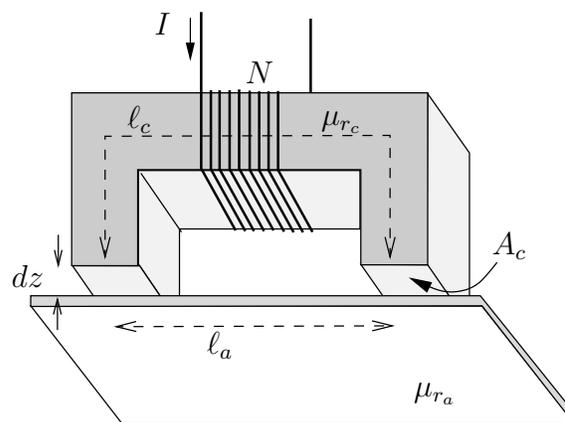


FIGURE 4.24 – Électroaimant soulevant une plaque d'acier.

<sup>8</sup>Comme pour la capacitance, on écrit

$$W_l = \int_{-\infty}^T v(t)i(t) dt = \int_{-\infty}^T \frac{di}{dt} i(t) dt = \int_{-\infty}^T Li(t) di = L \left[ \frac{i^2(t)}{2} \right]_{-\infty}^T = \frac{1}{2}LI_o^2$$

puisque  $i(-\infty) \rightarrow 0$  et que  $i(T) = I_o$ .

CQFD.

Un électroaimant en forme de  $U$  soulève une plaque d'acier. L'électroaimant consiste en  $N = 5000$  tours de fil enroulé autour d'un noyau de ferrite  $\mu_{r_c} = 10^5$  de section uniforme  $A_c = 0.2 \text{ m}^2$ . La longueur moyenne du noyau entre les deux bouts de l'électroaimant atteint  $\ell_c = 2 \text{ m}$  alors que la distance entre les deux bouts (entrefer) vaut  $\ell_a = 1.2 \text{ m}$ . La plaque d'acier a une perméabilité relative de  $\mu_{r_a} = 10^3$  et une épaisseur telle que sa section vaut  $A_a = 0.015 \text{ m}^2$ .

- Exprimez le flux en fonction de  $z$  et des variables du système.

Selon (4.39) et le schéma du circuit magnétique, on déduit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_c &= \frac{\ell_c}{\mu_{r_c} \mu_o A_c} = 80 \text{ H}^{-1} \\ \mathfrak{R}_a &= \frac{\ell_a}{\mu_{r_a} \mu_o A_a} = 63\,662 \text{ H}^{-1} \\ \mathfrak{R}_g &= \frac{z}{\mu_o A_c} \\ \Psi &= \frac{NI}{\mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a + 2\mathfrak{R}_g} \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{R}_g$  est la réluctance de l'espace d'air entre le noyau et la plaque d'acier à chaque bout.

- Exprimez la force de levage de l'électroaimant une fois la plaque saisie  $z = 0$ .

Par le concept d'énergie magnétique emmagasinée, le calcul est plus simple. Il faut déterminer la différence d'énergie magnétique emmagasinée dans le système lorsque la plaque est collée et lorsque la plaque est légèrement décollé par une distance  $dz$ .

L'énergie magnétique du système  $W_m$  devient selon (4.50) et sachant que  $B_c A_c = B_a A_a = \Psi$  :

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{\Psi^2}{2} \left( \frac{\ell_c A_c}{\mu_{r_c} \mu_o A_c^2} + \frac{\ell_a A_a}{\mu_{r_a} \mu_o A_a^2} + 2 \frac{z A_c}{\mu_o A_c^2} \right) \\ &= \frac{\Psi^2}{2} (\mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a + 2\mathfrak{R}_g) . \end{aligned}$$

En utilisant l'expression du flux trouvée dans la première partie de la question, on aboutit à :

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{(NI)^2}{\mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a + 2\mathfrak{R}_g} = \frac{1}{2} \frac{(NI)^2}{\mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a + 2 \frac{z}{\mu_o A_c}} .$$

La variation d'énergie magnétique emmagasinée se calcule simplement en pre-

nant  $z = 0$  puis  $z = dz$  soit :

$$\begin{aligned} dW_m &= \frac{1}{2} \frac{(NI)^2}{\mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a} - \frac{1}{2} \frac{(NI)^2}{\mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a + 2 \frac{dz}{\mu_o A_c}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(NI)^2 \frac{2dz}{\mu_o A_c}}{(\mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a) \left( \mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a + 2 \frac{dz}{\mu_o A_c} \right)} \\ &\approx \frac{(NI)^2 dz}{\mu_o A_c (\mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a)^2} \end{aligned}$$

procurant ainsi une force de levage égale à :

$$F \approx \frac{(NI)^2}{\mu_o A_c (\mathfrak{R}_c + \mathfrak{R}_a)^2} .$$

- Calculez le courant nécessaire pour soulever la plaque qui pèse 600 kg.

En utilisant l'expression de la force de levage, on trouve :

$$\begin{aligned} F &= mg = (600)(9.8) = 5880 \text{ N} \\ &\approx \frac{(5000)^2 I^2}{(4\pi \times 10^{-7})(0.2)(80 + 63662)^2} = (24482) I^2 . \end{aligned}$$

En conséquence, le courant  $I$  doit être supérieur à :

$$I \geq \sqrt{\frac{5880}{24482}} = 0.49 \text{ A} .$$

## 4.8 Analyse de comportement en quasi-statique

Cette section, un peu spéciale, fait une démonstration du comportement en régime sinusoïdal permanent à basse fréquence des deux configurations à la base des éléments de circuit bien connus. On procède à partir des équations de *Maxwell* sous forme différentielle sans faire allusion au cas statique. On solutionne les équations itérativement et non globalement comme il sera fait plus tard avec l'onde plane.

La structure de base utilise deux plaques rectangulaires parfaitement conductrices, parallèles et séparées par un matériau sans perte ( $\epsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma = 0$ ) d'épaisseur  $d$ . Les plaques ont une largeur  $w$ , une longueur  $\ell$ . On suppose aucun effet de bord, i.e. que les plaques sont considérées comme une portion de deux plaques infinies ou encore, que la dimension  $d$  est petite. Les champs seront donc uniformes à l'intérieur du matériau entre les deux plaques dans une section plane  $z = cte$ .

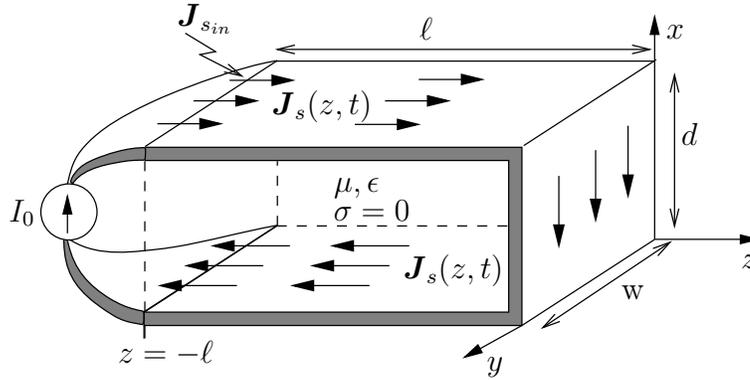


FIGURE 4.25 – Structure à deux plaques conductrices parallèles court-circuitées simulant une inductance.

### 4.8.1 Inductance

Dans le premier cas, on court-circuite une extrémité des plaques (celle à  $z = 0$  pour faciliter les choses) sur toute la largeur tandis qu'on alimente l'extrémité opposée par une source courant qui débite de façon uniforme sur la largeur. Le tout est illustré sur la figure 4.25. Les plus perspicaces verront une boucle de courant qui simule une inductance.

La première étape étudie la réaction en mode quasi-statique lorsque la structure est alimentée par un courant  $I_o$ . Un courant de surface existe sur les plaques ayant une densité :

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} -\frac{I_o}{w} \mathbf{a}_z & \text{pour } x = 0 \\ \frac{I_o}{w} \mathbf{a}_z & \text{pour } x = d . \end{cases} \quad (4.52)$$

Par l'application des conditions aux limites de la composante tangentielle, on conclut que le champ magnétique uniforme dans le matériau est orienté suivant l'axe  $(-\mathbf{a}_y)$  et qu'il a une amplitude de  $\frac{I_o}{w}$  :

$$\mathbf{H} = -\frac{I_o}{w} \mathbf{a}_y \quad \text{pour } \begin{aligned} &0 < x < d \\ &0 < y < w \\ &\text{et } -\ell < z < 0 . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Il est nul partout ailleurs.

Le flux magnétique lié au courant est simplement le flux traversant une section transversale aux plaques soit  $\Psi = \mu H_y(\ell d)$ . On peut déduire immédiatement l'expression de l'inductance qui sera utile plus tard dans la démonstration :

$$L = \frac{\Psi}{I_o} = \frac{\mu \ell d}{w} . \quad (4.54)$$

Si le courant est sinusoïdal, on utilise la notion de phaseur donc  $\bar{I} = I_o$  et :

$$\bar{H}_{y0} = -\frac{I_o}{w} . \quad (4.55)$$

L'indice 0 est rajouté pour indiquer qu'il s'agit d'une composante du champ proportionnelle à la puissance zéro de la fréquence.

Comme le champ magnétique varie dans le temps, il doit exister un champ électrique suivant les équations de *Maxwell*. L'expansion de l'équation de *Faraday* sous forme différentielle avec des phaseurs donne (aucune variation suivant  $x$  et  $y$ ) :

$$\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu \bar{H}_{y0} = j\omega\mu \frac{I_o}{w} \quad (4.56)$$

qui a comme solution générale :

$$\bar{E}_{x1} = j\omega\mu \frac{I_o}{w} z + \bar{C} .$$

La constante  $\bar{C}$  est déterminée par l'application de la condition aux limites du champ électrique tangentiel à  $z = 0$ . Il faut que  $[\bar{E}_x]_{z=0} = 0$  car il ne peut y avoir de composante tangentielle du champ électrique sur un conducteur. Ainsi, avec  $\bar{C} = 0$ , on obtient :

$$\bar{E}_{x1} = j\omega\mu \frac{I_o}{w} z . \quad (4.57)$$

Avant de poursuivre, il est bon d'ouvrir une parenthèse pour montrer que l'une des deux expressions des champs (4.55) et (4.57) – lesquelles correspondent aux expressions dans le cas quasi-statique où la composante du premier ordre en fréquence est largement celle prédominante – établit la réaction de l'inductance obtenue dans la théorie des circuits. En effet, à l'entrée de la structure, l'expression du champ électrique en basse fréquence (indice  $bf$ ) se limite à celle du premier ordre soit :

$$[\bar{E}_{x_{bf}}]_{z=-\ell} \approx [\bar{E}_{x1}]_{z=-\ell} = -j\omega \frac{\mu\ell}{w} I_o$$

et la tension développée aux bornes de la source courant vaut :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{bf} &= \int_0^d [\bar{E}_x]_{z=-\ell} dx = d [\bar{E}_x]_{z=-\ell} \\ &= j\omega \underbrace{\frac{\mu\ell d}{w}}_L I_o \end{aligned} \quad (4.58)$$

soit, fin de parenthèse :

$$\bar{V}_{bf} = j\omega L I_o ! \quad (4.59)$$

Jusqu'ici, on a vérifié l'équation de *Faraday*, mais a-t-on satisfait celle d'*Ampère*. La réponse est non ; il faut donc poursuivre le développement pour les composantes d'ordres supérieurs en fréquence qui mène à une série convergent vers la solution électromagnétique. Il y a cependant quelques détails à préciser au préalable :

- Les conditions aux limites s'appliquent pour déduire la valeur de la constante résultant de l'intégrale indéfinie.
- Pour le champ électrique, aucune composante tangentielle à chaque puissance en fréquence ne doit exister en  $z = 0$ .

- Pour le champ magnétique, on force un courant fixe à l'entrée dont la densité vaut  $J_{so} = \frac{I_o}{w}$ . On convient que la densité de courant peut varier suivant  $z$  et qu'il est probable que la densité à  $z = 0$  soit tout-à-fait différente de celle à  $z = -\ell$ . On applique donc la contrainte à l'entrée  $z = -\ell$ . Or la composante statique  $H_{y0}$  satisfait pleinement et à elle seule, la condition aux limites imposée sur la composante tangentielle  $[H_y]_{z=-\ell} = J_{so}$ ; les autres composantes d'ordres supérieurs du champ magnétique tangentiel doivent par conséquent être nulle à  $z = -\ell$ .

En y substituant (4.57) dans l'équation d'Ampère avec phaseurs, il découle :

$$\frac{\partial \bar{H}_y}{\partial z} = -j\omega\epsilon \bar{E}_x = \omega^2 \mu \epsilon \frac{I_o}{w} z .$$

La solution générale est :

$$\bar{H}_{y2} = \frac{1}{2} \omega^2 \mu \epsilon \frac{I_o}{w} z^2 + \bar{C}$$

dans laquelle la constante  $\bar{C}$  est déterminée par le fait que les composantes d'ordres supérieurs de  $H_y$  sont nulles à  $z = -\ell$ . Ainsi, on obtient :

$$\bar{H}_{y2} = \frac{1}{2} \omega^2 \mu \epsilon \frac{I_o}{w} (z^2 - \ell^2) . \quad (4.60)$$

En recommençant de la même manière depuis le début avec l'équation de Faraday et la composante  $\bar{H}_{y2}$ , on trouve la composante du troisième ordre en fréquence du champ électrique  $\bar{E}_{x3}$ , puis celle du quatrième ordre en fréquence du champ magnétique  $\bar{H}_{y4}$ , puis celle du cinquième ordre en fréquence du champ électrique  $\bar{E}_{x5}$  et ainsi de suite. Par exemple, de (4.55) dans laquelle on remplace  $\bar{H}_{y0}$  par  $\bar{H}_{y2}$  et on applique la conditions aux limites, on déduit :

$$\bar{E}_{x3} = j \frac{1}{2} \omega^3 \mu^2 \epsilon \frac{I_o}{w} \left( \frac{z^3}{3} - \ell^2 z \right) .$$

Finalement, à l'entrée  $z = -\ell$  :

$$[\bar{E}_{x3}]_{z=-\ell} = -j \frac{1}{3} \omega^3 \mu^2 \epsilon \ell^3 \frac{I_o}{w} \quad (4.61)$$

$$[\bar{E}_{x5}]_{z=-\ell} = -j \frac{2}{15} \omega^5 \mu^3 \epsilon^2 \ell^5 \frac{I_o}{w} \quad (4.62)$$

⋮

Il faut bien comprendre que le champ électrique à l'intérieur du matériau sans perte est la somme de toutes les composantes aux différents ordres en fréquence. Cette somme infinie converge vers une valeur bien connue :

$$[\bar{E}_x]_{z=-\ell} = [\bar{E}_{x1}]_{z=-\ell} + [\bar{E}_{x3}]_{z=-\ell} + [\bar{E}_{x5}]_{z=-\ell} \dots \quad (4.63)$$

$$= -j \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_o}{w} \underbrace{\left( \omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell + \frac{1}{3} (\omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell)^3 + \frac{2}{15} (\omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell)^5 \dots \right)}_{\tan(\omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell)} \quad (4.64)$$

ou

$$[\bar{E}_x]_{z=-\ell} = -j \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_o}{w} \tan(\omega \sqrt{\mu\epsilon} \ell) . \quad (4.65)$$

Cette dernière équation (4.65) reste valide quelle que soit la fréquence. Cependant, on prouve facilement que le cas quasi-statique est respecté si on pose la condition suivante à savoir  $\omega \sqrt{\mu\epsilon} \ell \ll 1$  soit :

$$f \ll \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon} \ell} . \quad (4.66)$$

On observe avec grand intérêt que la fréquence pour laquelle le comportement de l'inductance suit celui indiqué dans la théorie des circuits dépend des dimensions de la structure. À partir d'une certaine fréquence, le cas quasi-statique n'est plus applicable et il faut passer à la théorie des micro-ondes. On pourrait riposter en disant qu'une solution est de diminuer la taille des structures ce qui permet de pousser plus loin la fréquence limite. Malheureusement, on ne peut sans cesse miniaturiser les structures sans qu'interviennent des problèmes d'ordre :

- mécanique – la construction relèvera du défi,
- thermique – il faut dissiper la puissance via la surface,
- physique même – transistors dont la base n'aurait que quelques atomes d'épaisseur !

C'est là que les choses se compliquent et que se jouera l'avenir.

Une autre observation intéressante (en particulier lorsqu'on traitera des lignes de transmission en régime sinusoïdal permanent) peut être tirée de cette analyse. Avec (4.65) dans l'équation (4.58) découle une relation entre  $\bar{V}$  et  $\bar{I}$  qui permet d'obtenir l'impédance vue à l'entrée  $z = -\ell$ , impédance qu'on note par  $\bar{Z}_{in}$  :

$$\bar{Z}_{in} = j \underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{d}{w}}_{Z_o} \underbrace{\tan(\omega \sqrt{\mu\epsilon} \ell)}_{\beta} . \quad (4.67)$$

## 4.8.2 Condensateur

Dans le second cas, on laisse ouverte l'extrémité des plaques sur toute la largeur ; l'alimentation à l'extrémité opposée est une source tension  $\bar{V} = V_o$  uniforme sur la largeur. Sur la figure 4.26, on reconnaît immédiatement un condensateur. L'analyse pour la structure capacitive suit le même patron que l'inductive de la sous-section précédente. La présentation sera donc plus condensée.

Encore une fois, les constantes  $\bar{C}$  issues des intégrales indéfinies, sont déterminées par l'application des conditions aux limites des champs tangentiels. Par contre ici :

- l'absence de courant de surface à l'extrémité, force les composantes de tout ordre en fréquence du champ magnétique à être nulles à  $z = 0$  ;

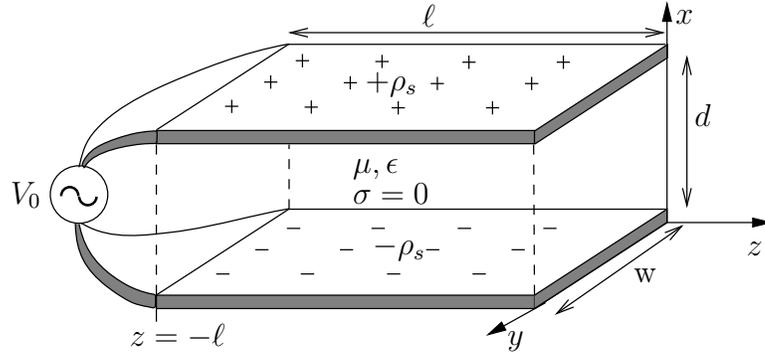


FIGURE 4.26 – Structure à deux plaques conductrices parallèles (en circuit ouvert) simulant une capacité.

- la tension à l'entrée  $\bar{V} = V_o$  est obligatoirement fixe de sorte que la condition aux limites de  $\bar{E}_x$  est satisfaite à l'entrée avec juste la composante statique ; les autres composantes d'ordres supérieurs doivent valoir zéro à  $z = -l$ .

On peut d'ores et déjà identifier la composante statique du champ électrique – il n'y a pas de composante statique du champ magnétique. La géométrie impose un champ orienté dans la direction  $(-\mathbf{a}_x)$  et d'amplitude  $\frac{V_o}{d}$  :

$$\bar{E}_{x0} = -\frac{V_o}{d} . \tag{4.68}$$

L'étape suivante consiste à entrer  $\bar{E}_{x0}$  de (4.68) dans la loi d'Ampère pour déduire  $\bar{H}_y$ . Donc, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{H}_y}{\partial z} = -j\omega\epsilon \bar{E}_{x0} = j\omega\epsilon \frac{V_o}{d}$$

ce qui donne :

$$\bar{H}_{y1} = j\omega\epsilon \frac{V_o}{d} z + \bar{C} .$$

Comme il n'y a pas de courant surfacique sur les plaques à  $z = 0$ , il faut que  $[\bar{H}_y]_{z=0} = 0$ . On trouve alors  $\bar{C} = 0$  d'où :

$$\bar{H}_{y1} = j\omega\epsilon \frac{V_o}{d} z . \tag{4.69}$$

Il faut maintenant prendre  $\bar{H}_{y1}$  dans l'équation de Faraday pour fermer la boucle, vérifier la condition aux limites du champ électrique tangentiel à  $z = -l$ . On reprend tout à partir de l'équation d'Ampère avec  $\bar{E}_{x2}$  et ainsi de suite, d'où :

$$\bar{E}_{x2} = \frac{1}{2}\omega^2\mu\epsilon \frac{V_o}{d} (z^2 - l^2) \tag{4.70}$$

$$\bar{H}_{y3} = -j\frac{1}{6}\omega^3\mu\epsilon^2 \frac{V_o}{d} (z^3 - 3l^2z) \tag{4.71}$$

En continuant le développement, on trouve que le champ magnétique à l'entrée  $z = -l$

est une série infinie de puissance en fréquence qui converge vers :

$$[\bar{H}_y]_{z=-\ell} = [\bar{H}_{y1}]_{z=-\ell} + [\bar{H}_{y3}]_{z=-\ell} + [\bar{H}_{y5}]_{z=-\ell} \dots \quad (4.72)$$

$$= -j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{V_o}{d} \underbrace{\left( \omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell + \frac{1}{3} (\omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell)^3 + \frac{2}{15} (\omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell)^5 \dots \right)}_{\tan(\omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell)} \quad (4.73)$$

où

$$[\bar{H}_y]_{z=-\ell} = j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{V_o}{d} \tan(\omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell) \quad (4.74)$$

Comme le courant à l'entrée, noté  $\bar{I}$ , correspond à  $w[\bar{H}_y]_{z=-\ell}$ , on peut obtenir une relation  $\bar{V}_{in}/\bar{I}_{in}$  et déduire l'expression de l'impédance vue à l'entrée (voir l'équation (4.67) pour les définitions de  $Z_o$  et de  $\beta$ ) :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{in} &= \frac{1}{w j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{d} \tan(\omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell)} \\ &= -j Z_o \cot(\beta \ell) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Le comportement est bien celui d'un condensateur à basse fréquence, i.e. lorsque  $\omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell \ll 1$  comme en (4.66) ; car, suivant cette condition, on a :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{in_{bf}} &= \frac{1}{w j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{d} \omega \sqrt{\mu \epsilon} \ell} \\ &= \frac{1}{j \omega \underbrace{\frac{\epsilon \ell w}{d}}_C} \\ &= \frac{1}{j \omega C} ! \end{aligned} \quad (4.76)$$

## Exercices

### Question 1

Une charge est distribuée avec une densité  $\rho = \rho_o r/a$ , où  $\rho_o$  est une constante dans une région cylindrique  $r < a$ . Exprimez  $\mathbf{D}$  partout dans l'espace.

### Question 2

Un assemblage est constitué de deux cylindres coaxiaux. Le premier cylindre est plein et possède un rayon  $3a$ ; le second est creux avec un rayon interne  $4a$  et une épaisseur  $a$ . Les cylindres sont assumés infiniment longs suivant l'axe  $z$  sur lequel ils sont centrés. Un courant  $I$  circule dans la direction  $z^+$  sur le cylindre interne avec une densité volumique uniforme; il revient par le cylindre creux externe avec, encore une fois, une densité volumique uniforme. Exprimez  $\mathbf{H}$  partout dans l'espace.

### Question 3

Deux sphères conductrices concentriques creuses et minces ont des rayons  $a$  et  $b$  ( $b = 2a$ ) respectivement. Elles sont séparées par un diélectrique de permittivité  $\epsilon = 2\epsilon_o$ . La plus petite sphère est remplie d'air. Une densité surfacique de charges  $\rho_{sa} = \frac{2\epsilon_o}{a^2} C/m^2$  couvre la plus petite tandis qu'une densité surfacique de charges de  $\rho_{sb} = -\rho_{sa}$  couvre la plus grande.

Exprimez le champ électrique en fonction de  $r$  (puisque  $E$  est indépendant de  $\theta$  et  $\phi$  par symétrie).

### Question 4

Dans une région de l'espace existe un champ statique  $\mathbf{E} = yz\mathbf{a}_x + zx\mathbf{a}_y + xy\mathbf{a}_z$ . Déterminez la différence de potentiel entre chacune des paires de points suivantes :

- a) (2,1,1) et (1,4,0.5);
- b) (2,2,2) et (1,1,1).

### Question 5

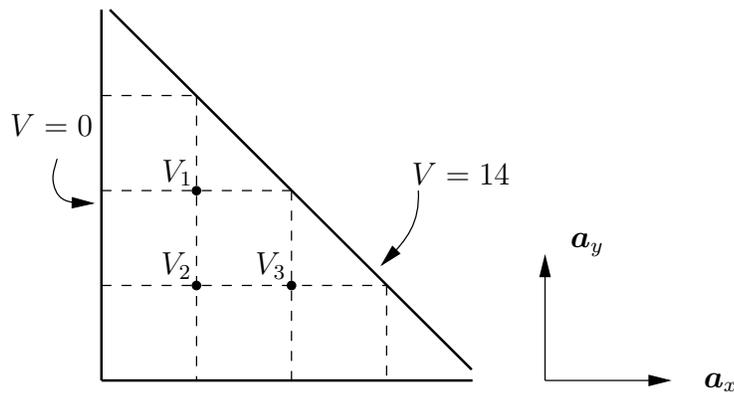
Soit un câble coaxial dont le conducteur interne a un rayon  $a$  et le conducteur externe, un rayon interne  $b$ . Les conducteurs sont parfaits, ce qui implique des densités de courants surfaciques et charges surfaciques lorsque les conditions aux limites sont appliquées. En supposant une différence de potentiel  $V_o$  entre les deux conducteurs (celui externe est au potentiel 0), utilisez l'équation de *Laplace* en coordonnées cylindriques

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

pour déduire partout dans la région entre les deux conducteurs :

- a) l'expression du potentiel en fonction de  $V_o$  et  $r$  ;  
 b) et de là, l'expression du champ électrique.

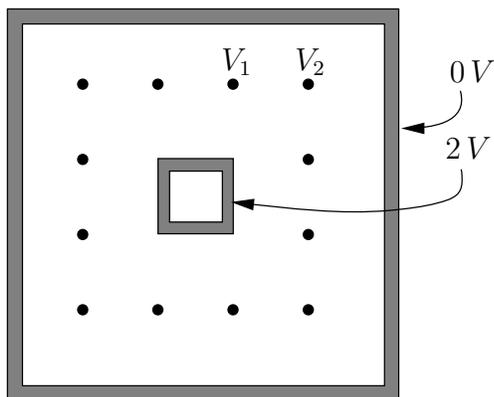
### Question 6



Trois bandes conductrices infiniment longues forment un arrangement dont la section est reproduite ci-dessus. La région entre les trois bandes (domaine de définition) est maillée avec des noeuds équidistants d'une distance  $d$ .

Écrivez le set d'équations à résoudre par la méthode des différences finies. De là, approximez le potentiel aux points d'échantillonnage 1, 2 et 3.

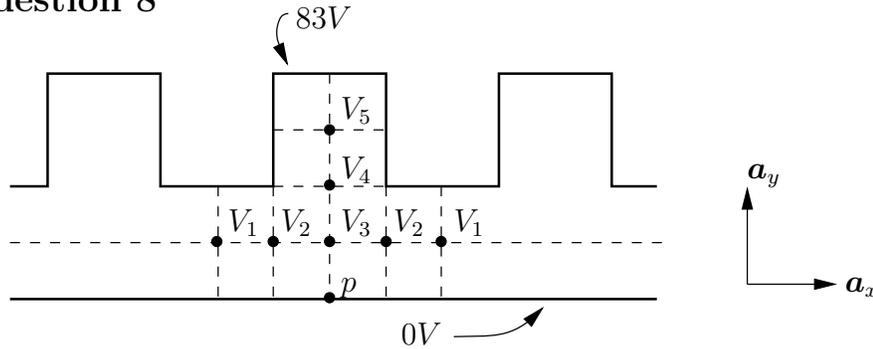
### Question 7



On applique une tension de  $2 V$  sur un conducteur carré infiniment long centré à l'intérieur d'un autre conducteur carré à la masse ( $0 V$ ). La région entre les conducteurs (domaine de définition) est maillée avec des noeuds équidistants d'une distance  $d$ . À cause de la symétrie, seules deux valeurs distinctes de potentiels sont possibles.

Approximez  $V_1$  et  $V_2$  par la méthode des différences finies.

**Question 8**



La section d'un arrangement de conducteurs infiniment longs dans la direction normale est reproduite ci-dessus. L'arrangement est répété à l'infini. La région entre les conducteurs (domaine de définition) est maillée avec des noeuds équidistants d'une distance  $d$  comme montré. Approximez :

- a) le potentiel aux points d'échantillonnage 1, 2, 3, 4 et 5 ;
- b) le champ électrique au point 2 ;
- c) la densité surfacique de charges au point  $p$ .

**Question 9**

Déterminez :

- a) l'espacement entre les deux plaques de dimension  $10 \times 10 \text{ cm}$  d'un condensateur à plaques parallèles de  $10 \text{ pF}$  dont lorsque le diélectrique a une permittivité  $\epsilon = 2.25\epsilon_0$  ;
- b) le rayon  $a$  et  $b = 2a$  de deux sphères conductrices concentriques séparées par un diélectrique de permittivité  $\epsilon = 2.25\epsilon_0$  produisant une capacitance de  $10 \text{ pF}$  ;
- c) la rayon d'une sphère conductrice isolée dans le vide ayant une capacitance de  $10 \text{ pF}$ .

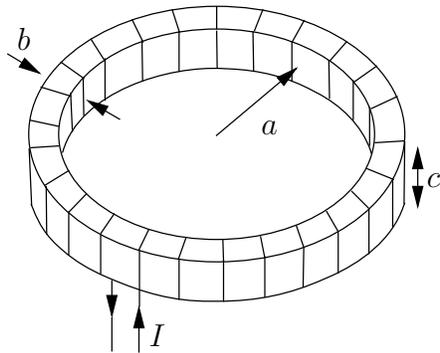
**Question 10**



Soient deux plaques conductrices infinies parallèles et espacées d'une distance  $d$  qui réalisent un condensateur. Entre les deux plaques, on place deux diélectriques différents : l'un d'une épaisseur  $d_1$  et d'une constante  $\epsilon_{r1}$  ; l'autre d'une épaisseur  $d_2$  ( $d = d_1 + d_2$ ) et d'une constante  $\epsilon_{r2}$ . Le tout apparaît sur la figure ci-dessus.

- a) Si la plaque supérieure est au potentiel  $V_0$  et celle inférieure à 0, évaluez le potentiel à l'interface entre les deux diélectriques ;
- b) exprimez la capacitance par unité de surface.

## Question 11



Une fil conducteur est enroulé avec  $N$  tours, autour d'un tore magnétique ayant une section rectangulaire  $b \times c$  comme sur la figure ci-dessus. Exprimez l'inductance de cette bobine toroïdale.

## Question 12

Soit le tore magnétique de l'exemple 4.14 et dont le schéma du circuit magnétique équivalent apparaît sur la figure 4.23. Trouvez la valeur si  $V_m = NI = 200 \text{ A} \cdot \text{tours}$  :

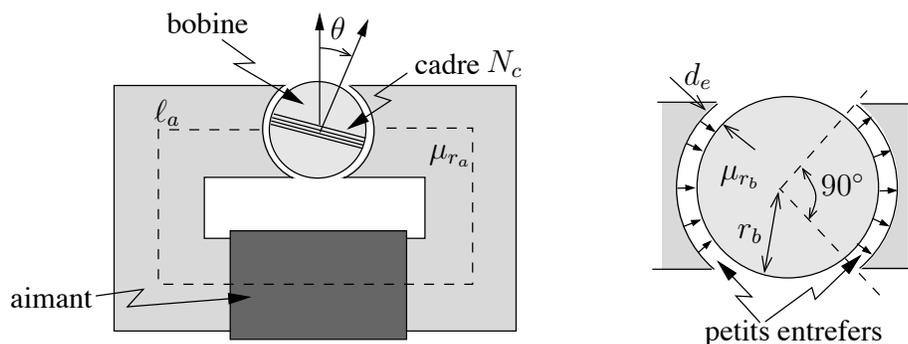
- du flux circulant dans la section  $GFAB$  ;
- du champ d'induction magnétique dans l'entrefer  $B_{\text{entrefer}}$ .

## Question 13

Un ballon sonde en papier d'aluminium est gonflé par pression électrostatique produite en répartissant des charges électriques à la surface du ballon. Soit un ballon de rayon  $a = 2 \text{ m}$  avec une charge totale  $Q = +10^{-4} \text{ C}$ .

- Exprimez la variation d'énergie électrique emmagasinée si la rayon du ballon augmente d'une valeur  $dr$  ;
- Déduisez la pression électrostatique sur la paroi.

## Question 14



Un galvanomètre est constitué d'une armature ferromagnétique  $\mu_{r_a} = 500$  dont la section carré vaut  $c \times c = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ , de longueur moyenne  $\ell_a = 8 \text{ cm}$  et dont l'entrefer a une forme cylindrique. Dans cet entrefer est placé une bobine ferromagnétique  $\mu_{r_b} = 10^3$  de rayon  $r_b = 0.5 \text{ cm}$  comportant 40 tour de fils formant un cadre. La bobine et son cadre peuvent pivoter librement. Un aimant dans l'armature produit un potentiel scalaire magnétique  $NI = 200 \text{ A} \cdot \text{tours}$ .

La forme de l'entrefer et de la bobine fait en sorte que le flux dans les petits entrefers qui séparent l'armature de la bobine  $d_e = 0.5 \text{ mm}$ , est radial avec une densité uniforme. On considère que la réluctance de la bobine correspond à celle d'un bloc de longueur égale à  $\ell_b = 2r_b = 1 \text{ cm}$  avec une section identique à celle de l'armature.

- a) Calculez la densité de flux dans les petits entrefers ;
- b) Si un ressort ayant une constante de rappel de couple  $k = 2 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}/^\circ$  est relié au cadre, calculez sur quel angle  $\theta$  le cadre pivote avec un courant de  $2 \text{ mA}$  dans le fil du cadre.

**Réponses :**

$$1. \mathbf{D} = D_r(r)\mathbf{a}_r \text{ avec } D_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_o r^2}{3a} & r < a \\ \frac{\rho_o a^2}{3r} & r > a . \end{cases}$$

$$2. \mathbf{H} = H_\phi(r)\mathbf{a}_\phi \text{ avec } H_\phi(r) = \begin{cases} \frac{Ir}{18\pi a^2} & r < 3a \\ \frac{I}{2\pi r} & 3a < r < 4a \\ \frac{I}{2\pi r} \left( \frac{25a^2 - r^2}{9a^2} \right) & 4a < r < 5a \\ 0 & r > 5a . \end{cases}$$

$$3. \mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{a}_r \text{ avec } E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{r^2} \text{ V/m} & a < r < b \\ \frac{-6}{r^2} \text{ V/m} & r > b . \end{cases}$$

4. a)  $V_{ab} = 0$  ; b)  $V_{ab} = -7 \text{ V}$ .

5. a)  $V = V_o \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}$  ; b)  $\mathbf{E} = \frac{V_o}{r \ln(b/a)} \mathbf{a}_r$ .

6.  $V_1 = (V_2 + 28)/4$ ,  $V_2 = (V_1 + V_3)/4$ ,  $V_3 = (V_2 + 28)/4$  ;  
par symétrie  $V_1 = V_3 = 8 \text{ V}$ ,  $V_2 = 4 \text{ V}$  ;

7.  $V_1 = 0.8 \text{ V}$  et  $V_2 = 0.4 \text{ V}$ .

8. a)  $V_1 = 41 \text{ V}$ ,  $V_2 = 40.5 \text{ V}$ ,  $V_3 = 38 \text{ V}$ ,  $V_4 = 71 \text{ V}$ ,  $V_5 = 80 \text{ V}$  ;  
b)  $[\mathbf{E}]_2 = -\frac{83}{2d} \mathbf{a}_y + \frac{3}{2d} \mathbf{a}_x \text{ V/m}$  ; c)  $[\rho_s]_p = -38\epsilon_o/d \text{ C/m}^2$ .

9. a)  $d = 1.99 \text{ cm}$ ; b)  $C = \frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}$  donc  $a = 2 \text{ cm}$ ;  
c) prendre  $b \rightarrow \infty$ ,  $r = a = 9 \text{ cm}$ .
10. a)  $\mathbf{E}_1 = E_{z1}\mathbf{a}_z$  et  $\epsilon_1 E_{z1} = \epsilon_2 E_{z2}$ ,  $[V]_{z=d_1} = \frac{\epsilon_r d_1}{\epsilon_r d_1 + \epsilon_r d_2} V_0$ ;  
b)  $C/A = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2}$ .
11.  $B = \mu \frac{NI}{2\pi r}$ ,  $L = \mu \frac{N^2 c}{2\pi} \ln(1 + b/a)$ .
12. a)  $\Psi_{GFAB} = 226 \times 10^{-6} \text{ Wb}$ ;  
b)  $\Psi_{BD} = \Psi_{entrefer} = \Psi_{EG} = 33.36 \times 10^{-6} \text{ Wb}$ ,  $B_{entrefer} = 0.1112 \text{ Wb/m}^2$ .
13. a)  $dW_e \approx -\frac{Q^2 dr}{8\pi\epsilon_0 a^2}$  puisque  $dv = 4\pi a^2 dr$ ;  
b)  $P_e = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4} = 0.2235 \text{ N/m}^2$  sachant que  $P_e = \frac{dW_e/dr}{S}$  avec  $S = 4\pi a^2$ .
14. a)  $\Re_{entrefer} = 5.066 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$ ,  $\Psi_{entrefer} = \Psi = 17.41 \times 10^{-6} \text{ Wb}$ ,  
donc  $B_{entrefer} = 0.2217 \text{ Wb/m}^2$ ;  
b)  $T = Fr_b = 2 \times (B(N_c I)c) r_b = k\theta[^\circ]$ ,  $\theta = 8.9^\circ$ .



# Chapitre 5

## Onde plane uniforme

### 5.1 Introduction

L'onde plane uniforme est une solution très simple des équations de *Maxwell*. Une telle onde n'existe cependant pas dans la réalité car il faudrait une source infiniment grande pour la produire et la puissance d'une telle source serait aussi infinie. Néanmoins, l'onde plane présente des caractéristiques intéressantes qui se retrouvent localement sur des ondes provenant de sources réelles. On peut de plus exprimer toute onde électromagnétique comme une somme d'ondes planes. Celles-ci forment une base orthonormée conceptuellement simple sur laquelle on peut projeter toutes les ondes possibles.

Il est également possible de représenter toute onde comme une somme de sources ponctuelles. L'onde émise par une source ponctuelle dans un milieu uniforme et isotrope est normalement sphérique : l'onde voyage à la même vitesse dans toutes les directions, donc chaque point d'un front d'onde doit être, pour un temps fixe, à égale distance de la source. L'équivalent dans le plan est le caillou jeté dans l'eau qui produit une onde circulaire s'éloignant de l'endroit où est tombé le caillou. La sphère en grandissant présente une surface qui devient de plus en plus plane. On peut également faire l'analogie avec le fait que la Terre a été longtemps supposée plane car la région de visibilité de chaque être humain est trop petite pour que la courbure du sol soit importante. La Terre est donc localement plane ; une planète plus imposante posséderait une région localement plane encore plus grande.

La simplicité des calculs, l'analogie qui peut être faite pour des ondes réelles et le fait qu'elle forment une base font qu'il vaut la peine de s'attarder aux ondes planes. Celles-ci permettent de mieux comprendre les mécanismes de la propagation libre autant que celle guidée par une ligne de transmission.

### 5.2 Rappel : équations de *Maxwell*, relations constitutives

Au chapitre 3, les équations de *Maxwell* sont dérivées. Les équations de *Faraday*, d'*Ampère* de même que les relations de *Gauss* ont été obtenues :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.4)$$

La forme différentielle est utilisée ici car elle est plus pratique afin d'obtenir des solutions pour chacun des champs.

Dans ces expressions  $\mathbf{E}$  est le champ électrique,  $\mathbf{H}$  est le champ magnétique,  $\mathbf{D}$  est la densité de flux électrique,  $\mathbf{B}$  est la densité de flux magnétique,  $\mathbf{J}$  est la densité de courant électrique et  $\rho$  est la densité de charge électrique. Chacune de ces quantités peut varier dans le temps et dans l'espace.

Les équations de *Maxwell* sont des équations différentielles spatio-temporelles impliquant des dérivées de premier ordre et couplant le champ électrique et le champ magnétique. Tout champ électromagnétique doit satisfaire ces équations. Il est donc possible de vérifier si une expression mathématique correspond à un champ physique possible en testant l'expression dans les équations de *Maxwell*.

Il y a deux variables distinctes pour chacun des champs afin de tenir compte de l'impact des matériaux. Au chapitre 2, les liens entre les couples  $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$  et  $(\mathbf{H}, \mathbf{B})$  sont établis :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5.6)$$

où  $\epsilon$  la permittivité électrique et  $\mu$  la perméabilité magnétique encapsulent les propriétés du milieu de propagation. Ces relations constitutives (ou matérielles) tiennent compte de deux aspects. Premièrement elles établissent les liens entre les champs lorsqu'il n'y a pas de matériau (propagation dans le vide). Dans ce cas  $\epsilon = \epsilon_o = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m et  $\mu = \mu_o = 1.256 \times 10^{-6}$  H/m sont des constantes.

En second lieu, lorsque le champ électromagnétique est dans un milieu constitué d'atomes, les nuages électroniques réagissent à la présence des champs et produisent eux-mêmes des champs qui viennent s'ajouter à ceux imposés et modifient ainsi le champ total. L'effet du matériau est contenu dans sa permittivité et sa perméabilité relatives telles que  $\epsilon = \epsilon_o \epsilon_r$  et  $\mu = \mu_o \mu_r$ .

Il importe de garder à l'esprit que les quantités  $\epsilon$  et  $\mu$  sont des fonctions qui peuvent varier dans l'espace et dans le temps.

### 5.3 Équation d'onde dans un matériau sans perte

Dans la recherche de solutions aux équations de *Maxwell*, il est pratique de découpler les équations. L'objectif est ici d'obtenir une équation uniquement pour le champ électrique et une autre pour le champ magnétique.

Afin de simplifier l'analyse, il est supposé que les paramètres du matériau ( $\epsilon$  et  $\mu$ ) ne changent pas en fonction du temps (invariants), sont les mêmes en tout point de l'espace (milieu homogène) et dans toutes les directions de propagation (milieu isotrope). Ainsi les perméabilité  $\mu_r$  et permittivité  $\epsilon_r$  relatives sont des constantes.

De plus, il sera initialement plus facile de considérer le cas où le courant est nul  $\mathbf{J} = 0$ . Cela revient à supposer que le matériau est à conductivité électrique  $\sigma$  nulle, car  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , selon les résultats des chapitres 2 et 3. À la fin du présent chapitre, il deviendra évident que de tels matériaux à conductivité nulle permettent la propagation sans perte des ondes électromagnétiques.

### 5.3.1 Développement de l'équation d'onde

En utilisant les relations constitutives, on peut écrire les équations de *Maxwell* en éliminant  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$ . Pour les équations de *Faraday* et *d'Ampère*, le résultat est :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (5.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.8)$$

où la permittivité  $\epsilon$  et la perméabilité  $\mu$  sont mises devant les dérivées car elles sont supposées invariantes en temps et où la densité de courant ( $\mathbf{J}$ ) a également été supposée nulle.

Avec l'objectif de découpler ces deux équations, il appert que de prendre le rotationnel de l'une des deux produit un terme directement proportionnel à l'autre équation. Par exemple :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left( -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \quad (5.9)$$

$$= -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5.10)$$

$$= -\mu \frac{\partial \nabla \times \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5.11)$$

$$= -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (5.12)$$

Dans ces manipulations,  $\mu$  peut être mis devant le rotationnel car il est supposé constant spatialement (milieu homogène et isotrope), l'ordre des dérivées spatiales (le rotationnel) et temporelles peut être interchangé sans problème et l'invariance temporelle de  $\epsilon$  est utilisée pour le placer devant la dérivée seconde temporelle à la dernière étape.

Le membre de gauche de l'équation 5.12 peut être simplifié en se rappelant une identité vectorielle :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (5.13)$$

Si l'onde se propage dans un milieu sans source de champ, alors la relation de *Gauss* impose que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Il découle qu'une onde électromagnétique se propageant dans un

milieu invariant, homogène, isotrope et sans source doit satisfaire :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (5.14)$$

Cette équation est couramment nommée «Équation d'onde ». Elle exprime un seul champ,  $\mathbf{E}$  à l'aide de dérivées spatiales (le Laplacien) et temporelles de second ordre. Une équation équivalente pour  $\mathbf{H}$  est obtenue en prenant le rotationnel de l'équation d'*Ampère* et en suivant le même processus.

En ayant trouvé une solution pour le champ  $\mathbf{E}$ , on peut retrouver le champ  $\mathbf{H}$  qui lui est lié en utilisant l'équation de *Faraday* (5.10)

Tout champ électrique qui peut exister dans un milieu invariant, uniforme, isotrope, sans source et de conductivité nulle doit satisfaire l'équation d'onde. Cette équation a permis aux pionniers de l'électromagnétisme de prédire que les champs électriques et magnétiques allaient produire des ondes auto entretenues et se propageant.

### 5.3.2 Onde plane uniforme se propageant selon $z$

Afin de mieux comprendre l'équation d'onde et de bien saisir sa nature propagative, il est utile d'étudier un cas simple. L'équation (5.14) peut d'abord être écrite en rendant explicites les dérivées spatiales et les composantes du vecteur de champ, dans un système cartésien :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z) = \mu\epsilon \frac{\partial^2 (E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z)}{\partial t^2}. \quad (5.15)$$

Il est très important de remarquer que l'équation (5.15) est en réalité la combinaison de trois équations différentielles indépendantes : une pour chacune des trois composantes du champ. Le problème peut ensuite être réduit en considérant uniquement certaines composantes du champ et certaines dérivées spatiales. Par exemple, les suppositions suivantes peuvent être utilisées :

- les champs sont uniformes dans un plan : ici  $z = \text{cte}$ , donc toutes les dérivées par rapport à  $x$  et à  $y$  sont nulles ;
- les champs n'ont qu'une composante – on choisit l'axe  $x$  pour le champ électrique.

En réalité, ces hypothèses sont réalisées en connaissant déjà le résultat souhaité : c'est l'onde plane uniforme. En imposant les dérivées nulles en  $x$ , et en  $y$ , le champ sera, pour une coordonnée  $z$ , donnée, constant pour toutes les valeurs de  $x$ , et de  $y$ . Les surfaces pour lesquelles le champ  $\mathbf{E}$  est constant forment des plans perpendiculaires à l'axe  $z$ . On parle alors de front d'onde plan.

Cette première hypothèse permet d'écrire l'équation d'onde pour une onde plane ayant ses fronts d'onde plans perpendiculaires à l'axe  $z$  :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z) = \mu\epsilon \frac{\partial^2(E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z)}{\partial t^2}. \quad (5.16)$$

Il est encore une fois clair qu'il s'agit de 3 équations différentielles indépendantes. La solution pour chacune des composantes ne dépend pas des autres. On pourra trouver une solution pour la composante en  $x$ , et une autre pour la composante en  $y$ , ou en  $z$ . Il convient toutefois de remarquer qu'il s'agit en fait de trois fois la même équation. L'analyse pour une seule composante sera donc suffisante pour une compréhension plus générale.

Considérons d'abord la composante  $E_z$  du champ. L'utilisation de l'équation de *Faraday* (5.7) exige de calculer le rotationnel du champ  $\mathbf{E}$ . Or, les dérivées en  $x$  et en  $y$  ont été imposées nulles par la première hypothèse. Cela implique que le seul terme possible est de la forme  $E_z(\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z)$  où le produit vectoriel est également nul. Il en découle que la dérivée du champ  $\mathbf{H}$  doit être nulle : le champ  $\mathbf{H}$  doit être statique. En insérant ce champ statique dans l'équation de *Faraday* (5.8), on constate que le champ  $\mathbf{E}$  doit également être statique. Il en ressort que la composante du champ perpendiculaire aux fronts d'onde plans ne peut pas donner lieu à une perturbation spatio-temporelle qui se propage.

Restent les composantes  $E_x$  et  $E_y$ . On s'attend à un résultat similaire dans les 2 cas car une rotation du système de coordonnées autour de l'axe  $z$  permet d'échanger une composante pour l'autre. Il est donc concevable pour débiter de ne considérer qu'une seule composante, en oubliant pas que l'autre composante peut également exister de manière indépendante.

La seconde hypothèse mentionnée plus haut revient à imposer  $E_y = E_z = 0$  et à considérer uniquement l'équation pour la composante en  $x$  :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (5.17)$$

Le problème de trouver le champ électrique consiste à résoudre cette équation différentielle spatio-temporelle du second ordre. La quantité  $E_x$  sera une fonction de  $z$  et de  $t$ . Le champ est vectoriel et exprimé comme :

$$\mathbf{E} = E_x(z, t) \mathbf{a}_x. \quad (5.18)$$

L'application de l'équation de *Faraday* permet de retrouver le champ  $\mathbf{H}$ . Ici :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (5.19)$$

On aurait pu procéder à partir du champ magnétique  $\mathbf{H}$  pour trouver une relation similaire à (5.14) en remplaçant simplement  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{H}$ . Dans ce cas, l'équation unissant  $E_x$  et  $H_y$  pour une propagation selon  $z$  (correspondante à (5.19)) serait :

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (5.20)$$

En plaçant (5.19) dans (5.20), on retrouve effectivement (5.17). Le champ  $\mathbf{E}$  et le champ  $\mathbf{H}$  obéissent donc tous deux à l'équation d'onde.

### 5.3.3 Solution à l'équation d'onde temporelle

On vérifie que la solution générale de l'équation d'onde – laquelle est une équation aux différences partielles du deuxième ordre – est :

$$E_x(z, t) = E^+ f(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + E^- g(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) \tag{5.21}$$

où  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  représentent deux fonctions quelconques – appelées fonctions spatio-temporelles – des variables  $t$  et  $z$ . Ces fonctions de même que les constantes  $E^+$  et  $E^-$  dépendent de la source qui génère l'onde. Il est logique que la forme de l'onde soit celle de la source avec plus ou moins de retard ou d'atténuation dans l'espace : avec une antenne qui émet un signal carré, on devrait observer une onde carrée de même fréquence à la réception. Quant aux constantes  $E^+$  et  $E^-$ , elles sont liées à la puissance de la source et peuvent être déterminées grâce à l'application des conditions aux limites sur la source, un peu l'équivalent des conditions initiales pour des équations différentielles en circuit.

La solution correspondante pour  $H_y(z, t)$  est déduite en substituant (5.21) dans (5.19) :

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E^+ f'(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) - E^- g'(t + z\sqrt{\mu\epsilon}))$$

donc

$$H_y = H^+ f(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + H^- g(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) \tag{5.22}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} \left( E^+ f(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + E^- g(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) \right) . \tag{5.23}$$

### 5.3.4 Observations

On se doit d'ouvrir ici une parenthèse. Quoique l'étude se limite aux ondes planes uniformes se propageant dans un matériau sans perte, des observations peuvent être faites, lesquelles demeureront valides même dans le cas plus général d'un matériau quelconque.

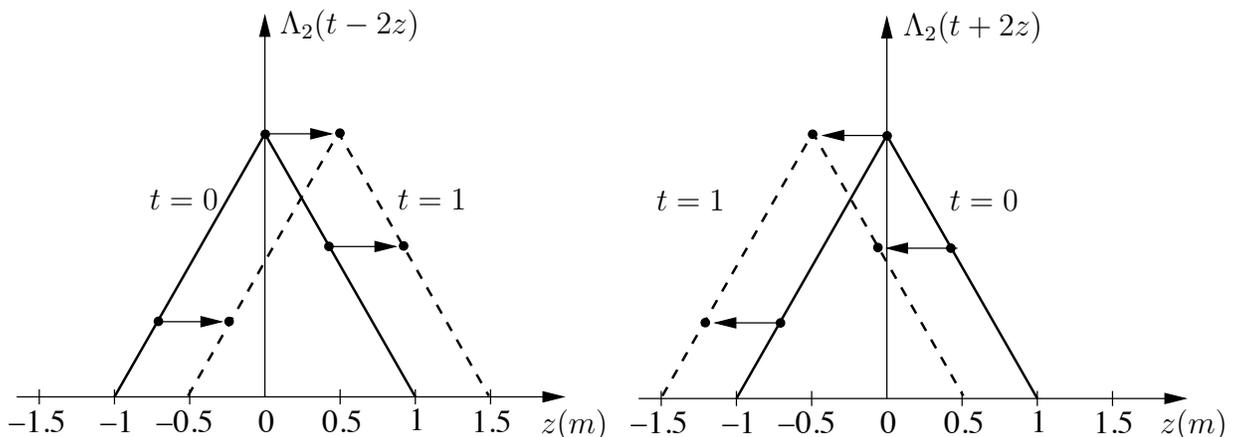


FIGURE 5.1 – Déplacement d'une fonction spatio-temporelle  $\Lambda_2(t \mp 2z)$ .

Les fonctions spatio-temporelles  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  sont toutes deux reliées au signal émis par la source. Elles sont donc similaires entre elles et similaires au signal émis. La différence apparaît dans le signe devant  $z$  à l'intérieur de leur argument.

- Comme le temps croît, il faut que  $z$  augmente au fur et à mesure que le temps progresse afin de conserver l'argument constant  $t - z\sqrt{\mu\epsilon} = \text{cte}$ . C'est l'inverse pour l'argument  $t + z\sqrt{\mu\epsilon} = \text{cte}$ . En fait, la représentation de la fonction  $f(t - z\sqrt{\mu\epsilon})$  au temps  $t = 0$  puis au temps  $t = 1$  et ainsi de suite, montre que le signal se déplace dans la direction positive de l'axe  $z$  qu'on note en  $z+$ ; et vice-versa pour  $g(t + z\sqrt{\mu\epsilon})$ , en  $z-$ . Ceci explique pourquoi les termes  $E^+$  et  $E^-$  devant les fonctions spatio-temporelles sont surmontés des indices  $+$  et  $-$  respectivement : l'onde positive et négative selon leur direction de propagation.
- Le déplacement du signal en fonction du temps dépend de la constante associée au terme  $z$  – ici lorsque  $\sigma = 0$ , la constante vaut  $\sqrt{\mu\epsilon}$ . Plus la constante diminue, plus le déplacement est grand. Or, les unités de cette constante montrent que  $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$  correspond à une vitesse appelée vitesse de propagation  $v_p$ .

La figure 5.1 illustre le cas d'une fonction  $\Lambda_2(t \mp 2z)$  en fonction de  $z$  à deux temps différents. On peut observer le déplacement du signal dans des directions opposées à une vitesse de  $\frac{1}{2} m/s$ . Les deux signaux peuvent exister simultanément tels un signal émis et un signal réfléchi; ou l'un sans l'autre.

Les expressions des champs électrique et magnétique se ressemblent beaucoup mais comportent aussi quelques différences :

- L'amplitude des composantes du champ magnétique  $H^+$  et  $H^-$ , est proportionnelle à celle des composantes du champ électrique via le terme  $\frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}}$ . On vérifie que le terme  $\sqrt{\mu/\epsilon}$  possède les unités d'une impédance – en  $\Omega$  – ce qui explique son appellation d'impédance intrinsèque  $\eta$  du matériau.
- Il y a ensuite un changement de signe qui affecte la fonction  $g(\cdot)$  qui se propage dans la direction négative de l'axe  $z$ . Ce changement de signe a des implications beaucoup plus importantes qu'il ne paraît. Il permet d'identifier dans quelle direction se propage l'onde et fait en sorte que des solutions autres que triviales deviennent possibles lorsque l'onde passe d'un milieu à un autre.

## 5.4 Onde sinusoïdale dans un milieu quelconque

Pour pousser l'étude de l'onde plane uniforme un peu plus loin, il est avantageux de travailler avec les phaseurs dans le régime sinusoïdal permanent. La raison est double :

- les équations aux différentielles partielles deviennent plus simples à solutionner;
- on sait qu'avec la transformée de *Fourier* tout signal peut se décomposer en une somme de composantes sinusoïdales à des fréquences différentes, avec des déphasages et des amplitudes spécifiques.

On peut maintenant analyser le comportement de l'onde électromagnétique dans un milieu général i.e. dans un milieu dont la conductivité n'est pas nécessairement nulle.

Pour débiter dans le mode sinusoïdale permanent, il faut prendre les fonctions spatio-temporelles suivantes (on rappelle que dans un milieu ayant  $\sigma = 0$  comme celui de la section précédente,  $\sqrt{\mu\epsilon} = 1/v_p$ ) :

$$\left. \begin{aligned} f(\cdot) \\ g(\cdot) \end{aligned} \right\} = \cos(\omega(t \mp z/v_p)) = \cos(\omega t \mp \beta z) \tag{5.24}$$

où on définit ce qui deviendra la constante de phase :

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} . \tag{5.25}$$

On reprend les équations de *Maxwell* sous forme différentielle avec les différences suivantes :

- toutes les dérivées par rapport au temps  $\frac{\partial}{\partial t}$  peuvent être remplacées par  $j\omega$  ;
- le courant de conduction existe dans le matériau ; on conserve donc le terme de densité volumique de courant  $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$  ;
- les quantités temporelles sont remplacées par leur phaseur respectif et des constantes complexes peuvent en découler.

Les nouvelles équations correspondant aux équations (5.19) et (5.20) s'écrivent :

$$\frac{d\bar{E}_x}{dz} = -j\omega\mu \bar{H}_y \tag{5.26}$$

$$\frac{d\bar{H}_y}{dz} = -(\sigma + j\omega\epsilon) \bar{E}_x . \tag{5.27}$$

On note que  $\bar{E}_x$  est le phaseur du champ électrique tel que  $E_x(z, t) = \text{Re}\{\bar{E}_x(z)e^{j\omega t}\}$  et de façon similaire pour  $\bar{H}_y$ . L'équation d'onde en régime sinusoïdal permanent dans un milieu quelconque devient alors :

$$\frac{d^2\bar{E}_x}{dz^2} = \bar{\gamma}^2 \bar{E}_x \tag{5.28}$$

où  $\bar{\gamma}$  est appelé la constante de propagation et est défini ainsi :

$$\bar{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} . \tag{5.29}$$

Les expressions des champs qui solutionnent l'équation d'onde (5.28) sont :

$$\bar{E}_x(z) = \bar{E}^+ e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{E}^- e^{+\bar{\gamma}z} \tag{5.30}$$

$$\bar{H}_y(z) = \bar{H}^+ e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{H}^- e^{+\bar{\gamma}z} \tag{5.31}$$

$$= \frac{1}{\bar{\eta}} \left( \begin{array}{c} \bar{E}^+ e^{-\bar{\gamma}z} \\ \uparrow \\ \bar{E}^- e^{+\bar{\gamma}z} \end{array} \right) \tag{5.32}$$

où  $\bar{\eta}$  est l'impédance intrinsèque du matériau en  $\Omega$  et est définie ainsi :

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}. \quad (5.33)$$

À moins que le matériau soit sans perte ( $\sigma = 0$ ), l'impédance intrinsèque est alors un nombre complexe :

$$\bar{\eta} = \eta e^{j\zeta}. \quad (5.34)$$

### Exemple 5.1

Soit une onde plane dans le vide.

- Déterminez la constante de propagation  $\bar{\gamma}$  et l'impédance intrinsèque  $\bar{\eta}$  à 10 MHz.

De (5.29), on trouve :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \sqrt{j(2\pi \times 10^7)(4\pi \times 10^{-7}) \times j(2\pi \times 10^7)(\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9})} \\ &= \sqrt{\underbrace{j8\pi^2}_{8\pi^2 \angle 90^\circ} \underbrace{\left(j\frac{10^{-2}}{18}\right)}_{0.000556 \angle 90^\circ}} \end{aligned}$$

ou mieux encore

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{(j(2\pi \times 10^7))^2}{(3 \times 10^8)^2}} = \frac{j(2\pi \times 10^7)}{\underbrace{3 \times 10^8}_c} \\ &= j0.2095 \text{ m}^{-1}. \end{aligned}$$

Et de (5.33), on trouve :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \eta_o = \sqrt{\frac{j(2\pi \times 10^7)(4\pi \times 10^{-7})}{j(2\pi \times 10^7)(\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9})}} \\ &= 120\pi \approx 377 \Omega. \end{aligned}$$

### Exemple 5.2

Soit l'eau douce dont les caractéristiques électriques sont les suivantes :  $\epsilon_r = 80$ ,  $\mu_r = 1$  et  $\sigma = 10 \text{ mS/m}$  pour des fréquences inférieures à 100 MHz.

- Déterminez la constante de propagation  $\bar{\gamma}$  et l'impédance intrinsèque  $\bar{\eta}$  à 10 MHz.

De (5.29) :

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} &= \sqrt{j(2\pi \times 10^7)(4\pi \times 10^{-7})(0.01 + j(2\pi \times 10^7)(80 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}))} \\ &= \sqrt{\underbrace{j8\pi^2}_{8\pi^2 \angle 90^\circ} \underbrace{(0.01 + j\frac{1.6}{36})}_{0.04556 \angle 77.4^\circ}} \\ &= 1.9 \angle 83.7^\circ = (0.21 + j1.88) m^{-1} .\end{aligned}$$

De (5.33) :

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \sqrt{\frac{j(2\pi \times 10^7)(4\pi \times 10^{-7})}{0.01 + j(2\pi \times 10^7)(80 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9})}} \\ &= \sqrt{\frac{8\pi^2 \angle 90^\circ}{0.04556 \angle 77.4^\circ}} \\ &= 41.63 \angle 6.34^\circ = (41.4 + j4.6) \Omega .\end{aligned}$$

On peut voir la grande similitude des expressions des champs avec celles obtenues auparavant en prenant :

- les fonctions exponentielles  $e^{\mp\bar{\gamma}z}$  pour  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  ;
- les amplitudes complexes  $\bar{E}^+ = E^+ e^{j\xi^+}$  et  $\bar{E}^- = E^- e^{j\xi^-}$  pour ajuster à la fois le module et la phase de chaque composante.

Selon (5.29), la constante de propagation est un nombre complexe qui possède une partie réelle et une partie imaginaire :

$$\bar{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta \tag{5.35}$$

Pour les matériaux passif usuels<sup>1</sup>,  $\mu$ ,  $\epsilon$  et  $\sigma$  sont des quantités réelles positives. Il en découle que, généralement :

$$45^\circ < \arg\{\bar{\gamma}\} \leq 90^\circ . \tag{5.36}$$

Ce qui implique également que  $\alpha < \beta$ .

Lorsque placé sous la forme rectangulaire dans les exponentielles de (5.30), cela donne (att. pour atténuation ; déph. pour déphasage) :

$$\begin{aligned}\bar{E}_x &= E^+ e^{j\xi^+} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E^- e^{j\xi^-} e^{\alpha z} e^{j\beta z} \\ &= E^+ \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{att.}} \underbrace{e^{-j\beta z + j\xi^+}}_{\text{déph.}} + E^- \underbrace{e^{\alpha z}}_{\text{att.}} \underbrace{e^{j\beta z + j\xi^-}}_{\text{déph.}} .\end{aligned} \tag{5.37}$$

<sup>1</sup>Une conductivité négative impliquerait du gain plutôt que des pertes. Comme la réponse du matériau (nuage électronique) peut être retardée par rapport à l'application des champs  $\mu$  et  $\epsilon$  peuvent aussi être complexes. Pour la compréhension des concepts de bases en électromagnétisme, nous nous limiterons aux cas usuels

Il apparaît clairement que la partie réelle  $\alpha$  de la constante de propagation affecte le module du champ. La première onde du membre de droite de (5.37) correspond à l'onde positive qui s'en va dans la direction  $z+$ , i.e. que la valeur de  $z$  augmente en fonction du temps. Pour  $\alpha$  positif,  $e^{-\alpha z}$  décroît lorsque  $z$  augmente ce qui fait dire que l'onde s'atténue en se propageant. La seconde onde se déplace dans la direction  $z-$  et, comme pour l'onde positive,  $e^{\alpha z}$  décroît car  $z$  diminue sous propagation. Dans les deux cas, un  $\alpha$  positif est responsable de la baisse de l'amplitude de l'onde d'où son appellation, constante d'atténuation. Les unités de  $\alpha$  sont les *Népers par mètre* qu'on note  $Np/m$ . L'atténuation par unité de longueur vaut  $L_1 = e^\alpha$  soit, en décibels :

$$L_1[dB] = 20 \log(e^\alpha) = 8.686 \alpha . \tag{5.38}$$

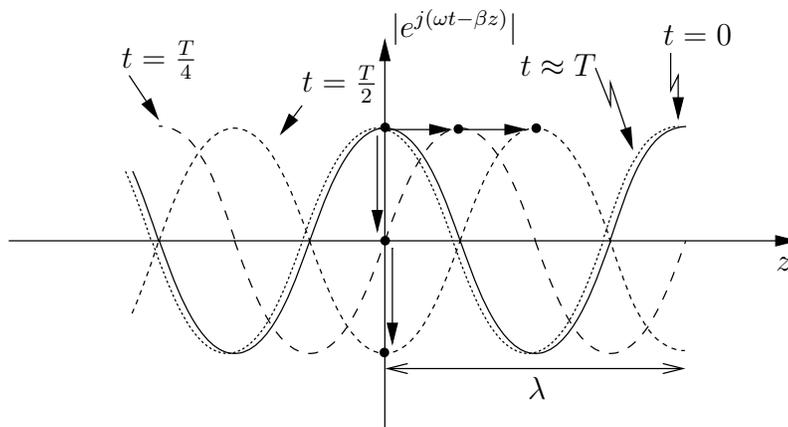


FIGURE 5.2 – Longueur d'onde  $\lambda$  et période  $T$  d'une onde sinusoïdale.

La constante  $\alpha$  provient d'une conductivité non nulle dans l'équation (5.29). Cette atténuation émane donc de la résistivité ohmique du matériau. L'énergie contenue dans l'onde électromagnétique est progressivement transférée par pertes résistives : le matériau chauffe sous l'effet des courants induits par les champs. Ce type d'atténuation de l'onde se propageant est nommé pertes joules.

Quant à la constante  $\beta$ , elle intervient dans la phase de l'onde qui varie avec le déplacement. C'est la constante de phase. Elle est directement liée à la longueur d'onde  $\lambda$  de la façon suivante. La longueur d'onde  $\lambda$  correspond à la distance sur laquelle la phase change de  $2\pi$  radians en fixant le temps. La période est l'équivalent dans le domaine du temps de la longueur d'onde comme le montre la figure 5.2. Ainsi, on a  $\beta\lambda = 2\pi$  ou encore :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_p} . \tag{5.39}$$

La dernière égalité de (5.39) est obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur par  $f$  – la fréquence du signal sinusoïdal – et en sachant que  $\lambda = v_p/f$  où  $v_p$  est la vitesse de phase équivalente à la vitesse de propagation de l'onde plane.

Le développement de (5.32) pour le champ magnétique donne cette fois :

$$\bar{H}_y = H^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\xi_h^+} + H^- e^{\alpha z} e^{j\beta z + j\xi_h^-} \tag{5.40}$$

$$= \frac{E^+}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\xi^+ - j\zeta} - \frac{E^-}{\eta} e^{\alpha z} e^{j\beta z + j\xi^- - j\zeta} . \tag{5.41}$$

L'argument de l'impédance caractéristique  $\bar{\eta} = \eta e^{j\zeta}$  correspond au retard angulaire du phaseur du champ magnétique sur celui du champ électrique. Comme auparavant, en supposant  $\epsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  positifs) pour les matériaux usuels, on peut vérifier que ce retard  $\zeta$  varie entre :

$$0 \leq \arg\{\bar{\eta}\} = \zeta < 45^\circ . \tag{5.42}$$

Le module de  $\bar{\eta}$  indique le rapport des amplitudes des champs électrique et magnétique.

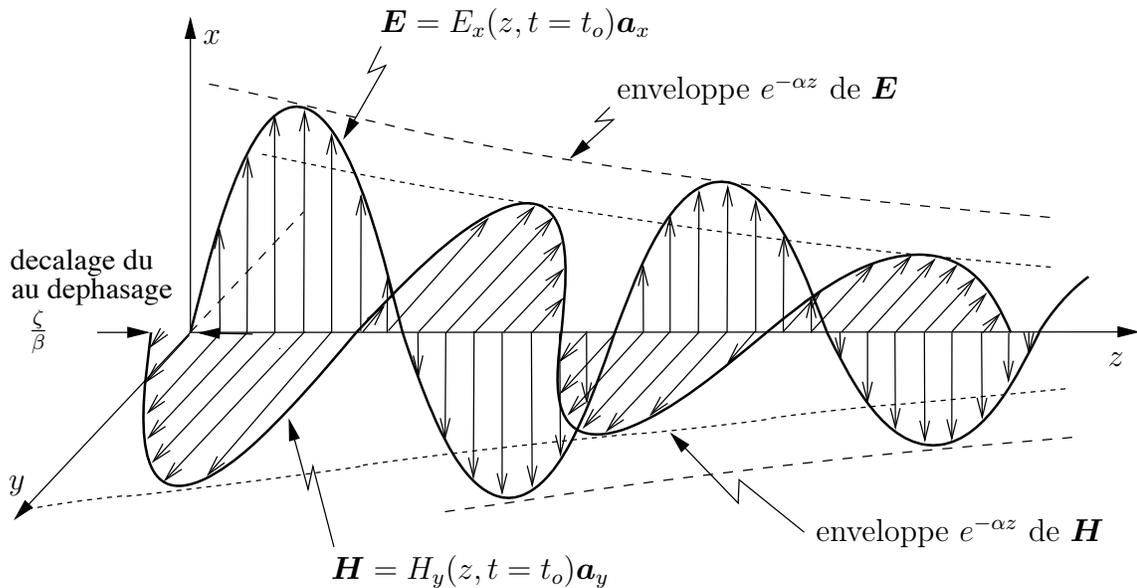


FIGURE 5.3 – Champs électrique et magnétique d’une onde plane se propageant en  $z+$  dans un matériau à pertes.

Comme une figure vaut mille mots, on profite de l’occasion pour montrer l’allure à un temps fixe, d’une onde plane sinusoïdale qui se propage dans un matériau à pertes. On y aperçoit le déphasage  $\zeta$  entre les deux champs orthogonaux en orientation ; on y remarque aussi (via les enveloppes) que les modules des champs ne sont pas égaux et leur rapport donne  $\eta$ .

**Exemple 5.3**

Une onde plane uniforme sinusoïdale à une fréquence de  $100\text{ MHz}$  qui se déplace suivant l’axe  $x+$  possède un champ électrique dont l’amplitude atteint  $2\text{ V/m}$  avec un déphasage de  $20^\circ$  à  $(x = 0)$ . Si le matériau dans lequel voyage l’onde a les caractéristiques électriques suivantes :  $\epsilon_r = 39.25$ ,  $\mu_r = 1$  et  $\sigma = 0.02\text{ S/m}$ , on trouve que :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &\approx (0.60 + j13.15)\text{ m}^{-1} \\ \bar{\eta} &\approx (59.94 + j2.74)\ \Omega . \end{aligned}$$

► Calculez la vitesse à laquelle se déplace l’onde et la longueur d’onde.

La vitesse de propagation  $v_p$  et la longueur d'onde  $\lambda$  sont obtenues à partir de la constante de phase et de (5.39). Or  $\beta$  n'est que la partie imaginaire de  $\bar{\gamma}$  d'où :

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^8}{13.15} = 47.78 \times 10^6 \text{ m/s}$$

et

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{13.15} = 0.4778 \text{ m} .$$

- Exprimez le champ magnétique  $H(x, t)$  (la direction du vecteur n'est pas demandée).

Cette fois, on a besoin des deux paramètres de propagation. Il ne faut pas oublier que l'onde se propage en  $x+$  seulement et non en  $z+$  ou  $z-$ . Il suffit donc de prendre l'expression de l'onde positive et remplacer  $z$  par  $x$ .

On n'oublie pas le terme d'atténuation  $e^{-\alpha x}$  car le milieu est à pertes. Avec

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= (60.0 \angle 0.0457) \Omega \\ [\bar{\mathbf{E}}]_{x=0} &= (2.0 \angle \pi/9) \mathbf{a}_E \text{ V/m} \end{aligned}$$

on trouve alors :

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \frac{2}{\eta} e^{-\alpha x} \cos(2\pi \times 10^8 t - \beta x + \pi/9 - \arg\{\bar{\eta}\}) \\ &= 0.0333 e^{-0.6x} \cos(2\pi \times 10^8 t - 13.15 x \underbrace{+0.3491 - 0.0457}_{+0.3034}) \text{ A/m} . \end{aligned}$$

## 5.5 Puissance et vecteur de Poynting

La détermination des constantes complexes  $\bar{E}^+$  ou  $\bar{E}^-$  se fait en appliquant des conditions aux limites ou encore en connaissant la puissance délivrée par la source. On peut comprendre que la puissance transportée par l'onde est reliée à l'amplitude du champ électrique, laquelle est liée à celle du champ magnétique via le module de l'impédance intrinsèque. Reste à savoir quel est exactement ce lien entre l'amplitude des champs électromagnétiques et la puissance transportée par l'onde.

Depuis 1884, on sait, par l'entremise du physicien anglais *John H. Poynting* que le vecteur  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  joue un rôle important dans la puissance transportée par une onde électromagnétique, d'où le nom de vecteur de *Poynting* noté  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} . \quad (5.43)$$

En regardant les unités résultantes de ce produit, des  $\text{V/m} \cdot \text{A/m} = \text{W/m}^2$ , on constate qu'il s'agit d'une densité de puissance. On pourrait aussi présenter la chose d'un angle

plus physique en démontrant que le travail par unité de temps nécessaire pour produire l'onde, donc la puissance instantanée  $\mathcal{P}(t)$  fournie par la source, équivaut à l'intégrale du vecteur de *Poynting*  $\mathbf{P}$  sur une surface fermée entourant complètement la source :

$$\mathcal{P}(t) = \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} . \quad (5.44)$$

Un vecteur possède aussi une direction. Celle du vecteur de *Poynting*  $\mathbf{a}_P$  pointe dans la direction du transport de la puissance, que nous associons à la direction de propagation de l'onde.

L'onde électromagnétique est donc le moyen de propagation de la puissance fournie par une source rayonnante. Elle :

- renferme la puissance – de densité correspondant au module du vecteur de *Poynting*;
- et la transporte – elle se déplace dans la direction du vecteur de *Poynting*.

Dans un volume délimité par une surface fermée, outre les sources, différentes composantes sont susceptibles de modifier le bilan de puissance, i.e. la différence de puissance entre ce qui entre et ce qui sort du volume. Pour ce faire, on utilise le théorème de la divergence :

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{P}) dv \quad (5.45)$$

combinée à une identité vectorielle :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \quad (5.46)$$

puis aux équations de *Faraday* et d'*Ampère*. Le tout débouche sur :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{P} &= -\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\underbrace{\sigma E(t)^2}_{p_d} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\epsilon E(t)^2\right)}_{w_e} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\mu H(t)^2\right)}_{w_m} \end{aligned} \quad (5.47)$$

puis finalement, sur le théorème de *Poynting* :

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \iiint_V p_d dv - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_e dv - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_m dv \quad (5.48)$$

où  $p_d$ ,  $w_e$  et  $w_m$  sont respectivement la densité de puissance dissipée, la densité d'énergie électrique emmagasinée et la densité d'énergie magnétique emmagasinée.

Si on ignore le signe négatif, les trois termes de droite du théorème de *Poynting* s'interprètent ainsi :

- $\sigma E^2 \Delta V$  est la puissance dissipée dans le volume à cause du courant de conduction présent dans le volume  $\Delta V$ , c'est l'effet joule qui produit un échauffement.

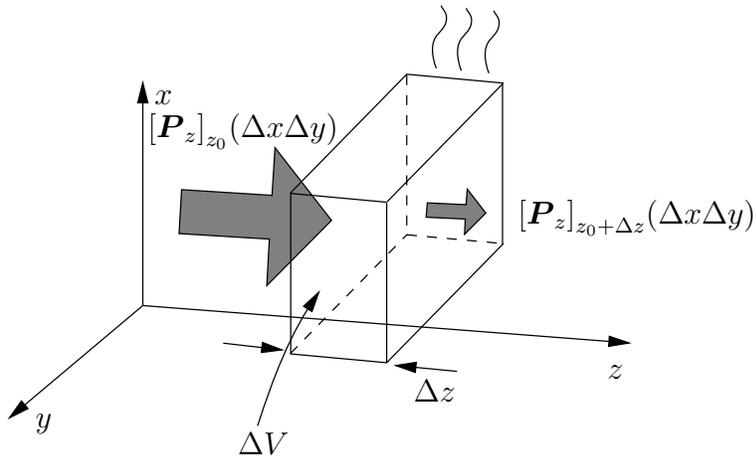


FIGURE 5.4 – Bilan de puissance d’une onde plane dans un volume.

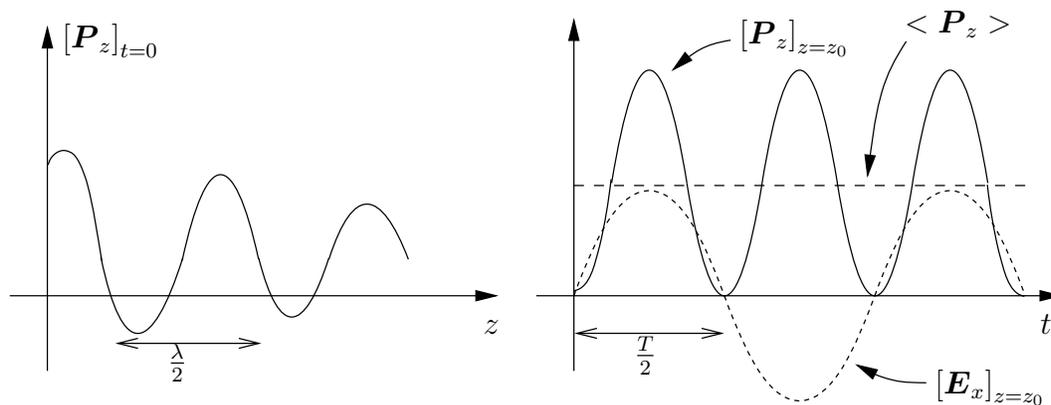


FIGURE 5.5 – Variation de la densité de puissance dans le temps et suivant la direction de propagation.

- $\frac{1}{2}\epsilon E^2 \Delta V$  et  $\frac{1}{2}\mu H^2 \Delta V$  représentent les énergies électrique et magnétique qui sont contenues dans le volume. Un condensateur chargé emmagasine de l’énergie électrique, réciproquement pour une inductance avec l’énergie magnétique. Ainsi, une variation e.g. une diminution sur un laps de temps de chacune de ces énergies disponibles, signifie qu’une certaine quantité de puissance a quitté le volume.

On peut voir le bilan des puissances entrant et sortant d’un volume produit par une onde électromagnétique uniforme plane sur la figure 5.4 tandis que la figure 5.5 montre comment varie la densité de puissance d’une onde plane dans un matériau à pertes.

Il est possible de déterminer la puissance instantanée d’une onde électromagnétique passant au travers une surface quelconque. Il suffit alors d’intégrer le vecteur de *Poynting* sur la surface en question et non pas sur une surface fermée :

$$[\mathcal{P}(t)]_S = \iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} . \quad (5.49)$$

Si la surface est placée parallèlement à la direction de l’onde, aucune puissance ne traverse la surface. Par contre, un élément de surface bien transversal à la direction verra un

maximum de puissance passer au travers. De là, l'importance du produit scalaire. Pour faire une comparaison, le Soleil d'hiver à Québec<sup>2</sup>, atteint une élévation maximale par rapport au sol de moins de  $90 - 46.8 - 23.5 \approx 20^\circ$  au 21 décembre. L'angle de  $90 - 20 = 70^\circ$  entre la rayonnement solaire  $\mathbf{a}_P$  et la normale au sol fait que chaque unité de surface au sol reçoit 34% de la puissance maximale. En été, l'élévation maximale tourne autour de  $90 - 46.8 + 23.5 \approx 67^\circ$  ce qui procure 92% (le cosinus de  $90 - 67 = 23^\circ$ ) de la puissance maximale par unité de surface au sol! Bien sûr, il y a aussi la durée d'éclairement et la réflexion des rayons au sol qui interviennent.

Avec les circuits électriques, on s'intéresse souvent plus à la puissance moyenne qu'à sa valeur instantanée. Il en va de même pour l'onde électromagnétique. Pour alléger la nomenclature, on utilise indifféremment le terme de puissance (tout court) pour désigner la puissance moyenne par opposition à la puissance instantanée. De plus, dans le régime sinusoïdal permanent avec des phaseurs, on peut obtenir rapidement la densité de puissance (sous-entendre moyenne) via le vecteur de *Poynting* moyen  $\langle \mathbf{P} \rangle$  défini comme suit :

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_T \mathbf{P} dt = \frac{1}{2} EH \cos(\arg\{\bar{\eta}\}) \mathbf{a}_P = \text{Re} \{ \bar{\mathbf{P}} \} \quad (5.50)$$

où  $T$  est la période du signal, et

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^* \quad (5.51)$$

est le vecteur de *Poynting* complexe. Avec cette densité de puissance, la puissance moyenne passant par une surface  $S$  est déduite maintenant par l'équivalent de (5.49) à savoir :

$$[\langle \mathcal{P} \rangle]_S = \iint_S \langle \mathbf{P} \rangle \cdot d\mathbf{S} . \quad (5.52)$$

**Exemple 5.4**

La Terre est à 150 millions de kilomètres du Soleil. La densité de puissance optimale fournie par le Soleil sur la Terre tourne autour de  $1360 \text{ W/m}^2$  sur tout le spectre.

- Déterminez la puissance moyenne émise par le Soleil.

On peut assumer que le Soleil est une source isotrope (qui émet uniformément dans toute les directions). De plus, le vide interstellaire est un diélectrique sans pertes ( $\sigma = 0$ ) et l'effet des planètes Mercure et Vénus est négligeable. Ainsi, selon (5.44), la puissance du Soleil serait de :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{Soleil}} \rangle = \oint_{\text{sphère}} (1360) dS = 4\pi(150 \times 10^9)^2(1360) = 3.84 \times 10^{26} \text{ W} .$$

- Estimez le niveau maximal du champ électrique au sol si on suppose que toute la densité de puissance est ramenée à une seule composante spectrale.

<sup>2</sup>Québec se trouve à une latitude de  $46.8^\circ$  ; l'obliquité de l'écliptique est de  $23.5^\circ$ .

Puisque le matériau (l'air) est assumé sans perte, les champs électrique et magnétique sont en phase. Le vecteur de *Poynting* complexe de (5.51) s'écrit simplement comme :

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \bar{E} \frac{\bar{E}^*}{\bar{\eta}^*} \mathbf{a}_{s-t} = \frac{1}{2} \frac{E^2 \angle 0^\circ}{\eta_o} \mathbf{a}_{s-t}$$

où  $\mathbf{a}_{s-t}$  est un vecteur unitaire Soleil-Terre.

Ainsi, avec l'aide de (5.50) :

$$1360 = \frac{1}{2} \frac{E^2 \cos(0)}{\eta_o} \implies E = \sqrt{(377)(2)(1360)} = 1012 \text{ V/m}!$$

### Exemple 5.5

Soit une onde électromagnétique qui se propage dans l'eau de mer ( $\epsilon_r = 80$ ,  $\mu_r = 1$  et  $\sigma = 4 \text{ S/m}$ ) dans la direction  $z-$ . Le champ électrique s'exprime ainsi :

$$[\mathbf{E}(t)]_{z=0} = 1.0 \cos(2\pi \times 10^5 t) \mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

à  $z = 0$ .

- Déterminez la densité de puissance instantanée et la densité de puissance moyenne de l'onde en tout point.

On doit commencer par trouver les expressions générales de  $\mathbf{E}(z, t)$  et  $\mathbf{H}(z, t)$ . Il faut connaître  $\bar{\gamma}$  ainsi que  $\bar{\eta}$  à la fréquence de  $10^5 \text{ Hz}$  dans le milieu. À partir des équations (5.29) et (5.33), les valeurs obtenues sont :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &\approx (1.257 + j1.257) \text{ m}^{-1} \\ \bar{\eta} &\approx 0.314 + j0.314 = (0.444 \angle \pi/4) \Omega. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 1.0 e^{1.257z} \cos(2\pi \times 10^5 t + 1.257z) \mathbf{a}_x \text{ V/m} \\ \mathbf{H} &= -e^{1.257z} \underbrace{\frac{1.0}{0.444}}_{2.25} \cos(2\pi \times 10^5 t + 1.257z - \pi/4) \mathbf{a}_y \text{ A/m}. \end{aligned}$$

Le signe négatif devant l'expression de  $\mathbf{H}$  vient du fait que le produit vectoriel  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  doit pointer dans la direction  $z-$  qui est la direction de propagation de l'onde. Autre remarque : l'exponentielle affectant le module tend vers "0" au fur et à mesure que  $z$  diminue et devient négatif. Ceci, parce que le milieu est à pertes.

Le vecteur de *Poynting* instantané est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= 2.25e^{2.514z} \cos(2\pi \times 10^5 t + 1.257z) \\ &\quad \times \cos(2\pi \times 10^5 t + 1.257z - \pi/4) (-\mathbf{a}_z) \text{ W/m}^2 \\ P_z &= -1.125e^{2.514z} \left( \cos(\pi/4) + \cos(4\pi \times 10^5 t + 2.514z - \pi/4) \right) \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Le signe négatif devant l'expression de  $P_z$  signifie que la puissance s'écoule dans la direction  $z-$ . Finalement, la puissance par unité de surface normale à l'axe  $z$  est :

$$\langle P_z \rangle = -1.125e^{2.514z} \cos(\pi/4) = -0.8e^{2.514z} \text{ W/m}^2 .$$

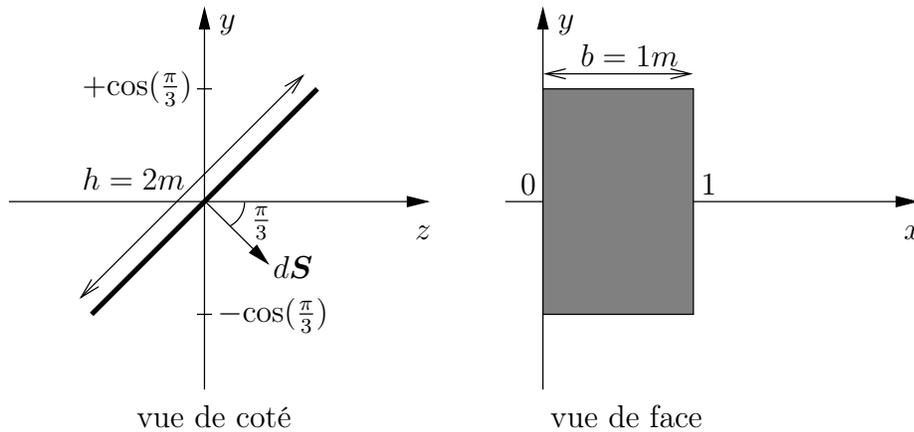


FIGURE 5.6 – Géométrie de la surface par laquelle passe une partie de la puissance de l'onde plane.

- Déduisez la puissance incidente sur une surface rectangulaire de  $2 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  placée comme sur la figure 5.6.

Attention : contrairement au choix de la surface dans les intégrales de surface pour les équations de *Faraday* et *Ampère*, ici on ne peut prendre une surface quelconque délimitée par le pourtour car  $\nabla \cdot \langle \mathbf{P} \rangle \neq 0$ . L'égalité est toutefois possible avec  $\sigma = 0$ .

Pour réaliser l'intégrale de surface, il faut d'abord trouver l'expression de l'unité différentielle de surface  $d\mathbf{S}$  et faire le changement du domaine d'intégration suivant la technique proposée à la section 1.3. On paramétrise la surface selon les variables  $u = x$  et  $v = y$ . On déduit  $z = \tan(\frac{\pi}{3}) y = 1.732 v$  puis :

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{a}_x + v\mathbf{a}_y + 1.732v\mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{S} = (\mathbf{a}_z - 1.732\mathbf{a}_y) dudv .$$

L'intégrale du vecteur de *Poynting* sur la surface s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{P} \rangle &= \int_R \langle \mathbf{P} \rangle \cdot d\mathbf{S} = - \int_{v=-\cos(\frac{\pi}{3})}^{\cos(\frac{\pi}{3})} \int_{u=0}^1 0.8 e^{(2.514)(1.732)v} dudv \\
 &= -0.8 \left[ \frac{e^{4.354v}}{4.354} \right]_{-0.5}^{0.5} \\
 &= -0.184 (8.821 - 0.113) = -1.6 \text{ W} .
 \end{aligned}$$

Il y a donc une puissance incidente de 1.6 W sur la surface inclinée. Le signe négatif indique simplement que la puissance passe à travers la surface en direction opposée à la définition utilisée pour sa normale.

## 5.6 Caractéristiques de l'onde plane homogène

Étant donné l'importance de l'onde plane<sup>3</sup> dans les mécanismes de propagation, notamment le fait qu'elle agit comme fonction de base pour représenter tout champ électromagnétique, il est bon de regrouper dans une section l'ensemble des principales caractéristiques de l'onde plane. **Les 3 dernières sont particulièrement celles d'une onde électromagnétique plane.**

1. La forme de l'onde dans l'espace ou dans le temps est déterminée à partir de celle de la source dans le temps. La notion d'espace existe car l'onde se déplace. D'ailleurs, la primitive de la relation spatio-temporelle est du genre :

$$\left( t \mp \frac{z}{v_p} \right)$$

pour une onde se déplaçant dans la direction  $z \pm$ . La constante  $v_p$  représente la vitesse de propagation de l'onde dans le matériau.

Avec des phaseurs, la fonction spatio-temporelle est un cosinus ce qui fait que :

$$f(t, z) = \cos(\omega t \mp \beta z) \tag{5.53}$$

et :

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{5.54}$$

où  $\beta$  est appelée la constante de phase et  $\lambda$ , la longueur d'onde en  $m$ .

<sup>3</sup>L'onde plane obtenue dans ce chapitre est dite homogène car les fronts d'amplitude constante et les fronts de phase constante sont colinéaires. Ce n'est pas toujours le cas. Les fronts d'amplitudes et de phase peuvent tous deux être plans, mais selon des orientations différentes. On parle alors d'onde plane inhomogène. Nous en verrons des exemples dès le prochain chapitre avec les ondes évanescentes.

2. Lorsque le matériau possède une conductivité non-nulle, l'onde s'atténue en se propageant. Le matériau est dit à pertes. L'amplitude des champs diminue suivant une exponentielle :

$$e^{\mp\alpha z}$$

pour une onde se déplaçant dans la direction  $z\pm$ . La constante d'atténuation  $\alpha$  qui affecte l'amplitude de l'onde s'exprime en *Népers/mètre*.

Dans le régime sinusoïdal permanent, la constante d'atténuation et la constante de phase forment respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la constante de propagation :

$$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta \tag{5.55}$$

puisque les deux constantes apparaissent dans l'exponentielle de la solution à l'équation d'onde.

3. Les champs électrique et magnétique de l'onde plane sont perpendiculaires entre eux et par rapport à la direction de propagation de l'onde  $\mathbf{a}_P$  :

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{a}_P . \tag{5.56}$$

Ceci explique le changement de signe devant une des constituante du champ magnétique car la solution comporte deux ondes qui vont dans des directions opposées. Pour déterminer la direction de propagation, il suffit de faire le produit vectoriel suivant :

$$\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_P \tag{5.57}$$

dans lequel les vecteurs unitaires  $\mathbf{a}_E$  et  $\mathbf{a}_H$  indiquent l'orientation des champs en question.

L'onde plane trouvée<sup>4</sup> dans ce chapitre comme solution aux équations de Maxwell est donc transverse : les 2 champs sont perpendiculaires à la direction de propagation. On insiste souvent beaucoup sur cet aspect dans les cours d'ondes électromagnétiques, au point où on peut avoir l'impression qu'il s'agit là d'une propriété fondamentale pour toute onde. Il n'en est rien. Plusieurs exemples d'ondes non transverses seront vus dans les chapitres suivants. La simple somme de 2 ondes planes n'est pas transverse.

4. Pour chaque constituante de l'onde plane transverse, le rapport de l'amplitude du champ électrique à l'amplitude du champ magnétique est constant et équivaut à l'impédance intrinsèque du matériau  $\eta$  dans lequel se trouve l'onde.

Avec les phaseurs, on écrit :

$$\frac{\bar{E}^+}{\bar{H}^+} = -\frac{\bar{E}^-}{\bar{H}^-} = \pm\bar{\eta} . \tag{5.58}$$

---

<sup>4</sup>L'onde plane obtenue ici a des plans d'amplitude constante et des plans de phase constante communs. On parle alors d'onde plane homogène. Ce n'est pas nécessairement toujours le cas.

*Attention* : le signe négatif apparaît à cause de l'inversion obligatoire d'un des champs pour inverser la direction de propagation conformément à (5.57). Quant au signe à choisir devant  $\bar{\eta}$ , il faut d'abord appliquer (5.57) pour déterminer la direction des champs ; cela permettra ensuite l'identification du bon signe sachant que  $0 < \angle \bar{\eta} < 45^\circ$ .

5. La puissance transportée par l'onde, ou plus précisément la densité de puissance, est une quantité dépendant directement de l'amplitude des champs. Le module du vecteur de *Poynting*  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.59)$$

fournit l'information sur la densité de puissance instantanée de l'onde en  $W/m^2$ . Son vecteur unitaire  $\mathbf{a}_P$  pointe la direction de propagation.

Avec des phaseurs, on obtient la densité de puissance moyenne à partir du vecteur de *Poynting* complexe défini ainsi :

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^* . \quad (5.60)$$

## 5.7 Paramètres de propagation des matériaux

On considère la constante de propagation et l'impédance intrinsèque comme étant les paramètres de propagation du matériau dans lequel se propage une onde plane. On désire obtenir ici des expressions simplifiées pour des cas bien précis :

- le diélectrique parfait ( $\sigma = 0$ ) ;
- le diélectrique à faibles pertes ou très faibles pertes ( $\sigma \ll \omega\epsilon$ ) ;
- le bon conducteur ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ) ;
- le conducteur parfait ( $\sigma \rightarrow \infty$ ).

Avant tout, il serait intéressant de faire l'opération inverse, i.e. récupérer les paramètres électriques du matériau connaissant à la fois les paramètres de propagation et l'impédance intrinsèque. À partir des expressions (5.33) et (5.29), on voit tout de suite que :

$$\bar{\eta}\bar{\gamma} = j\omega\mu \quad (5.61)$$

$$\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}} = \sigma + j\omega\epsilon . \quad (5.62)$$

De là, il est facile de déduire les trois paramètres électriques du matériau :

$$\sigma = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}} \right\} \quad (5.63)$$

$$\epsilon = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\eta}} \right\} \quad (5.64)$$

$$\mu = \frac{1}{j\omega} \bar{\gamma}\bar{\eta} . \quad (5.65)$$

Le dernier paramètre a un intérêt particulier en ce sens qu'il montre que l'argument de  $\bar{\gamma}$  et celui de  $\bar{\eta}$  sont toujours complémentaires à  $90^\circ$  – i.e. la somme des deux arguments vaut  $90^\circ$ .

**Exemple 5.6**

Soit une onde à la fréquence de  $10\text{ MHz}$  qui se propage dans un matériau inconnu non-magnétique ( $\mu = \mu_o$ ). On s'aperçoit que la densité de puissance chute de  $91\%$  à chaque longueur d'onde, soit à chaque  $6\text{ m}$ .

- Déterminez l'impédance intrinsèque du matériau.

Il semble que très peu de données soient disponibles et pourtant, il est possible d'extraire la réponse. En effet, à partir de la longueur d'onde, on déduit  $\beta$ ; on trouve  $\alpha$  de l'atténuation en puissance car la densité de puissance décroît selon  $e^{-2\alpha z}$  dans la direction  $z+$  :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{6} = 1.05 \text{ rad/m} \\ \alpha &= \frac{\ln(0.09)}{-2(6)} = 0.20 \text{ Np/m} \\ \bar{\gamma} &= 0.20 + j1.05 = (1.07 \angle 79.2^\circ) \text{ m}^{-1} . \end{aligned}$$

Maintenant, on peut extraire l'impédance intrinsèque avec l'aide de (5.65) et de la connaissance de  $\mu$  et  $\bar{\gamma}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \frac{j\omega\mu_o}{\bar{\gamma}} = \frac{(2\pi \times 10^7)(4\pi \times 10^{-7}) \angle 90^\circ}{1.07 \angle 79.2^\circ} \\ &= 74.05 \angle 10.8^\circ = (72.73 + j13.94) \Omega . \end{aligned}$$

### 5.7.1 Diélectrique parfait

Le diélectrique parfait est caractérisé par  $\sigma = 0$ . Ainsi, la constante de propagation est purement imaginaire :

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(j\omega\mu)(j\omega\epsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} . \tag{5.66}$$

et l'onde se déplace sans atténuation – on dit aussi sans perte – car :

$$\alpha = 0 \tag{5.67}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{5.68}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} . \tag{5.69}$$

De plus, l'impédance intrinsèque est purement réelle, sans partie réactive :

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} . \tag{5.70}$$

En comparaison avec les paramètres notés avec l'indice "0" identifiant les paramètres dans l'espace libre – autre terme pour dire le vide –, on trouve :

$$\beta = \beta_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (5.71)$$

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (5.72)$$

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}. \quad (5.73)$$

### 5.7.2 Diélectrique à faibles pertes

Lorsque la conductivité devient non-nulle, les pertes commencent à apparaître à cause du courant de conduction qui naît. Tant que le courant de conduction reste négligeable devant le courant de déplacement, on dit que le diélectrique est à faibles pertes. Un facteur 5 minimum est requis. Mathématiquement, cela revient à dire que :

$$\sigma \ll \omega \epsilon.$$

En utilisant les premiers termes de l'expansion binomiale<sup>5</sup>, on peut faire l'approximation de la racine carrée :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \sqrt{(j\omega\mu)(j\omega\epsilon) \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)} \\ &= j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{1/2} \\ &\approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right) + j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (5.74)$$

et de la même manière<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1/2} \\ &\approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right) + j\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \left(1 - \frac{5}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (5.75)$$

<sup>5</sup> $(1+x)^{1/2} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 - 5x^4/128 + \dots$

<sup>6</sup> $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + 3x^2/8 - 5x^3/16 + 56x^4/128 - \dots$

Ainsi, de (5.74) et (5.75) découlent les expressions simplifiées :

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left( 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right) \quad (5.76)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left( 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right) \quad (5.77)$$

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left( 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right) \quad (5.78)$$

$$\text{Re} \{ \bar{\eta} \} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left( 1 - \frac{3}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right) \quad (5.79)$$

$$\text{Im} \{ \bar{\eta} \} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \left( 1 - \frac{5}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right) . \quad (5.80)$$

On peut cependant y aller d'une seconde approximation valide lorsque les pertes sont très faibles. On parle alors d'un matériau à très faibles pertes. Dans ces conditions, un rapport  $\sigma/\omega\epsilon$  inférieur à 1/10 produit des erreurs moindres que 1/800 par partie pour les paramètres  $\alpha, \beta$ ; moindres que 3/800 et 5/800 par partie respectivement pour les parties réelle et imaginaire de  $\bar{\eta}$ . On peut donc procéder en prenant simplement :

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (5.81)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (5.82)$$

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5.83)$$

$$\text{Re} \{ \bar{\eta} \} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{et} \quad \text{Im} \{ \bar{\eta} \} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \quad \text{donc} \quad (5.84)$$

$$\bar{\eta} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \angle \left( \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} . \quad (5.85)$$

**Exemple 5.7**

Le Teflon est utilisé comme bon diélectrique. Ses paramètres électriques sont :

- $\epsilon_r = 2.1, \mu_r = 1$
- $\sigma/\omega\epsilon = 0.004$  à  $10 \text{ GHz}$ .

- Déterminez la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique à  $10 \text{ GHz}$  dans le matériau selon la formulation exacte  $v_{p_{ex}}$ , l'approximation pour un diélectrique à faibles  $v_{p_{fp}}$  et la solution pour un diélectrique à très faibles pertes  $v_{p_{tfp}}$ .

On se sert de (5.39) dans (5.29) pour trouver  $v_{p_{ex}}$  ; dans (5.74) pour  $v_{p_{fp}}$  et de (5.83) directement pour  $v_{p_{tfp}}$ . D'où :

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} &= \sqrt{(j\omega\mu)\omega\epsilon\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} + j1.0\right)} \\ &= \sqrt{\underbrace{j(2\pi \times 10^{10})(4\pi \times 10^{-7})}_{78\,956.835\,2087\angle 90^\circ} \underbrace{(2\pi \times 10^{10})(2.1 \times 8.854 \times 10^{-12})(0.004 + j)}_{1.168\,291\,905\,08\angle 89.770\,818^\circ}} \\ &= 303.718\,013\,007\angle 89.885\,409^\circ = (0.607 + j303.717\,405\,578) \text{ m}^{-1} \\ v_{p_{ex}} &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^{10}}{303.717\,405\,578} \\ &= 206\,876\,036.466 \text{ m/s}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}v_{p_{fp}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right) \\ &= 206\,876\,450.216 \left(1 - \frac{(0.004)^2}{8}\right) = 206\,876\,450.2 (1 - 2 \times 10^{-6}) \\ &= 206\,876\,036.463 \text{ m/s} \\ v_{p_{tfp}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = 206\,876\,450.216 \text{ m/s}.\end{aligned}$$

### 5.7.3 Bon conducteur

Le bon conducteur est le dual du diélectrique à très faibles pertes. Les approximations sont cependant plus faciles à réaliser. Pour assumer un bon conducteur, il faut que :

$$\sigma \gg \omega\epsilon.$$

Les résultats fournis montrent qu'un rapport entre les courants de conduction et de déplacement supérieur à 10 entraîne des erreurs plus faibles que 5% (6% pour la partie imaginaire de  $\bar{\eta}$ ). Les erreurs sont donc plus importantes de sorte qu'on suggère un rapport de plus de 25 pour assumer des erreurs suffisamment faibles (< 1%) dans la majorité des cas pratiques.

Les expressions pour les paramètres de propagation dans un bon conducteur deviennent :

$$\bar{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad (5.86)$$

$$\approx \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{e^{j\pi/2}\omega\mu\sigma}$$

$$\approx \sqrt{\omega\mu\sigma} e^{j\pi/4}$$

$$\approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} (1 + j) \quad (5.87)$$

et, de même :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &\approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{e^{j\pi/2}\omega\mu}{\sigma}} \\ &\approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\pi/4} \\ &\approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1 + j). \end{aligned} \tag{5.88}$$

On voit immédiatement que les arguments des paramètres de propagation à 45° sont un signe que le matériau se comporte comme un bon conducteur. Ceci implique que :

- $\alpha = \beta \approx \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$ ;
- $\text{Re}\{\bar{\eta}\} = \text{Im}\{\bar{\eta}\} \approx \sqrt{\omega\mu/(2\sigma)}$ .

Une autre caractéristique qui dénote un bon conducteur est le comportement directement proportionnel à la racine carrée de la fréquence des valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $v_p$  et  $\bar{\eta}$ .

**Exemple 5.8**

L'eau de mer, avec une constante diélectrique de 70 et une conductivité de 4 S/m pour des fréquences inférieures à 30 MHz, se comporte comme un bon conducteur. À des fréquences supérieures, les paramètres électriques changent : la constante diélectrique chute à 7 et la conductivité augmente jusqu'à atteindre un plateau de 70 S/m à 100 GHz. Elle demeure donc relativement bonne conductrice jusqu'à cette dernière fréquence, couvrant ainsi le spectre entier utilisé à ce jour pour l'émission de signaux radios.

- Calculez la longueur d'onde dans l'eau d'une onde électromagnétique autour de 1 MHz (la fréquence porteuse d'un poste de radiodiffusion de la bande AM).

Partant de (5.87), on déduit que :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{(2\pi \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})(4)}{2}} = 3.97 \text{ rad/m} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{3.97} = 1.58 \text{ m} \end{aligned}$$

alors que dans un diélectrique de même constante diélectrique, la longueur d'onde aurait été de 36 m environ !

- Trouvez le rapport entre le module des champs électrique et magnétique.

Le rapport du module des champs équivaut au module de l'impédance intrinsèque soit, d'après (5.88) :

$$\eta = \sqrt{\frac{(2\pi \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})}{4}} = 1.4 \Omega .$$

### 5.7.3.1 Effet de peau

On a fait mention à quelques reprises que les champs électromagnétiques n'existent pas dans un conducteur. Alors, on pourrait se poser la question quel est l'intérêt de présenter les paramètres de propagation dans un bon conducteur puisque l'onde ne peut exister. En réalité, l'onde électromagnétique s'atténue très rapidement dans un conducteur de sorte que les champs ne peuvent apparaître que très près de la surface.

L'épaisseur de peau, notée  $\delta_p$ , représente la distance que parcourt l'onde avant de subir une atténuation correspondant à 1  $Np$  ou encore 8.686  $dB$ . Il suffit donc que  $\alpha\delta_p = 1$  ou encore :

$$\delta_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \quad (5.89)$$

Pour avoir une idée de l'atténuation importante dans un bon conducteur, on peut observer qu'à chaque longueur d'onde les champs diminuent en intensité par un facteur égal à 54.58  $dB$ ! C'est énorme quand on pense que l'amplitude des champs chute de moitié à chaque 6  $dB$ . Le calcul est facile à faire :

$$e^{-\alpha\lambda} = e^{-\beta\lambda} = e^{-2\pi}$$

et, en décibels, cette atténuation vaut  $20 \log(e^{2\pi})$ .

#### Exemple 5.9

Le cuivre est l'un des meilleurs conducteurs (le deuxième après l'argent à la température de la pièce). Sa conductivité est de  $5.8 \times 10^7$   $S/m$ . Soit une onde électromagnétique à la fréquence de 1  $MHz$  incidente sur une surface de cuivre.

- Déterminez l'épaisseur de peau de l'onde et la distance dans le cuivre  $z_{1/100}$ , à laquelle l'onde est rendue au centième de son amplitude à la surface.

Plutôt que de calculer l'épaisseur de peau selon l'équation (5.89) – ce qui donnerait le même résultat – on préfère passer par la constante d'atténuation  $\alpha$  pour faire une pierre, deux coups. Ainsi, selon (5.87) :

$$\alpha = \sqrt{\frac{(2\pi \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})(5.8 \times 10^7)}{2}} = 15\,132 \text{ } Np/m.$$

On sait que 1/100 correspond à une atténuation de 40  $dB$  ou 4.6  $Np$ . Finalement, on obtient les deux réponses attendues :

$$\begin{aligned} \delta_p &= \frac{1}{\alpha} = 0.066 \text{ } mm \\ z_{1/100} &= \frac{4.6}{\alpha} = 4.6\delta_p = 0.304 \text{ } mm. \end{aligned}$$

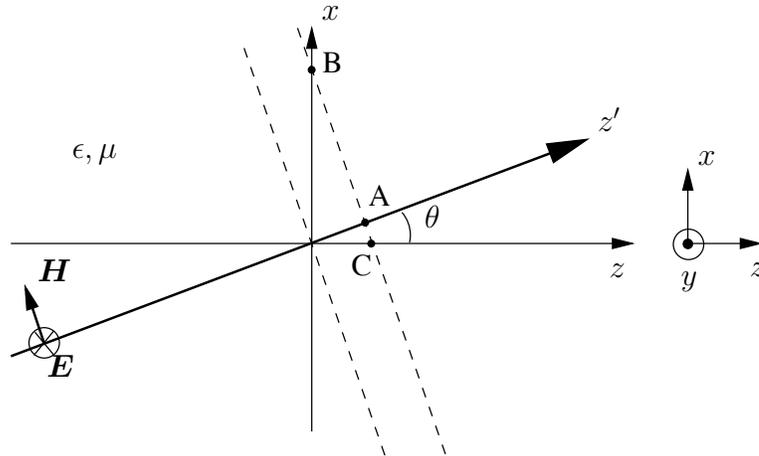


FIGURE 5.7 – Front d’une onde plane suivant une direction  $z'$  dans le plan  $xz$ .

### 5.7.4 Conducteur parfait

Il est facile de voir que, pour un conducteur parfait où  $\sigma \rightarrow \infty$ , l’épaisseur de peau indiquée par (5.89) est nulle ; en conséquence, il y a absence de champs électromagnétiques dans un conducteur parfait.

Avec des champs nuls dans le conducteur parfait, les conditions aux limites montrent que les composantes d’une onde incidente sont :

- $E_{\perp} = \rho_s / \epsilon$
- $H_{\parallel} = J_s$
- $E_{\parallel} = H_{\perp} = 0$  .

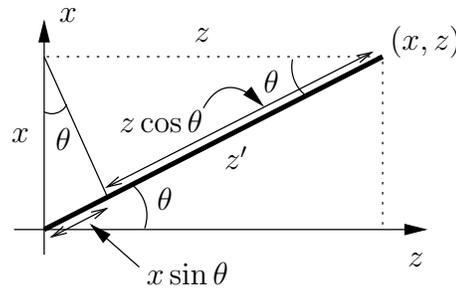
Le champ électrique doit être perpendiculaire à la surface du conducteur parfait, tandis que le champ magnétique est tangentiel.

Cependant avec une conductivité  $\sigma$  très élevée mais finie, on continue à considérer un bon conducteur comme un conducteur parfait si ce qui intéresse n’est pas immédiatement sous la surface, à une ou quelques fois l’épaisseur de peau tout dépendant du degré de précision désiré.

## 5.8 Propagation dans une direction arbitraire

Jusqu’ici, l’onde plane se propageait suivant l’un des axes du système de coordonnées. Elle pourrait bien se déplacer dans une direction tout à fait arbitraire. Normalement, pour faciliter les calculs et la visualisation, on cherche à orienter les axes du système de coordonnées de manière à ce que l’onde suive l’un des axes. Mais dans certains cas, cela n’est pas possible : plusieurs ondes en simultanément, surface de référence, orientation indépendant de notre volonté...

Pour commencer, on considère une onde plane dans un milieu sans perte – ceci uniquement pour simplifier les expressions sans perdre en généralité – voyageant dans une

FIGURE 5.8 – Décomposition de  $z'$  dans le plan  $xz$ .

direction  $z'$ . Ce nouvel axe fait un angle  $\theta$  par rapport à l'ancien dans le plan  $xz$  comme sur la figure 5.7. Les champs électrique et magnétique doivent être transverses à cette direction  $z'$ . En étant orthogonaux entre eux, ils peuvent être n'importe où dans le plan. On peut écrire :

$$\mathbf{E} = E_o \cos(\omega t - \beta z') \mathbf{a}_E \quad (5.90)$$

$$\mathbf{H} = H_o \cos(\omega t - \beta z') \mathbf{a}_H \quad (5.91)$$

avec  $\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_{z'}$  et  $\bar{\mathbf{E}}/\bar{\mathbf{H}} = \bar{\eta}$ .

On comprend que le taux de variation de la phase selon  $z'$  correspond à  $\beta$ . En effet, on mesure la longueur d'onde le long de cet axe en un temps fixe, pour déduire ensuite la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu.

L'étape suivante consiste à décomposer  $z'$  sur le système de coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Ici, on a simplement (voir figure 5.8)<sup>7</sup> :

$$z' = x \sin \theta + z \cos \theta$$

qui, lorsque placé dans (5.90) pour le champ électrique – le champ magnétique se déduit de la même manière – donne :

$$\mathbf{E} = E_o \cos(\omega t - \beta(x \sin \theta + z \cos \theta)) \mathbf{a}_E \quad (5.92)$$

$$= E_o \cos(\omega t - \underbrace{\beta \sin \theta x}_{\beta_x} - \underbrace{\beta \cos \theta z}_{\beta_z}) \mathbf{a}_E . \quad (5.93)$$

Les  $\beta_x$  et  $\beta_z$  correspondent cette fois aux taux de variations de la phase suivant les axes  $x$  et  $z$  respectivement. Ces constantes de phase sont plus petites que  $\beta$  car la variation est plus lente : les longueurs d'onde observées dans les directions  $x$  et  $z$  – appelées longueurs d'onde apparentes – paraissent plus longues comme le montre la figure 5.9.

Dans la généralisation pour une direction complètement arbitraire, on rajoute simplement le  $\beta_y$  soit le taux de variation de la phase dans la direction de l'axe  $y$ . L'expression

<sup>7</sup>L'emploi de la matrice de rotation autour de l'axe  $y$  donnerait le même résultat :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

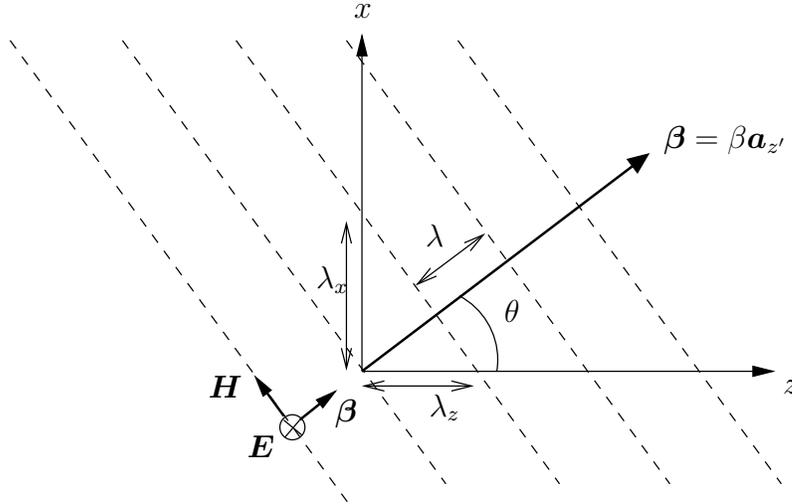


FIGURE 5.9 – Longueurs d’onde vues dans les axes  $x$  et  $z$  d’une onde plane suivant une direction  $z'$  dans le plan  $xz$ .

du champ électrique devient maintenant<sup>8</sup> :

$$\mathbf{E} = E_o \cos(\omega t - \beta_x x - \beta_y y - \beta_z z + \xi) \mathbf{a}_E \quad (5.94)$$

$$= E_o \cos(\omega t - \underbrace{(\beta_x \mathbf{a}_x + \beta_y \mathbf{a}_y + \beta_z \mathbf{a}_z)}_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \underbrace{(x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z)}_{\boldsymbol{\ell}} + \xi) \mathbf{a}_E \quad (5.95)$$

$$= E_o \cos(\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\ell} + \xi) \mathbf{a}_E . \quad (5.96)$$

### 5.8.1 Vecteur de propagation

Des trois composantes  $\beta_i$  selon chacun des axes d’un système de coordonnées, on vient de créer un nouveau vecteur  $\boldsymbol{\beta}$  dit vecteur de propagation, qui pointe dans la direction de propagation – tout comme la vecteur de *Poynting* – et dont le module  $\beta$  indique le taux de variation de la phase dans cette direction. Ainsi, on déduit de  $\boldsymbol{\beta}$  à la fois :

- la direction de propagation de l’onde :

$$\mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_P = \mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H \quad (5.97)$$

- la longueur d’onde observée dans la direction de propagation :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.98)$$

- la vitesse de propagation dans le milieu à la fréquence angulaire  $\omega$  :

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} \quad (5.99)$$

<sup>8</sup>Dans un espace 3D, les composantes du vecteur  $\boldsymbol{\beta}$  s’écrivent ainsi selon la direction de propagation  $(\theta, \phi)$  :  $\beta_x = \beta \cos \phi \sin \theta$ ,  $\beta_y = \beta \sin \phi \sin \theta$  et  $\beta_z = \beta \cos \theta$ .

**Exemple 5.10**

Une onde plane à 10 MHz se déplace dans le vide. Elle possède un *Poynting* moyen suivant :

$$\langle \mathbf{P} \rangle = 0.03315 \left( 0.75 \mathbf{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{4} \mathbf{a}_y + 0.5 \mathbf{a}_z \right) \text{ W/m}^2$$

De plus, une composante du champ électrique vaut  $E_x = 2.5 \text{ V/m}$ .

► Donnez l'expression complète du champ électrique  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ .

Il y a plusieurs inconnues ici. Il faudra trouver autant d'équations.

- 1) On trouve le module du champ électrique connaissant le module du vecteur de *Poynting* complexe et l'impédance intrinsèque du vide.
- 2) On connaît aussi la vitesse de propagation dans le vide et la fréquence, donc le module de  $\beta$ .
- 3) La direction de  $\beta$  est celle du vecteur de *Poynting*.
- 4) Le produit scalaire de  $\mathbf{E}$  et  $\beta$  est nul car les deux vecteurs sont orthogonaux.

Avant de commencer, on décide que le vecteur unitaire  $\mathbf{a}_E$  s'écrira sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_E &= \frac{E_x}{E} \mathbf{a}_x + \frac{E_y}{E} \mathbf{a}_y + \frac{E_z}{E} \mathbf{a}_z \\ &= m_x \mathbf{a}_x + m_y \mathbf{a}_y + m_z \mathbf{a}_z . \end{aligned}$$

De l'item 1, on déduit :

$$\langle P \rangle = \frac{E^2}{2\eta_0}$$

soit

$$E = \sqrt{2\eta_0 \langle P \rangle} = \sqrt{2(377)(0.03315)} \approx 5 \text{ V/m}$$

Donc on déduit que  $m_x = \frac{E_x}{E} = \frac{2.5}{5} = 0.5$ . Ceci procure une première relation entre  $m_y$  et  $m_z$  :

$$m_y^2 + m_z^2 = 1 - m_x^2 = 0.75 .$$

Les items 2 et 3 décrivent entièrement le vecteur de propagation :

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} \mathbf{a}_P = 0.2094 \left( 0.75 \mathbf{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{4} \mathbf{a}_y + 0.5 \mathbf{a}_z \right) \text{ rad/m}$$

De l'item 4, on peut obtenir la seconde relation nécessaire entre  $m_y$  et  $m_z$  :

$$\begin{aligned} 0 &= (0.5 \mathbf{a}_x + m_y \mathbf{a}_y + m_z \mathbf{a}_z) \cdot \left( 0.75 \mathbf{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{4} \mathbf{a}_y + 0.5 \mathbf{a}_z \right) \\ &= 0.375 + m_y \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} \right) + m_z (0.5) \\ m_y &= \frac{1.5}{\sqrt{3}} + m_z \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

En combinant les relations entre  $m_y$  et  $m_z$ , on peut maintenant déduire leur valeur respective :

$$\begin{aligned} 0.75 &= \left( \frac{1.5}{\sqrt{3}} + m_z \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + m_z^2 \\ &= \frac{2.25}{3} + 2m_z \frac{3}{3} + m_z^2 \frac{4}{3} + m_z^2 \\ &= 0.75 + 2m_z + \frac{7}{3}m_z^2 . \end{aligned}$$

Les deux solutions possibles sont :

- $m_z = 0$  ce qui donne  $m_y = 1.5/\sqrt{3}$ ; d'où finalement :

$$\mathbf{E} = 5(0.5\mathbf{a}_x + 0.866\mathbf{a}_y) \cos(2\pi \times 10^7 t - 0.2094(0.75x - 0.433y + 0.5z)) \text{ V/m}$$

- $m_z = -6/7$  et  $m_y = -\sqrt{3}/14$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 5(0.5\mathbf{a}_x - 0.1237\mathbf{a}_y - 0.8571\mathbf{a}_z) \\ &\quad \cos(2\pi \times 10^7 t - 0.2094(0.75x - 0.433y + 0.5z)) \text{ V/m} \end{aligned}$$

► Indiquez alors la direction de champ magnétique.

---

Le champ magnétique est transverse à la fois au champ électrique et à la direction de propagation. En fait :

$$\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_P$$

ou encore

$$\mathbf{a}_P \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_H .$$

Il faut prendre les deux solutions possibles et faire le produit vectoriel correspondant :

- $m_z = 0$  :

$$\mathbf{a}_H = -\frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{a}_x + \frac{1}{4}\mathbf{a}_y + \frac{2\sqrt{3}}{4}\mathbf{a}_z$$

- $m_z = -6/7$  :

$$\mathbf{a}_H = \frac{7\sqrt{3}}{28}\mathbf{a}_x + \frac{25}{28}\mathbf{a}_y + \frac{2\sqrt{3}}{28}\mathbf{a}_z .$$


---

On va par la suite chercher à trouver les projections de la longueur d'onde et de la vitesse de propagation sur les axes du système de cartésien. Les résultats pourront sembler a priori contre-intuitif. Pour y arriver, on continue le développement à partir des composantes  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  et  $\beta_z$  obtenues en projetant le vecteur  $\boldsymbol{\beta}$  sur chacun des axes du système de coordonnées. On a donc :

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_x \mathbf{a}_x + \beta_y \mathbf{a}_y + \beta_z \mathbf{a}_z \tag{5.100}$$

c'est-à-dire que, comme pour tout vecteur, le module vaut :

$$\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}. \quad (5.101)$$

Les composantes  $\beta_i$  sont reliées aux vitesses de propagation apparentes et longueurs d'onde apparentes selon chacun des axes. Par exemple, on a pour  $\beta_x$  :

$$\beta_x = \frac{\omega}{v_{px}} = \frac{2\pi}{\lambda_x} \quad (5.102)$$

et de façon similaire pour  $\beta_y$  et  $\beta_z$ .

Des conséquences importantes découlent en associant les composantes :

- à leur longueur d'onde apparente dans chacun des axes d'où, en partant de (5.101) avec (5.98) :

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2}. \quad (5.103)$$

Les longueurs d'onde apparentes sont plus longues que la véritable longueur d'onde dans le milieu, mesurée dans la direction de propagation. À la limite, la longueur d'onde apparente dans l'un des axes peut tendre vers l'infini, indiquant ainsi aucune propagation suivant cet axe.

- à leur vitesse de propagation apparente dans chacun des axes d'où, toujours en partant de (5.101) avec cette fois (5.99) :

$$\frac{1}{v_p^2} = \frac{1}{v_{px}^2} + \frac{1}{v_{py}^2} + \frac{1}{v_{pz}^2}. \quad (5.104)$$

Ce résultat a de quoi surprendre car, de la même manière qu'avec les longueurs d'onde apparentes, les vitesses de propagation apparentes sont toujours supérieures à la véritable vitesse de propagation. À la limite, l'une d'elle peut être égale à  $v_p$  si les autres sont infinies !

### Exemple 5.11

Soit l'une des solutions pour l'onde plane de l'exemple 5.10 précédent :

$$\mathbf{E} = 5(0.5\mathbf{a}_x + 0.866\mathbf{a}_y) \cos(2\pi \times 10^7 t - 0.2094(0.75x - 0.433y + 0.5z)) \text{ V/m}$$

- Déterminez les longueurs d'onde et les vitesses de propagation estimées en regardant le comportement de l'onde dans chacun des axes du système de coordonnées.

Les longueurs d'onde estimées correspondent aux longueurs d'onde apparentes alors que, pour les vitesses de propagation estimées, ce sont les vitesses de phase dans chacun des axes. De l'expression de  $\mathbf{E}$ , on note :

$$\begin{aligned} \beta_x &= 0.2094(0.75) \text{ rad/m} \\ \beta_y &= 0.2094(0.433) \text{ rad/m} \\ \beta_z &= 0.2094(0.5) \text{ rad/m} \end{aligned}$$

ce qui fait que :

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{2\pi}{\beta_x} = \frac{2\pi}{0.1571} = 40 \text{ m} \\ \lambda_y &= \frac{2\pi}{0.0907} = 69.28 \text{ m} \\ \lambda_z &= \frac{2\pi}{0.1047} = 60 \text{ m} \\ v_{px} &= \frac{\omega}{\beta_x} = \frac{2\pi \times 10^7}{0.1571} = 4 \times 10^8 \text{ m/s} \\ v_{py} &= \frac{2\pi \times 10^7}{0.0907} = 6.928 \times 10^8 \text{ m/s} \\ v_{pz} &= \frac{2\pi \times 10^7}{0.1047} = 6 \times 10^8 \text{ m/s} . \end{aligned}$$

On vérifie les résultats ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} &= \frac{1}{1600} + \frac{1}{4800} + \frac{1}{3600} \\ &= \frac{1}{900} = \frac{1}{\lambda^2} \\ \frac{1}{v_{px}^2} + \frac{1}{v_{py}^2} + \frac{1}{v_{pz}^2} &= \frac{1}{16 \times 10^{16}} + \frac{1}{48 \times 10^{16}} + \frac{1}{36 \times 10^{16}} \\ &= \frac{1}{9 \times 10^{16}} = \frac{1}{v_p^2} = \frac{1}{c^2} . \end{aligned}$$

### 5.8.2 Vitesses de l'énergie, de phase et de groupe

La vitesse d'un point particulier d'une onde selon une axe quelconque correspond bien à la projection du vecteur vitesse sur cet axe. Cette vitesse de propagation physique est appelée *vitesse de l'énergie* ou *vitesse de l'information*. On peut récupérer la vitesse de l'énergie dans cette direction par le produit scalaire de la vitesse de propagation avec la direction voulue.

Observations directionnelles (vitesse de phase)

Pour éviter les confusions, les vitesses de propagation apparentes sont appelées *vitesses de phase*. Car c'est bien de phase qu'il s'agit : un observateur relevant la fréquence et la longueur d'onde observée le long d'un axe, pourrait tout au plus déduire la vitesse de phase le long de cet axe. Il ne mesure nullement la composante de la vitesse de propagation suivant l'axe en question.

L'analogie avec les vagues de la mer, un quai et un coureur peut aider à comprendre les mécanismes en jeu. Soit des vagues se déplaçant à angle avec l'axe d'un quai comme sur la "photo" de la figure 5.10. Les crêtes des vagues sont identifiées. La distance entre deux fronts d'onde consécutifs est normalement mesurée avec une

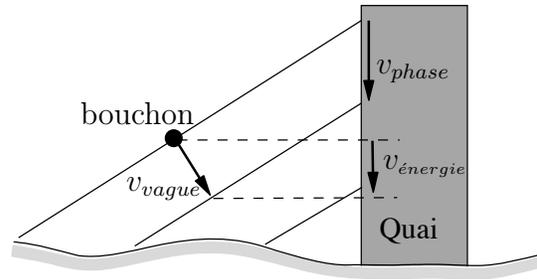


FIGURE 5.10 – Vitesse de phase et projection de vitesse de propagation le long d’un quai.

règle perpendiculaire aux fronts. La règle suit donc la direction de propagation et la distance représente la longueur d’onde. Si on mesure la distance entre deux fronts d’onde le long du quai, on obtient la longueur d’onde apparente suivant l’axe du quai. Soit maintenant un coureur sur le quai, prêt à suivre un front d’onde le long du quai. Il devra courir à la vitesse de phase, i.e. plus vite que la vitesse de propagation de la vague. Cependant, s’il désire, au niveau du quai, être toujours vis-à-vis un bouchon qui surfe sur une crête d’un front d’onde, il ira à la vitesse de propagation de la vague projetée sur l’axe du quai, soit la vitesse de l’énergie dans l’axe du quai. Si la vague se déplace dans l’axe du quai, on comprends aisément que le coureur ira à la vitesse de propagation de la vague, qu’il suive le front d’onde ou le bouchon.

Observations fréquentielles (vitesse de groupe, dispersion)

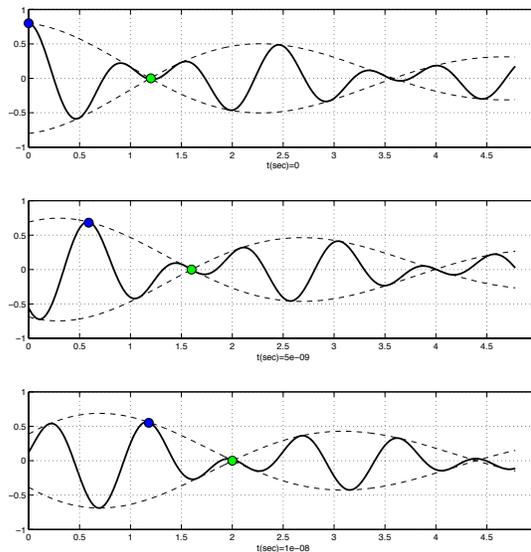


FIGURE 5.11 – Vitesse de phase et de l’enveloppe dans un matériau dispersif.

Il existe aussi une autre notion de vitesse reliée à des paquets d’ondes dans un matériau dont la vitesse de propagation varie selon la fréquence. Cette vitesse est appelée *vitesse de groupe* et notée  $v_g$ . Pour définir la vitesse de groupe, il faut utiliser deux ondes à des fréquences légèrement différentes et d’amplitude unité (les phases

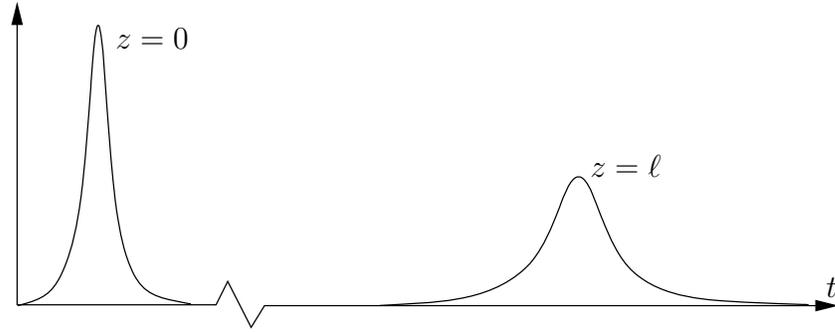


FIGURE 5.12 – Dispersion d’une impulsion gaussienne.

qui n’interviennent pas sont ignorées) allant dans la même direction :

$$f(z, t) = \cos((\omega - \Delta\omega)t - (\beta - \Delta\beta)z) + \cos((\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)z) .$$

Par une identité trigonométrie  $f(t)$  peut aussi s’écrire :

$$f(z, t) = 2 \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{enveloppe}} \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{porteuse}} .$$

Un phénomène de battement apparaît à la fréquence angulaire de  $\Delta\omega$  qui module en amplitude une porteuse à la fréquence angulaire de  $\omega$ . Lorsque l’écart de fréquence est faible, on remarque que la porteuse se déplace à une vitesse qui est celle de propagation  $v_p = \frac{\omega}{\beta}$  dans la direction de propagation. Par contre, l’enveloppe se déplace à une vitesse équivalant au taux de variation de la fréquence angulaire par rapport celui de la constante de phase  $\frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$  qui tend vers la vitesse de groupe définie comme :

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} . \tag{5.105}$$

La figure 5.11 illustre bien le comportement d’un point de phase et du noeud de l’enveloppe à différent temps. Il est clair que le point de phase a parcouru une plus grande distance que le noeud de l’enveloppe sur une même période d’où  $v_g < v_p$  ici. D’autres situations mènent à l’effet contraire indiquant là que la vitesse de groupe ne peut être associée automatiquement à la vitesse de l’énergie.

Lorsque la vitesse de propagation est constante selon la fréquence, les vitesses sont identiques  $v_p = v_g$ . Autrement, l’enveloppe de l’onde se déforme au fur et à mesure qu’on s’éloigne de la source. Si le signal était constitué d’une impulsion gaussienne (modulée ou pas) comme sur la figure 5.12, on verrait cette impulsion devenir de plus en plus étalée en se propageant d’où le terme de *dispersion*.

La dispersion peut provenir soit d’un matériau à pertes ou soit d’un mode de propagation supérieur (où les champs ne sont pas tous les deux transverses à la direction de propagation) comme il sera vu au chapitre sur le guide d’onde. Dans tous ces cas, la relation  $\beta - \omega$  n’est pas linéaire.

Pour des observations faites dans une direction  $\mathbf{a}_i$  autre que celle de propagation, il faut considérer la projection du vecteur  $\boldsymbol{\beta}$  dans cette nouvelle direction. Donc, ayant  $\beta_i = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}_i$  :

$$v_{pi} = \frac{\omega}{\beta_i} \quad (5.106)$$

$$v_{gi} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_i} \quad (5.107)$$

$$v_{pi}v_{gi} = v_p^2. \quad (5.108)$$

## 5.9 Polarisation

On sait que le champ électrique et le champ magnétique d'une onde plane sont orthogonaux à la direction de propagation et orthogonaux entre eux. Les deux vecteurs de champ sont donc localisés dans un plan transverse mais rien n'informe sur leur orientation dans ce plan.

On se souvient que deux solutions indépendantes sont possibles dans le plan transverse pour chaque champ. Cela est lié au fait qu'il y a deux directions indépendantes possibles qui sont perpendiculaires à la propagation. La combinaison de ces deux solutions permet de décrire l'évolution temporelle du vecteur de champ. Cette réalité provient de la nature vectorielle de l'onde électromagnétique et est désignée comme étant l'état de polarisation de l'onde.

Pour définir l'état de polarisation d'une onde plane, on considère généralement le champ en un point de l'espace. L'évolution temporelle du champ en ce point décrit une figure géométrique dans le plan transverse. La figure tracée par la pointe du **champ électrique** est utilisée pour nommer l'état de polarisation. Pour un champ harmonique on parlera de polarisation linéaire, circulaire et elliptique. Même si un seul point spatial est considéré, tous les points appartenant au même front d'onde suivent exactement la même évolution.

### 5.9.1 Polarisation linéaire

Une onde plane est dite polarisée linéairement lorsque l'évolution temporelle de la pointe du champ  $\mathbf{E}$  trace une droite dans le plan transverse. Par exemple, une onde voyageant dans la direction  $z+$  et dont l'unique composante du champ électrique serait  $E_x$  en tout temps. Plus généralement, une onde dont le champ électrique aurait des composantes  $E_x$  et  $E_y$  en phase représente aussi une polarisation linéaire. Les phaseurs des composantes transverses s'écrivent :

$$\bar{E}_x(z) = E_x e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\xi} \quad (5.109)$$

$$\bar{E}_y(z) = E_y e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\xi} \quad (5.110)$$

où  $E_x$  et  $E_y$  sont constants, l'un ou l'autre pouvant être nul mais pas les deux à la fois (cas trivial où l'onde n'existe pas). Lorsque les deux termes  $E_x$  et  $E_y$  sont non-nuls,

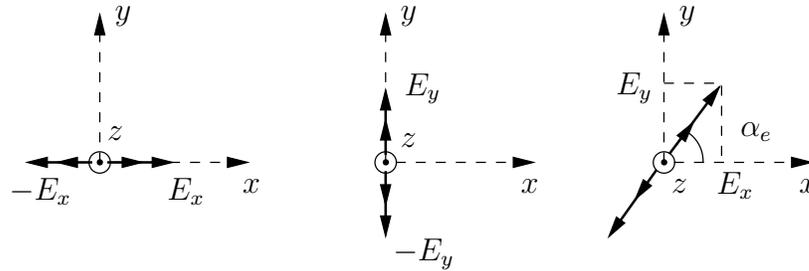


FIGURE 5.13 – Vecteur du champ électrique dans trois cas de polarisation linéaire.

on mentionne parfois que la polarisation est oblique avec un angle d’inclinaison  $\alpha_e$ . La polarisation oblique reste toutefois une polarisation linéaire plus générale.

Quelques exemples apparaissent sur le figure 5.13.

### 5.9.2 Polarisation circulaire et elliptique

La polarisation circulaire implique que les deux composantes – transverses – du champ électrique sont :

- déphasées de  $90^\circ$  soit  $\delta_\xi = \xi_y - \xi_x = \pm \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ;
- de même amplitude i.e.  $E_x = E_y$

pour une onde qui se déplace suivant l’axe  $z \pm$ . On se rappelle les figures de *Lissajou* sur un écran d’oscilloscope. Le cercle se réalisait en insérant deux signaux sinusoïdaux de même amplitude mais déphasés de  $\pm 90^\circ$  dans les deux canaux “orthogonaux” de l’oscilloscope.

Tout dépendant lequel des composants de  $\mathbf{E}$  est en avance, le phaseur du champ électrique tournera dans un sens ou dans l’autre lorsque le temps progresse. Les électromagnéticiens ont défini deux expressions pour décrire la polarisation circulaire (ou elliptique) selon la rotation du phaseur  $\bar{E}$  dans le temps.

Celles-ci reposent sur l’utilisation de la règle de la main droite (ou gauche). Il s’agit de placer son pouce selon la direction de propagation.

- La polarisation est circulaire droite si le champ  $\mathbf{E}$  tourne selon l’enroulement des doigts de la main droite.
- La polarisation est circulaire gauche si le champ  $\mathbf{E}$  tourne selon l’enroulement des doigts de la main gauche.

Des acronymes provenant de l’anglais sont couramment utilisés pour décrire le sens de rotation de la polarisation circulaire : RCP ou RHCP pour “Right (Hand) Circularly Polarized” et LCP ou LHCP pour “Left (Hand) Circularly Polarized”. Cette terminologie “gauche” ou “droite” est également utilisée pour les états elliptiques.

Pour les états circulaires, le lieu du vecteur du champ électrique en fonction du temps trace un cercle dans l’espace plan perpendiculaire à la direction de propagation. Ceci est démontré sur la figure 5.14, qui montre l’orientation selon le temps du champ  $\mathbf{E}$  à une position  $z$  fixe.

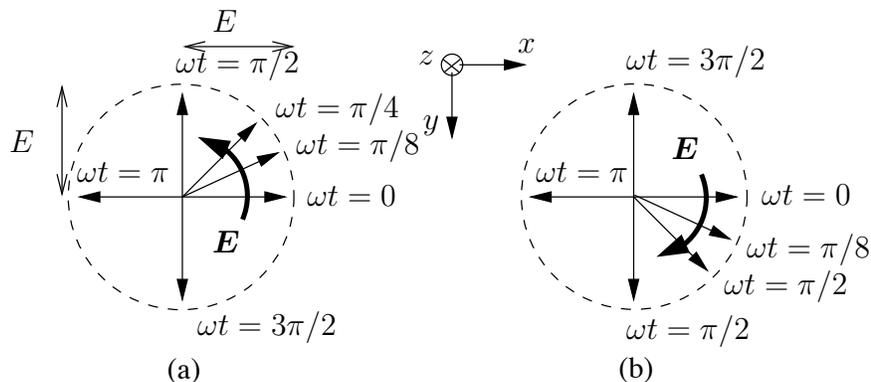


FIGURE 5.14 – Vecteur du champ électrique dans une polarisation circulaire gauche (a) et droite (b).

On a alors pour la RCP d'une onde se déplaçant selon  $z+$  :

$$\begin{aligned}\bar{E}_x &= E e^{j\xi} \\ \bar{E}_y &= E e^{j(\xi - \frac{\pi}{2})} = -jE e^{j\xi}\end{aligned}$$

où  $E$  est l'amplitude constante du champ électrique total. L'orientation ou inclinaison  $\alpha_e$  du champ électrique total par rapport à l'axe  $x$  est décrit par :

$$\alpha_e = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) \quad (5.111)$$

laquelle varie progressivement dans le temps en complétant une rotation de  $360^\circ$  dans un sens ou l'autre, par période  $T = 1/f$ .

En tenant compte de la coordonnée  $z$  (temps fixe), on trouve les expressions de la RCP d'une onde se déplaçant selon  $z+$  :

$$\bar{E}_x(z) = E e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\xi} \quad (5.112)$$

$$\bar{E}_y(z) = E e^{-\alpha z} e^{-j\beta z + j\xi - j\frac{\pi}{2}} \quad (5.113)$$

On voit très bien ce que cela donne dans la vue 3D de la figure 5.15 pour quatre temps différents.

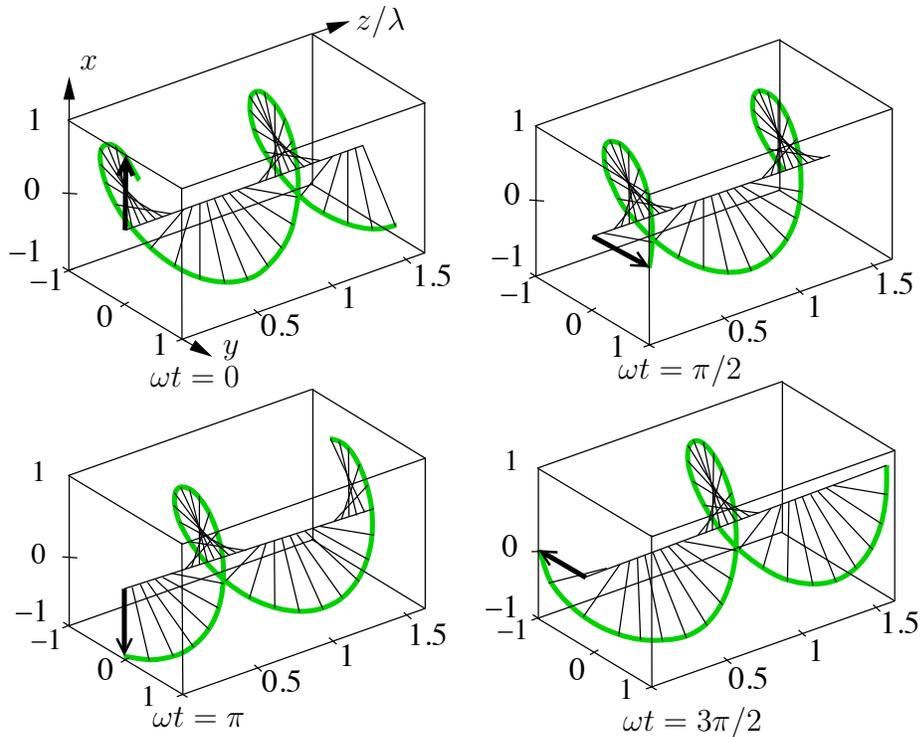


FIGURE 5.15 – Lieu hélicoïdal du vecteur du champ électrique dans une polarisation circulaire droite d’une onde se propageant en  $z+$ .

**Exemple 5.12**

L’expression du phaseur du champ électrique d’une onde plane se propageant en  $z+$  dans un matériau sans perte, est la suivante :

$$[\bar{\mathbf{E}}]_{z=0} = E_o \angle 0 \mathbf{a}_y .$$

- Donnez l’expression complète du champ électrique pour avoir une polarisation RCP.

La composante  $E_x$  est nulle à  $t = 0, z = 0$  puisque  $E_y$  est maximale selon la donnée du problème. En effet :

$$E_y(z, t) = E_o \cos(\omega t - \beta z) .$$

Pour tourner dans le sens horaire,  $E_x$  doit donc décroître pour atteindre un minimum lorsque  $E_y$  devient nulle à son tour soit à  $90^\circ$  comme argument. Il ne faut pas oublier que le produit vectoriel  $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$  doit pointer hors de soi. La composante  $E_x$  suit donc la fonction d’un sinus négatif. Ainsi :

$$E_x(z, t) = -E_o \sin(\omega t - \beta z) .$$

En conséquence, le vecteur du champ électrique s’écrit :

$$\mathbf{E}(z, t) = E_o \left( \cos(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}) \mathbf{a}_x + \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \right) .$$

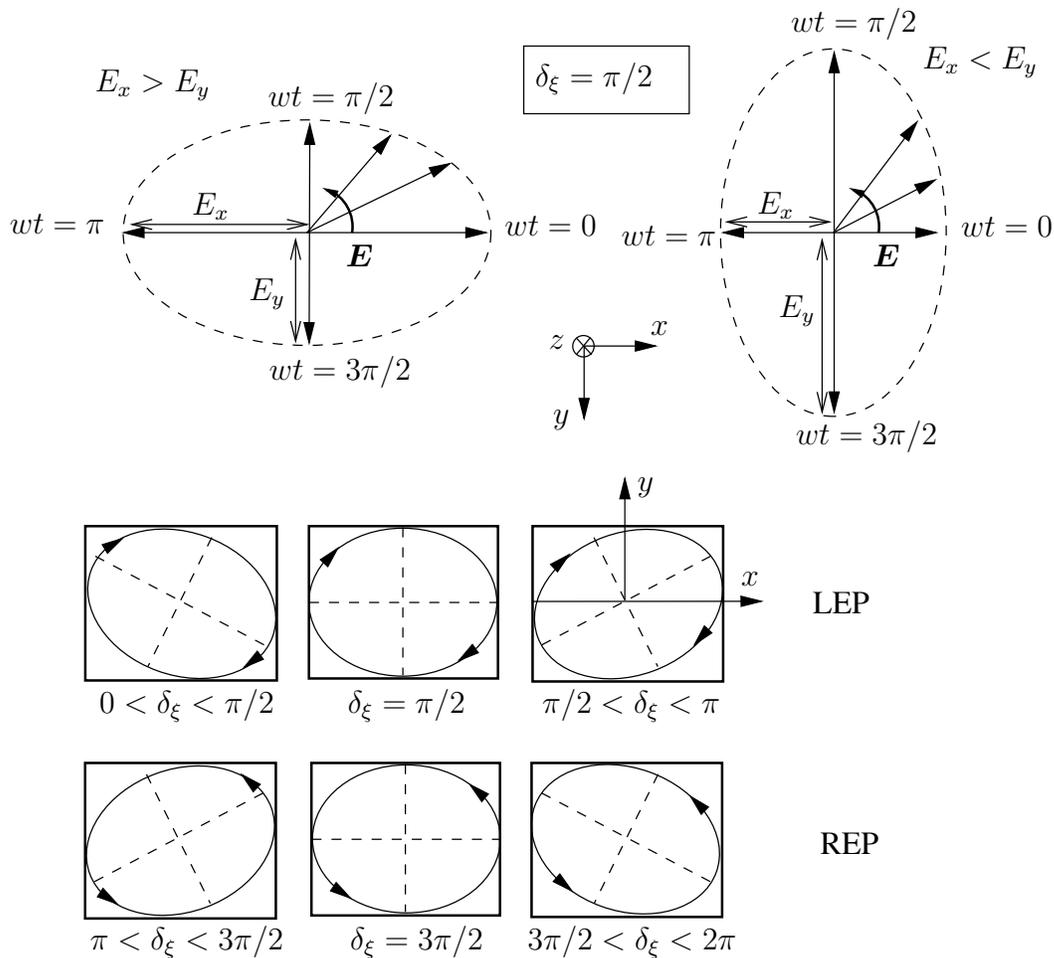


FIGURE 5.16 – Vecteur du champ électrique dans une polarisation LEP selon deux rapports  $E_x/E_y$  et une polarisation LEP/REP selon six valeurs de  $\delta_\xi = \xi_y - \xi_x$ .

Dans une polarisation elliptique (REP ou LEP), la plus générale de toutes, la différence se situe à l'un des deux niveaux suivants pour une onde qui se déplace suivant l'axe  $z \pm$  :

- amplitudes différentes des composantes transverses du vecteur du champ électrique i.e.  $E_x \neq E_y$  ;
- déphasage quelconque  $\delta_\xi = \xi_y - \xi_x \in ] - \pi, \pi ]$ .

Toutes combinaisons d'amplitudes et de déphasages fournissent une polarisation elliptique. Ceci procure de nombreux cas de figure que toutes les autres polarisations deviennent des cas particuliers.

La figure 5.16 illustre quelques cas et montre la grande diversité d'allures du lieu du phaseur du champ électrique. Sur la figure 5.17, on remarque les deux paramètres de l'ellipse :

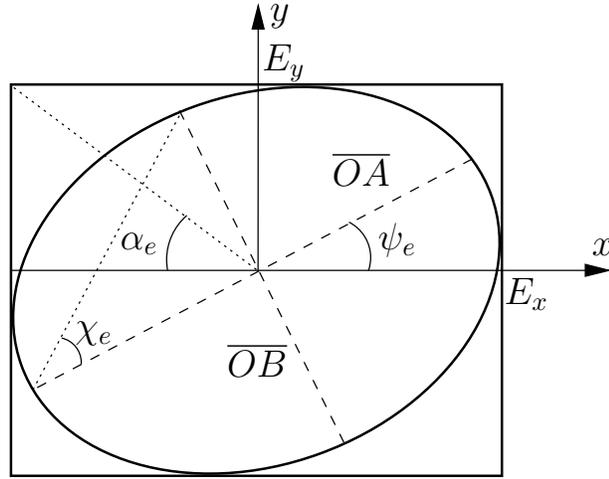


FIGURE 5.17 – Paramètres d’une polarisation elliptique.

- l’angle d’inclinaison  $\psi_e$  ( $0 \leq \psi_e \leq \pi$ ) :

$$\begin{aligned} \psi_e &= \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2E_x E_y}{E_x^2 - E_y^2} \cos(\delta_\xi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan(\tan(2\alpha_e) \cos(\delta_\xi)) \end{aligned} \quad (5.114)$$

- l’angle d’ellipticité  $\chi_e$  ( $-\frac{\pi}{4} \leq \chi_e \leq \frac{\pi}{4}$ ) :

$$\begin{aligned} \chi_e &= \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2E_x E_y}{E_x^2 + E_y^2} \sin(\delta_\xi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(\sin(2\alpha_e) \sin(\delta_\xi)) \end{aligned} \quad (5.115)$$

- ainsi que le rapport axial<sup>9</sup>  $AR$  (de l’anglais “Axial Ratio”) :

$$\begin{aligned} AR &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \quad (1 \leq AR \leq \infty) \\ &= \frac{|E_y \sin(\psi_e) \sin(\delta_\xi)|}{|E_x \sin(\psi_e) - E_y \cos(\psi_e) \cos(\delta_\xi)|} \\ &= |\cot \chi_e| \end{aligned} \quad (5.116)$$

toujours avec  $\tan(\alpha_e) = E_y/E_x$  ;

**Exemple 5.13**

Soient les composantes en  $x$  et en  $y$  du champ électrique d’une onde plane à 15 MHz voyageant dans un matériau sans perte, dans la direction  $z+$  :

$$\bar{\mathbf{E}}_1(z) = E_1 e^{-j\beta z} \mathbf{a}_x$$

<sup>9</sup>Le rapport axial doit toujours être plus grand ou égal à l’unité ; si l’expression (5.116) donne un résultat inférieur à l’unité, prendre l’inverse  $(\cdot)^{-1}$ .

$$\bar{\mathbf{E}}_2(z) = E_2 e^{-j\beta z} e^{j\xi} \mathbf{a}_y .$$

On considère que  $E_1$ ,  $E_2$  sont constants.

- Donnez l'expression complète du champ électrique  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ .

D'abord, on trouve la constante de propagation. Ici, on a :

$$\bar{\gamma} = j\beta = j \frac{30\pi \times 10^6}{3 \times 10^8} = j0.314m^{-1} .$$

Les deux composantes sont effectivement transverse à la direction de propagation donc leur somme le sera aussi. Pour revenir dans le domaine du temps, chaque phaseur doit être multiplié séparément par  $e^{j\omega t}$  car ils ont la même relation spatio-temporelle mais n'ont pas la même phase. Ce qui donne :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_1 \mathbf{a}_x \cos(30\pi \times 10^6 t - 0.314z) + E_2 \mathbf{a}_y \cos(30\pi \times 10^6 t - 0.314z + \xi) .$$

- Déduisez quelles sont les polarisations obtenues dans les cas ci-dessous :

- $\xi = 0$ ,  $E_1 = 4 \text{ mV/m}$ ,  $E_2 = 3 \text{ mV/m}$ ;
- $\xi = \pi/2$ ,  $E_1 = E_2 = 3 \text{ mV/m}$ ;
- $\xi = \pi/2$ ,  $E_1 = 4 \text{ mV/m}$ ,  $E_2 = 3 \text{ mV/m}$ ;
- $\xi = 7\pi/4$ ,  $E_1 = E_2 = 3 \text{ mV/m}$ .

Dans le premier cas, les deux ondes sont en phase. Donc, quelle que soit la relation d'amplitude, la polarisation est linéaire mais oblique car aucune des deux composantes n'est nulle. L'inclinaison vaut  $\arctan(3/4) = 36.87^\circ$ .

Dans le 2e cas, les composantes étant en retard l'une de l'autre de  $\pm 90^\circ$  et les amplitudes étant égales, la polarisation est circulaire. À  $t = 0$ ,  $z = 0$ , le phaseur est placé à  $0^\circ$  car  $[E_y]_{t=z=0} = 0$ . Cependant à  $t = \epsilon$ ,  $[E_x]_{t,z=0}$  a diminué, tout comme  $[E_y]_{t,z=0}$ . Il faut donc tourner dans le sens anti-horaire en regardant vers l'axe  $z+$ , ce qui indique une polarisation LCP.

Par rapport au cas précédent, seules les amplitudes changent pour le 3e cas. La polarisation devient elliptique pour cette raison mais demeure à gauche d'où LEP. On peut rajouter que le rapport axial s'évalue directement grâce aux amplitudes de chacune des ondes et vaut  $4/3$  avec un angle d'inclinaison de  $0^\circ$ .

Le dernier cas montre des amplitudes égales mais un déphasage différent de  $\pm 90^\circ$ . La polarisation reste encore elliptique. Les calculs des paramètres tels l'inclinaison et le rapport axial commencent avec celui de  $\alpha_e$  lequel vaut  $45^\circ$ . On trouve alors :

$$\psi_e = \frac{1}{2} \arctan\left(\tan\left(2 \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} \arctan(\infty) = 45^\circ$$

$$\chi_e = \frac{1}{2} \arcsin\left(\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = -22.5^\circ$$
$$AR = \left|\cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right| = 2.4142 .$$

Un petit laps de temps plus tard,  $[E_x]_{t,z=0}$  diminue contrairement à  $[E_y]_{t,z=0}$ .  
Le vecteur tourne dans le sens horaire ce qui indique une polarisation REP.

---

## Exercices

### Question 1

Pour chacune des fonctions d'onde suivantes, indiquez la vitesse de propagation de l'onde en grandeur et en direction :

- a)  $e^{-0.001x}u(t - 0.02x)$ ;
- b)  $\cos(2\pi \times 10^6 t + 2\pi \times 10^{-2}y + 0.3\pi)$ ;
- c)  $\cos(2\pi \times 10^6(t - 2\pi \times 10^{-2}z) + 0.3\pi)$ .

### Question 2

Une onde sinusoïdale se propage dans le vide. Trouvez, pour les cas suivants :

- a) la fréquence, si la phase observée du champ en un point de l'espace change de  $3\pi \text{ rad}$  en  $0.1 \mu\text{s}$ ;
- b) la longueur-d'onde, si la phase du champ en un temps précis change de  $0.04\pi \text{ rad}$  sur une distance de  $0.1 \text{ m}$  dans la direction de propagation;
- c) la fréquence, si la longueur-d'onde est de  $25 \text{ m}$ ;
- d) la longueur-d'onde, si la fréquence est de  $5 \text{ MHz}$ .

### Question 3

Une onde plane uniforme se propage dans un matériau sans perte non-magnétique ( $\mu = \mu_0$ ). L'expression du champ électrique est donnée par :

$$\mathbf{E} = 37.7 \cos(6\pi \times 10^8 t + 2\pi x) \mathbf{a}_z \text{ V/m} .$$

Trouvez :

- a) la vitesse de propagation et la longueur d'onde;
- b) la direction de propagation  $\mathbf{a}_P$ ;
- c) l'expression du champ magnétique associé.

### Question 4

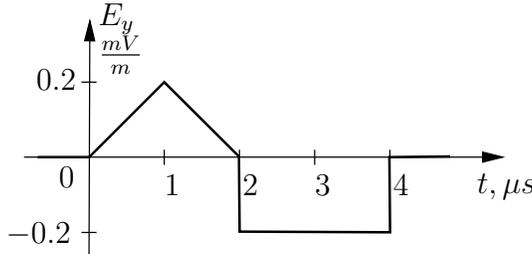
Une onde plane uniforme se propage dans un matériau sans perte. L'expression du champ magnétique est donnée par :

$$\mathbf{H} = H_o \cos(6\pi \times 10^8 t + 3\pi y + 0.1\pi) \mathbf{a}_x \text{ A/m} .$$

Trouvez :

- a) les vecteurs unitaires de la direction de propagation de l'onde  $\mathbf{a}_P$  du champ magnétique à  $t = 0$  et  $y = 0$   $\mathbf{a}_H$ , du champ électrique à  $t = 0$  et  $y = 0$   $\mathbf{a}_E$  ;
- b) la vitesse de propagation et la longueur d'onde.

**Question 5**



Une onde plane uniforme électromagnétique se propage dans le vide suivant l'axe  $z+$ . La seule composante du champ électrique  $E_y$  à  $z = 0$  en fonction du temps est reproduite ci-dessus.

Tracez :

- a) le champ électrique  $E_y$  en fonction de  $z$  au temps  $t = 3 \mu s$  ;
- b) le champ magnétique  $H_x$  en fonction du temps à la position  $-1800 m$ .

**Question 6**

Évaluez la constante de propagation et l'impédance intrinsèque à une fréquence de  $10^5 Hz$ , si les paramètres électriques du matériau sont  $\sigma = 10^{-5} S/m$ ,  $\epsilon = 5\epsilon_o$  et  $\mu = \mu_o$ .

**Question 7**

Une onde plane uniforme à la fréquence de  $10^6 Hz$  se propage dans un matériau non-magnétique. La constante de propagation vaut  $\bar{\gamma} = (0.05 + j0.1) m^{-1}$ . Déterminez :

- a) la distance à laquelle les champs s'atténuent par un facteur  $e^{-1}$  ;
- b) la distance à laquelle la phase change de  $1 rad$  pour un temps fixé ;
- c) la distance parcourue par l'onde en  $1 \mu s$  ;
- d) le rapport d'amplitude et la différence de phase entre le champ électrique et le champ magnétique.

**Question 8**

Une onde plane uniforme à la fréquence de  $5 \times 10^5 Hz$  se propage dans un matériau avec les caractéristiques suivantes : les champs s'atténuent par un facteur  $e^{-1}$  sur une distance de  $28.65 m$  dans la direction de propagation ; la longueur-d'onde équivaut à  $111.2 m$  ; le rapport des amplitudes des champs en un point est de  $59.4$  . Déterminez :

- a) la valeur de la constante de propagation ;
- b) l'impédance intrinsèque du matériau ;
- c) les paramètres électriques  $\sigma$ ,  $\epsilon$  et  $\mu$  du matériau.

### Question 9

Une onde plane uniforme se propage suivant la direction  $z^+$  dans de l'eau douce dont les paramètres électriques sont :  $\sigma = 10^{-3} S/m$ ,  $\epsilon = 80\epsilon_o$ ,  $\mu = \mu_o$ . L'expression du champ magnétique dans le plan  $z = 0$  s'écrit :

$$\mathbf{H} = 0.1 \cos(2\pi \times 10^5 t) \mathbf{a}_x A/m .$$

Écrivez l'expression complète du champ électrique en tout point et en tout temps.

### Question 10

Soient divers matériaux diélectriques parfaits non-magnétiques. Déterminez la constante diélectrique pour chacun des cas suivants :

- a) la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique correspond au tiers de celle dans le vide ;
- b) le taux de variation de la phase en un temps précis selon la distance à la fréquence  $f_o$  est le même que celui à la fréquence  $2f_o$  dans le vide ;
- c) pour la même fréquence, la longueur d'onde dans le diélectrique vaut les  $2/3$  de celle dans le vide ;
- d) pour la même amplitude du champ électrique, l'amplitude du champ magnétique dans le diélectrique est 4 fois plus élevée que celle dans le vide.

### Question 11

Une onde plane uniforme se propage à la fréquence de  $10^5 Hz$  dans un bon conducteur. On note que les champs s'atténuent par un facteur  $e^{-\pi}$  sur une distance de  $2.5 m$ . Trouvez :

- a) la distance sur laquelle les champs subissent un changement de phase de  $2\pi rad$  en un temps fixé ;
- b) la distance parcourue par l'onde en  $1 \mu s$  aux fréquences de  $10^5 Hz$  et  $10^4 Hz$  en supposant que les paramètres électriques n'ont pas changé.

### Question 12

Soit une onde plane uniforme à la fréquence de  $1 MHz$  se propageant dans la glace ( $\sigma \approx 10^{-6} S/m$ ,  $\epsilon = 3\epsilon_o$ ,  $\mu = \mu_o$ ).

- Calculez les valeurs des paramètres de propagation à savoir la constante de propagation et l'impédance intrinsèque ;
- de la réponse précédente, déduisez la vitesse de propagation et la longueur d'onde ;
- déduisez finalement la distance à parcourir pour que les champs s'atténuent par un facteur de  $e^{-1}$ .

### Question 13

Soit une onde plane uniforme à la fréquence de  $100\text{ kHz}$  se propageant dans l'eau de mer ( $\sigma = 4\text{ S/m}$ ,  $\epsilon = 80\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ).

- Calculez les valeurs des paramètres de propagation à savoir la constante de propagation et l'impédance intrinsèque ;
- de la réponse précédente, déduisez la vitesse de propagation et la longueur d'onde ;
- déduisez finalement la distance à parcourir pour que les champs s'atténuent par un facteur de  $e^{-1}$ .

### Question 14

Le champ magnétique associé à une onde plane uniforme se propageant dans un matériau non-magnétique s'exprime :

$$\mathbf{H} = 0.1e^{-z} \cos(6\pi \times 10^7 t - \sqrt{3}z) \mathbf{a}_y \text{ A/m} .$$

Trouvez :

- la puissance instantanée traversant une surface de  $3\text{ m}^2$  dans le plan  $z = 0$  à  $t = 0$  ;
- la puissance moyenne traversant la surface précédente à la même position  $z = 0$  ;
- la puissance moyenne traversant la surface déplacée dans le plan  $z = 1$ .

### Question 15

Refaire le calcul de l'exemple 5.5 pour un angle  $\theta$  quelconque de la surface entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . Tracez à l'aide d'un logiciel la puissance traversant la surface en fonction de l'angle.

- Quelle est la puissance pour  $\theta = 0$ , pour  $\theta = \pi/6$  ?
- Comment expliquer le comportement observé ?

### Question 16

Le champ électrique associé à une onde plane uniforme se propageant dans un matériau non-magnétique s'écrit :

$$\mathbf{E} = 0.2e^{-z} \cos(2\pi \times 10^6 t - 2z) \mathbf{a}_x \text{ V/m} .$$

Trouvez :

- la densité de puissance au point (3,2,1) ;
- la puissance dissipée dans le volume délimité par les plans  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$  et  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

### Question 17

Une onde plane uniforme se propage dans un diélectrique parfait de constante  $\epsilon_r = 2.25$  non-magnétique. Le champ électrique de l'onde s'exprime comme :

$$\mathbf{E}(t) = 10(4\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z) \cos(2\pi \times 10^7 t - 0.02\pi(3x + 4z)) \text{ mV/m} .$$

Donnez :

- le vecteur unitaire de propagation ;
- la longueur d'onde suivant la direction de propagation ;
- les longueurs d'onde apparentes suivant les trois axes ;
- les vitesses de phase suivant les trois axes.

### Question 18

On donne le phaseur du champ électrique dans le vide :

$$\bar{\mathbf{E}} = (3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + j5\mathbf{a}_z) e^{-j\pi(8x-6y)} \text{ mV/m} .$$

Déterminez :

- la direction de propagation ;
- s'il correspond à celui d'une onde plane uniforme ?
- la fréquence d'opération et la polarisation ;
- l'expression du phaseur du champ magnétique associé.

### Question 19

Déterminez la fréquence de l'onde plane dans le vide si :

- a) le vecteur de propagation vaut  $\boldsymbol{\beta} = \pi(1.2\mathbf{a}_x + 0.9\mathbf{a}_y)$  ;
- b) les longueurs d'onde apparentes suivant les trois axes d'un système de coordonnées sont de 2 m, 2 m et 4 m.

### Question 20

Une onde plane uniforme à la fréquence de 150 MHz se propage dans une direction positive pour les 3 axes d'un système de coordonnées. Le matériau est un diélectrique parfait de constante  $\epsilon_r = 2$  non-magnétique. Les longueurs d'onde apparentes selon les axes  $x$  et  $y$  donnent 2.5 m et 3.333 m respectivement.

Trouvez :

- a) le vecteur de phase ;
- b) la vitesse de propagation apparente dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{a}_i = (3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z)/13$ .

### Question 21

La courbe montrant la relation entre  $\omega$  et  $\beta_z$  d'une onde plane se déplaçant dans un milieu dispersif suit l'équation :

$$\omega = \omega_o + k\beta_z^2$$

où  $k$  est une constante positive.

Déduisez :

- a) la vitesse de phase de l'onde suivant l'axe  $z$  à  $\omega = 1.4\omega_o$  et à  $\omega = 1.6\omega_o$  ;
- b) la vitesse de groupe de l'onde suivant l'axe  $z$  à  $\omega = 1.5\omega_o$ .

### Question 22

Pour les phaseurs suivants du champ électrique d'une onde plane uniforme, dites le type polarisation et l'amplitude maximale du champ.

- a)  $\bar{\mathbf{E}}_a = E_o(\mathbf{a}_x + e^{j\pi/2}\mathbf{a}_z)e^{-j2\pi y}$  ;
- b)  $\bar{\mathbf{E}}_b = \bar{\mathbf{E}}_a + E_o(\mathbf{a}_x + e^{j3\pi/2}\mathbf{a}_z)e^{-j2\pi y}$  ;
- c)  $\bar{\mathbf{E}}_c = E_o(\mathbf{a}_x - (1 + j)\mathbf{a}_y)e^{-j25z}$  ;
- d)  $\bar{\mathbf{E}}_d = E_o(e^{-j\pi/4}\mathbf{a}_y - e^{j\pi/4}\mathbf{a}_z)e^{j10\pi x}$ .

**Réponses :**

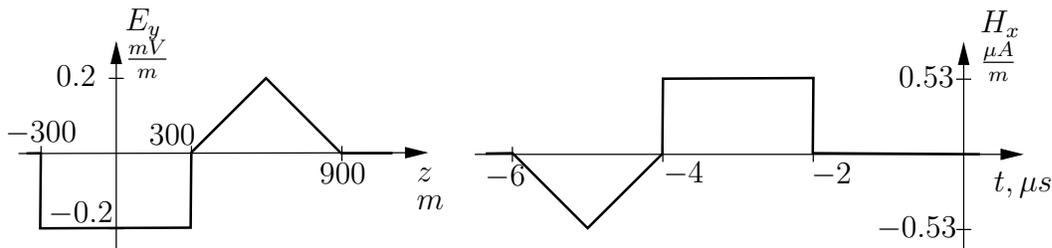
1. a)  $\mathbf{v} = 50\mathbf{a}_x \text{ m/s}$ ; b)  $\mathbf{v} = -10^8\mathbf{a}_y \text{ m/s}$ ; c)  $\mathbf{v} = 15.9\mathbf{a}_z \text{ m/s}$ .

2. a) 15 MHz; b) 5 m; c) 12 MHz; d) 60 m.

3. a)  $v_p = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 1 \text{ m}$ ; b)  $\mathbf{a}_P = -\mathbf{a}_x$ ;  
c)  $\mathbf{H} = 0.1 \cos(6\pi \times 10^8 t + 2\pi x)\mathbf{a}_y \text{ A/m}$ .

4. a)  $\mathbf{a}_P = -\mathbf{a}_y$ ,  $\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_E = -\mathbf{a}_z$ ; b)  $v_p = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 2/3 \text{ m}$ .

5.



6.  $\bar{\gamma} = (0.00083 + j0.00476) \text{ m}^{-1}$ ,  $\bar{\eta} = (163.53 \angle 9.9^\circ) \Omega$ .

7. a) 20 m; b) 10 m; c) 62.83 m; d)  $E/H = 70.62 \Omega$ ,  $\angle E - \angle H = 0.1476\pi \text{ rad}$ .

8. a)  $\bar{\gamma} = (0.0349 + j0.0565) \text{ m}^{-1}$ ; b)  $\bar{\eta} = (59.4 \angle 31.7^\circ) \Omega$ ;  
c)  $\sigma = 10^{-3} \text{ S/m}$ ,  $\epsilon = 18\epsilon_o$ ,  $\mu = \mu_o$ .

9.  $\mathbf{E}(z, t) = -2.686 e^{-0.016z} \cos(2\pi \times 10^5 t - 0.0246z + 0.1834\pi) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$ .

10. a)  $\epsilon_r = 9$ ; b)  $\epsilon_r = 4$ ; c)  $\epsilon_r = 2.25$ ; d)  $\epsilon_r = 16$ .

11. a) 5 m; b)  $d_{10^5} = 0.5 \text{ m}$ ,  $d_{10^4} = 0.1581 \text{ m}$ .

12. le matériau se comporte comme un diélectrique imparfait;

a)  $\bar{\gamma} = (1.0883 \times 10^{-4} + j0.036276) \text{ m}^{-1}$ ,  $\bar{\eta} = (217.66 + j0.653) \Omega$ ;

b)  $v_p = 1.732 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 173.21 \text{ m}$ ; c)  $\delta_p = 9.189 \text{ km}$ .

13. le matériau se comporte comme un bon conducteur;

a)  $\bar{\gamma} = 0.4\pi(1 + j) \text{ m}^{-1}$ ,  $\bar{\eta} = 0.1\pi(1 + j) \Omega$ ;

b)  $v_p = 5 \times 10^5 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 5 \text{ m}$ ; c)  $\delta_p = 0.796 \text{ m}$ .

14.  $\bar{\eta} = 12\pi^2 e^{j\pi/6} \Omega$ , a)  $[\mathcal{P}(z = 0, t = 0)]_s = 3.0771 \text{ W}$ ;

b)  $[\langle \mathcal{P}(z = 0) \rangle]_s = 1.5385 \text{ W}$ ; c)  $[\langle \mathcal{P}(z = 1) \rangle]_s = 0.2082 \text{ W}$ .

15. a)  $\theta = 0$ ,  $P = 1.6$ ;  $\theta = \pi/6$ ,  $P = 1.78$ ;

b) L'angle déplace une fraction de la surface vers une région où la puissance de l'onde est plus élevée (à cause de l'atténuation). Cet effet domine pour de petits angles mais ensuite l'effet de la projection de la surface en  $\cos(\theta)$  prend le dessus et on retrouve bien une puissance nulle lorsque la surface est perpendiculaire à la direction de propagation.

16.  $\bar{\eta} = (3.531 \angle 26.57^\circ) \Omega$ ,  
 a)  $\langle \mathbf{P} \rangle = 0.005064 e^{-2z} \mathbf{a}_z \text{ W/m}^2$  donc  $\langle P_z \rangle_{(3,2,1)} = 0.685 \text{ mW/m}^2$  ;  
 b)  $[\Delta \langle \mathcal{P} \rangle]_{\text{box}} = 0.005064(1 - e^{-2}) = 0.00438 \text{ W}$ .
17. a)  $\mathbf{a}_\beta = \frac{1}{5}(3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_z)$  ; b)  $\lambda = 20 \text{ m}$   
 c)  $\lambda_x = 33.333 \text{ m}$ ,  $\lambda_y = \infty$ ,  $\lambda_z = 25 \text{ m}$  ;  
 d)  $v_{px} = 3.333 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $v_{py} = \infty$ ,  $v_{pz} = 2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$ .
18. a)  $\mathbf{a}_\beta = 0.8\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_y$  ; b) oui car  $\mathbf{a}_E \cdot \mathbf{a}_\beta = 0$  ;  
 c)  $f = 1.5 \text{ GHz}$ , circulaire gauche ;  
 d)  $\bar{\mathbf{H}} = (-j7.96\mathbf{a}_x - j10.6\mathbf{a}_y + 13.3\mathbf{a}_z)e^{-j\pi(8x-6y)} \mu \text{ A/m}$ .
19. a)  $f = 225 \text{ MHz}$  ; b)  $f = 225 \text{ MHz}$ .
20. a)  $\beta = (0.8\pi\mathbf{a}_x + 0.6\pi\mathbf{a}_y + \pi\mathbf{a}_z) \text{ rad/m}$  ; b)  $v_{pi} = 3.25 \times 10^8 \text{ m/s}$ .
21. a)  $v_{p1.4} = 2.2136\sqrt{k\omega_o}$ ,  $v_{p1.6} = 2.0656\sqrt{k\omega_o}$  ;  
 b)  $v_{g1.5} = 1.4142\sqrt{k\omega_o}$ .
22. a) circulaire droite,  $E_{max} = E_o$  ; b) linéaire en  $x$ ,  $E_{max} = 2E_o$   
 c) elliptique droite  $\psi_e = 31.7^\circ$ ,  $E_{max} = 1.618E_o$ ,  $AR = 2.62$  ;  
 d) circulaire gauche,  $E_{max} = E_o$ .

# Chapitre 6

## Réflexion et transmission

### 6.1 Introduction

Dans la plusieurs situations pratiques, l'onde électromagnétique est incidente sur une frontière entre deux matériaux. Il y a alors transmission du signal mais aussi une réflexion, par exemple pour la transmission ou la réflexion de la lumière incidente sur l'eau. Sans faire aucun calcul, on peut toutefois dire que la réflexion sera quasi totale si l'incidence se produit sur un bon conducteur – totale sur un conducteur parfait – de par le principe de conservation de l'énergie et de l'absence de champs dans un conducteur. Dans le cas trivial où le second matériau est identique au premier, la transmission est totale. Entre ces deux extrêmes, se situe une panoplie de cas intéressants.

Pour résoudre le problème de l'onde incidente sur un plan de séparation entre deux milieux, on applique les conditions aux limites dans lesquelles on sépare les composantes tangentielles et normales des champs. Ainsi les paramètres de calcul pour la réflexion/transmission sont :

- la polarisation de l'onde à savoir comment est orienté le champ électrique – qui sert habituellement de référence – par rapport au plan d'incidence défini plus tard ;
- l'angle d'incidence de l'onde ;
- les paramètres électriques des matériaux ou encore les paramètres de propagation à la fréquence d'opération.

Dans ce chapitre, seule l'onde plane uniforme incidente est considérée. Comme celle-ci forme une base pouvant représenter tout champ, la compréhension apportée par cette analyse est utile dans un contexte plus général.

### 6.2 Incidence normale

L'incidence normale est le cas le plus simple qui limite le développement sans nécessiter beaucoup de connaissances a priori. Ici, la direction de propagation de l'onde est normale à la surface de séparation comme sur la figure 6.1. La convention utilisée pour les indices est :

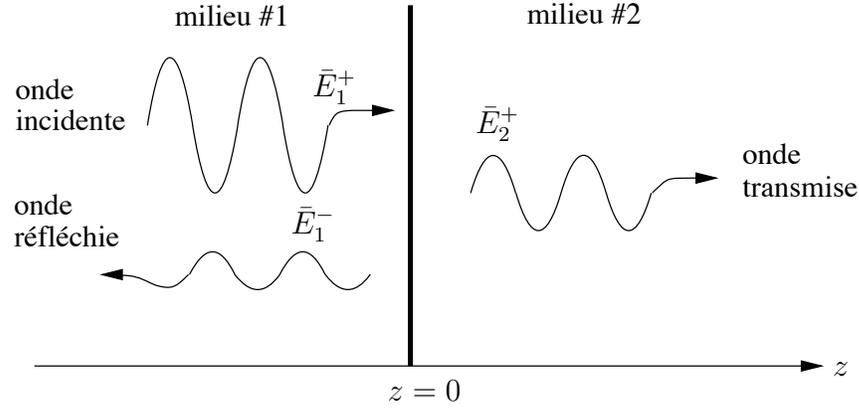


FIGURE 6.1 – Onde à incidence normale sur un plan de séparation de deux milieux.

- $i$ ,  $r$  et  $t$  identifient l'onde incidente, réfléchie et transmise respectivement ;
- 1 et 2 indiquent les milieux dans lesquels se trouve l'onde. Le matériau #1 contient l'onde incidente et l'onde réfléchie ; il remplit le volume  $z < 0$ , alors que le matériau #2, contenant l'onde transmise occupe le volume  $z > 0$ .

L'onde incidente se propage dans le premier milieu ( $z < 0$ ) suivant la direction  $z+$  normale à la surface de séparation  $z = 0$  ; l'onde réfléchie part dans la direction opposée  $z-$ , tandis que l'onde transmise continue son chemin dans le second milieu ( $z > 0$ ) en direction  $z+$ . La polarisation n'intervient pas car le champ électrique, comme le champ magnétique d'ailleurs, ne possède qu'une composante parallèle à la surface de séparation. Les expressions des champs dans chacun des milieux deviennent :

$$\vec{E}_{1x}(z) = \vec{E}_i e^{-\tilde{\gamma}_1 z} + \vec{E}_r e^{\tilde{\gamma}_1 z} \quad (6.1)$$

$$\vec{E}_{2x}(z) = \vec{E}_t e^{-\tilde{\gamma}_2 z} \quad (6.2)$$

$$\vec{H}_{1y}(z) = \vec{H}_i e^{-\tilde{\gamma}_1 z} + \vec{H}_r e^{\tilde{\gamma}_1 z} \quad (6.3)$$

$$= \frac{1}{\tilde{\eta}_1} (\vec{E}_i e^{-\tilde{\gamma}_1 z} - \vec{E}_r e^{\tilde{\gamma}_1 z}) \quad (6.4)$$

$$\vec{H}_{2y}(z) = \vec{H}_t e^{-\tilde{\gamma}_2 z} \quad (6.5)$$

$$= \frac{1}{\tilde{\eta}_2} \vec{E}_t e^{-\tilde{\gamma}_2 z} \quad (6.6)$$

où  $\vec{E}_i$ ,  $\vec{E}_r$ ,  $\vec{H}_i$  et  $\vec{H}_r$  sont les composantes des champs incidents et réfléchis qui sont tous dans le milieu #1 ;  $\vec{E}_t$  et  $\vec{H}_t$  sont les champs transmis dans le milieu #2.

Les conditions aux limites des composantes tangentielles doivent être satisfaites en  $z = 0$  :

$$[\vec{E}_{1x}]_{z=0^-} = [\vec{E}_{2x}]_{z=0^+} \quad (6.7)$$

$$[\vec{H}_{1y}]_{z=0^-} = [\vec{H}_{2y}]_{z=0^+} . \quad (6.8)$$

On rappelle que le champ électrique tangent doit être constant, tandis que le champ magnétique tangent peut être discontinu seulement en présence de courant de surface

(équation 3.43). En supposant ce courant nul, les résultats obtenus seront valides dans tous les cas, sauf pour l'interface avec un conducteur idéal.

En les appliquant avec les paires d'équations (6.1) à (6.6), il s'ensuit que :

$$\bar{E}_i + \bar{E}_r = \bar{E}_t \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{\bar{\eta}_1} (\bar{E}_i - \bar{E}_r) = \frac{1}{\bar{\eta}_2} \bar{E}_t . \quad (6.10)$$

On définit maintenant le coefficient de réflexion, noté  $\bar{\Gamma}$ , comme le rapport entre les phaseurs des champs électriques réfléchi et incident à la surface de séparation. De (6.9) et (6.10) avec un peu d'arithmétique, on en arrive à :

$$\bar{\Gamma} = \left[ \frac{\bar{E}_r}{\bar{E}_i} \right]_{z=0} = \frac{\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_1} . \quad (6.11)$$

Du côté du rapport des champs magnétiques réfléchi et incident, on observe qu'il correspond à celui des champs électriques à la différence du signe négatif – lequel provient du fameux signe négatif devant la composante en  $z-$  de  $\bar{H}$ . Donc :

$$\bar{\Gamma} = - \left[ \frac{\bar{H}_r}{\bar{H}_i} \right]_{z=0} . \quad (6.12)$$

On peut aussi définir le coefficient de transmission  $\bar{\tau}_E$  ou  $\bar{\tau}_H$  selon chacun des deux champs. On dissocie les deux car ils diffèrent sensiblement. Ils sont donnés par :

$$\bar{\tau}_E = \left[ \frac{\bar{E}_t}{\bar{E}_i} \right]_{z=0} = \frac{\bar{E}_i + \bar{E}_r}{\bar{E}_i} \quad (6.13)$$

$$= 1 + \bar{\Gamma} = \frac{2\bar{\eta}_2}{\bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_1} \quad (6.14)$$

$$\bar{\tau}_H = \left[ \frac{\bar{H}_t}{\bar{H}_i} \right]_{z=0} = \frac{\bar{H}_i + \bar{H}_r}{\bar{H}_i} \quad (6.15)$$

$$= 1 - \bar{\Gamma} = \frac{2\bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_1} . \quad (6.16)$$

Maintenant que l'on connaît les expressions des coefficients de réflexion et de transmission<sup>1</sup>, on peut décrire certains comportements :

- Lorsque  $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2$ , alors  $\bar{\Gamma} = 0$  et  $\bar{\tau}_{E,H} = 1$ . Dans cette situation – dite “adaptée” – l'onde incidente est entièrement transmise et rien n'est réfléchi.
- Avec  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  i.e. avec des diélectriques parfaits, les coefficients de réflexion et de transmission sont purement réels car les impédances intrinsèques le sont. On vérifie alors que :

$$-1 < \bar{\Gamma} = \frac{1 - \sqrt{(\mu_1\epsilon_2)/(\mu_2\epsilon_1)}}{1 + \sqrt{(\mu_1\epsilon_2)/(\mu_2\epsilon_1)}} < 1 \quad (6.17)$$

<sup>1</sup>Les coefficients de réflexion et de transmission sont aussi appelés coefficients de *Fresnel*.

et

$$0 < \bar{\tau}_E = \frac{2}{1 + \sqrt{(\mu_1\epsilon_2)/(\mu_2\epsilon_1)}} < 2 \quad (6.18)$$

$$0 < \bar{\tau}_H = \frac{2}{\sqrt{(\mu_2\epsilon_1)/(\mu_1\epsilon_2)}} + 1 < 2 . \quad (6.19)$$

- Pour le cas d'une onde incidente sur un conducteur parfait, il faut faire attention car les conditions initiales du développement ne sont pas respectées. La conductance infinie du conducteur ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) fait que  $\bar{\eta}_2 = 0$ . Les équations indiquent  $\bar{\Gamma} = -1$  et  $\bar{\tau}_E = 0$ . Ces résultats sont raisonnables : Le champ électrique est entièrement réfléchi et est nul dans le conducteur et à l'interface. Selon (6.16), on est cependant porté à croire que l'amplitude du champ magnétique transmise vaut le double de celle incidente. Il n'en est rien. En fait, un courant de surface  $J_s = 2[H_i]_{z=0^-}$  apparaît sur le conducteur et ni le champ électrique, ni le champ magnétique ne sont transmis dans le conducteur. L'onde est réfléchi en totalité et le phaseur du champ électrique réfléchi pivote de  $180^\circ$  à la surface de séparation, alors que le phaseur du champ magnétique reste en phase. En résumé tous les résultats obtenus dans cette section sont valides pour tous les cas, sauf pour  $\bar{\tau}_H$  qui est nul dans le cas d'un conducteur idéal. Tout ceci respecte une des caractéristiques de l'onde plane à savoir le produit vectoriel des deux champs indique la direction de propagation ; or, cette dernière change de sens lorsqu'il y a réflexion.

**Exemple 6.1**

Une onde plane à  $150\text{ kHz}$  se propage dans l'air  $z < 0$  et arrive à incidence normale sur le sol  $z > 0$  dont la surface se situe en  $z = 0$ . Les paramètres électriques du sol valent  $\epsilon_r = 5$ ,  $\mu_r = 1$  et  $\sigma = 10^{-4}\text{ S/m}$ .

- Donnez les expressions complètes des champs électromagnétiques de l'onde réfléchi et transmise si le vecteur-phaseur du champ électrique incident à  $z = 0^-$  s'écrit :

$$[\bar{\mathbf{E}}_i]_{z=0^-} = 10\angle -0.2 \mathbf{a}_x \text{ mV/m} .$$

On a besoin absolument des paramètres de propagation dans les deux milieux à la fréquence de  $150\text{ kHz}$ . On trouve :

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= 377\Omega & \bar{\gamma}_1 &= j3.14 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} \\ \bar{\eta}_2 &= (104.56\angle 0.59)\Omega & \bar{\gamma}_2 &= (6.28 + j9.43) \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} . \end{aligned}$$

Ainsi, de (6.11) et (6.14) :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= \frac{104.56\angle 0.59 - 377\angle 0}{104.56\angle 0.59 + 377\angle 0} \\ &= 0.633\angle 2.82 \\ \bar{\tau}_E &= 0.447\angle 0.464 . \end{aligned}$$

Il est maintenant possible d'exprimer les champs :

$$\begin{aligned} [\bar{E}_r]_{z=0^-} &= \bar{\Gamma}[\bar{E}_i]_{z=0^-} = (0.633)(10) \angle(2.82 - 0.2) \text{ mV/m} \\ \mathbf{E}_r &= 6.33 \cos(3\pi \times 10^5 t + 3.14 \times 10^{-3} z + 2.62) \mathbf{a}_x \text{ mV/m} \\ [\bar{H}_r]_{z=0^-} &= -\frac{[\bar{E}_r]_{z=0^-}}{\bar{\eta}_1} = -\frac{6.33 \angle 2.62}{377} \text{ mA/m} \\ \mathbf{H}_r &= 16.78 \times 10^{-3} \cos(3\pi \times 10^5 t + 3.14 \times 10^{-3} z + 2.62) (-\mathbf{a}_y) \text{ mA/m} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\bar{E}_t]_{z=0^+} &= \bar{\tau}_E[\bar{E}_i]_{z=0^-} = (0.447)(10) \angle(0.464 - 0.2) \text{ mV/m} \\ \mathbf{E}_t &= 4.47 e^{-6.28 \times 10^{-3} z} \cos(3\pi \times 10^5 t - 9.43 \times 10^{-3} z + 0.264) \mathbf{a}_x \text{ mV/m} \\ [\bar{H}_t]_{z=0^+} &= \frac{[\bar{E}_t]_{z=0^+}}{\bar{\eta}_2} = \frac{4.47 \angle 0.264}{104.56 \angle 0.59} \text{ mA/m} \\ \mathbf{H}_t &= 42.77 \times 10^{-3} e^{-6.28 \times 10^{-3} z} \\ &\quad \cos(3\pi \times 10^5 t - 9.43 \times 10^{-3} z - 0.326) \mathbf{a}_y \text{ mA/m} . \end{aligned}$$

On vérifie aisément que les conditions aux limites sont satisfaites car en  $z = 0$  et  $t = 0$  (quoique vraies  $\forall t$ ) :

$$10 \cos(-0.2) + 6.33 \cos(2.62) = 4.47 \cos(0.264)$$

et d'autre part :

$$\frac{10}{377} \cos(-0.2) - 16.78 \times 10^{-3} \cos(2.62) = 42.77 \times 10^{-3} \cos(-0.326) .$$

## 6.3 Lois de réflexion et de réfraction

La réflexion à incidence oblique sur une interface plane séparant deux matériaux différents, requiert l'application des quatre conditions aux limites en plus de l'application de la loi<sup>2</sup> de *Snell-Descartes*.

Au départ, cette section présuppose que les deux matériaux de part et d'autre du plan de séparation ont une conductivité nulle – donc sans perte.

Soit une onde plane incidente dont le vecteur de propagation  $\beta$  fait un angle  $\theta_i$  avec la normale du plan de séparation  $\mathbf{a}_n$ .

La satisfaction des conditions aux limites en  $z = 0$  oblige :

<sup>2</sup>La loi de la réfraction a plutôt été découverte par le physicien arabe *Ibn Sahl* vers 984. En 1621, *Snell*, un scientifique flamand dérivait mathématiquement la loi mais ne publia pas sa découverte. *Descartes* démontra indépendamment la loi par des arguments de conservation du moment dans son traité de 1637 "Discours de la méthode" sans donner crédit à *Snell*. Rejetant la solution de *Descartes*, *Fermat* arrivera à la même solution en se basant sur le parcours le plus rapide. Cette loi de réfraction prend donc le nom de *Descartes* pour les français, alors qu'ailleurs elle est nommée loi de *Snell*.

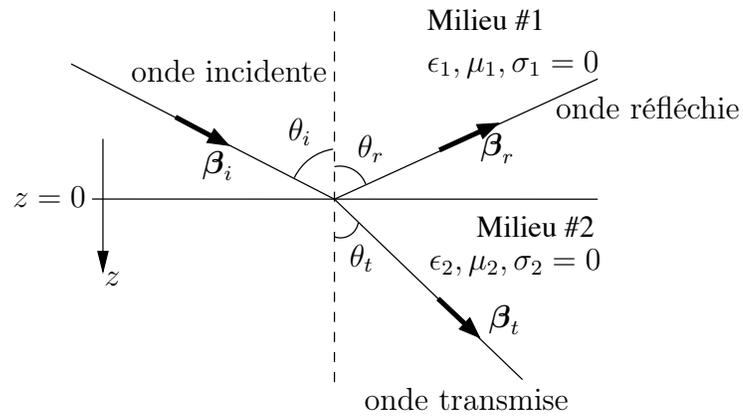


FIGURE 6.2 – Géométrie utilisée pour l’incidence oblique d’une onde plane sur une interface plane.

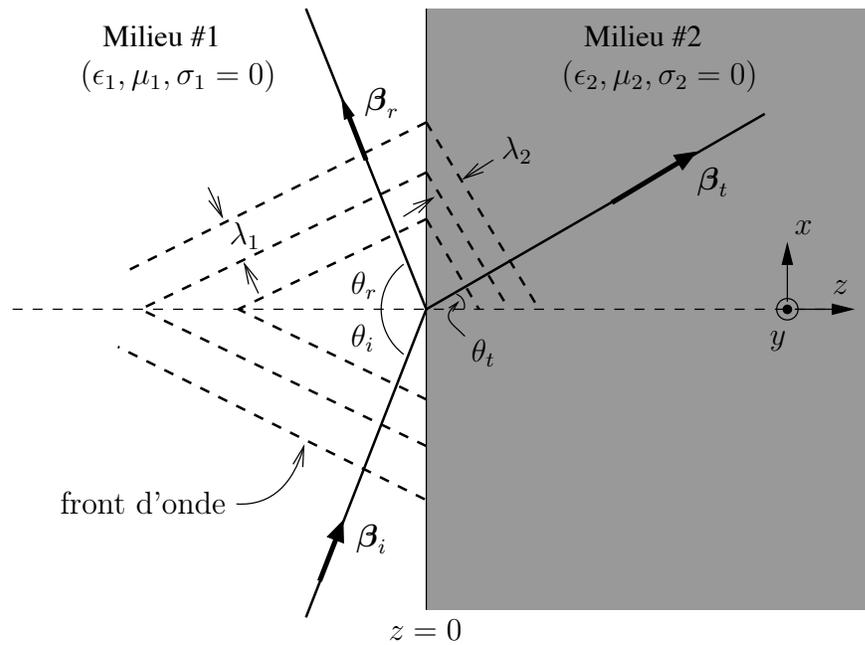


FIGURE 6.3 – Longueur d’onde apparente dans chacun des matériaux, le long d’un axe sur la surface de séparation.

- qu'une partie de l'onde soit réfléchiée avec un angle  $\theta_r$  et que l'autre partie soit transmise avec un angle  $\theta_t$  comme il apparaît sur la figure 6.2.
- qu'à un temps fixe, les creux se situent aux mêmes endroits de part et d'autre de la surface de séparation ; il en est de même pour les crêtes. Les longueurs d'onde apparentes de part et d'autre, le long de la surface, sont donc identiques. La fréquence étant forcément la même, les vitesses de phase de part et d'autre sont aussi identiques (voir figure 6.3).

Ainsi :

$$\frac{v_{p1}}{\sin \theta_i} = \frac{v_{p1}}{\sin \theta_r} = \frac{v_{p2}}{\sin \theta_t} . \quad (6.20)$$

Cette équation (6.20) pourrait porter le nom d'équation de *Snell-Descartes* générale car elle demeure valide pour tous types de matériaux avec ou sans perte.

Or, dans l'optique (et pourquoi pas en général pour les ondes électromagnétiques), l'indice de réfraction  $n$  d'un matériau est défini comme le rapport entre la vitesse de propagation dans le vide et la vitesse dans le matériau en question. Donc :

$$n = \frac{c}{v_p} \quad (6.21)$$

On déduit rapidement que la loi générale procure deux égalités :

$$\begin{aligned} \sin \theta_r &= \sin \theta_i \\ n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_t \end{aligned}$$

ou, écrites plus simplement :

$$\theta_i = \theta_r \quad (6.22)$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (6.23)$$

dont la première est connue comme la loi de réflexion, la seconde comme la loi de réfraction.

## 6.4 Incidence oblique

Comme pour l'incidence normale, il faut appliquer les conditions aux limites à l'interface. Cette fois, on doit cependant connaître la polarisation de l'onde incidente car les conditions diffèrent pour les composantes tangentielles et pour les composantes perpendiculaires à la surface de séparation.

### 6.4.1 Cas particulier sans perte

Dans des matériaux sans perte, tous les signaux sont en phase. On peut donc oublier les phaseurs. De plus, les vitesses de propagation s'écrivent en terme de  $\mu$  et  $\epsilon$  seulement :  $v_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ . Pour des matériaux non-magnétique sans perte, elles ne dépendent que de la constante diélectrique suivant :  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_r}$  de sorte qu'on peut définir l'indice de réfraction :

$$n = \sqrt{\epsilon_r} , \quad (6.24)$$

qui exprime l'ajustement de la vitesse de propagation dans le matériau.

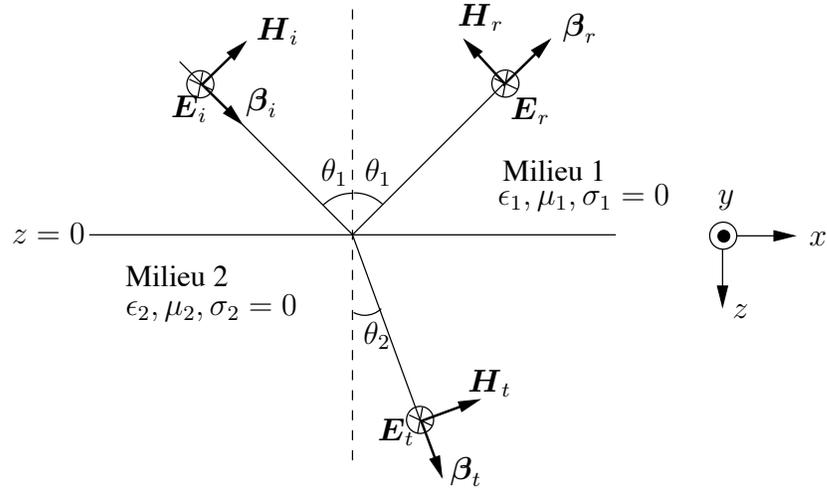


FIGURE 6.4 – Géométrie utilisée pour l’incidence oblique d’une onde plane sur une interface plane avec polarisation perpendiculaire.

### 6.4.2 Polarisation perpendiculaire (s ou TE)

La géométrie utilisée pour l’application des conditions aux limites dans la polarisation perpendiculaire est illustrée à la figure 6.4. Le champ électrique de l’onde incidente, réfléchi ou transmise pointe dans une direction perpendiculaire au plan d’incidence. Ce plan est formé par la normale à la surface de séparation et le vecteur de propagation des ondes<sup>3</sup>.

Les conditions aux limites à appliquer<sup>4</sup> s’écrivent :

- les composantes tangentielles du champ électrique sont continues ;
- les composantes tangentielles du champ magnétique sont continues de par l’absence de courant surfacique ( $\sigma_{1,2}$  finies).

Ainsi, à  $z = 0$  et selon la figure 6.4 :

$$E_{i_y} + E_{r_y} = E_{t_y} \tag{6.25}$$

$$H_{i_x} - H_{r_x} = H_{t_x} . \tag{6.26}$$

En exprimant les quantités des deux équations en termes des champs totaux, on a maintenant :

$$E_i + E_r = E_t \tag{6.27}$$

$$H_i \cos \theta_1 - H_r \cos \theta_1 = H_t \cos \theta_2 . \tag{6.28}$$

<sup>3</sup>L’appellation “horizontale” est plus courante pour les ingénieurs en RF (“Radio-Fréquence”), car pour le champ électrique émis dans l’atmosphère, le sol forme une surface de séparation horizontale. Il faut toutefois être vigilant avec l’usage du terme “horizontal” si la surface de séparation devient autre chose que le sol – e.g. un mur d’un édifice.

<sup>4</sup>En prenant la condition aux limites sur la composante normale du champ d’induction  $B_{\perp 1} = B_{\perp 2}$  au lieu de celle sur la composante tangentielle du champ magnétique, on retrouve la loi de *Snell-Descartes* générale.

Les propriétés des ondes planes permettent de remplacer les termes de champ magnétique en ceux de champ électrique selon les impédances intrinsèques du matériau dans lequel l'onde se propage. Donc (6.28) devient :

$$\frac{E_i}{\eta_1} \cos \theta_1 - \frac{E_r}{\eta_1} \cos \theta_1 = \frac{E_t}{\eta_2} \cos \theta_2 \quad (6.29)$$

On résume :

$$E_i + E_r = E_t \quad (6.30)$$

$$E_i - E_r = E_t \frac{\eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1} . \quad (6.31)$$

Deux autres expressions intermédiaires utiles sont trouvées en additionnant d'une part, les termes de gauche ensemble et ceux de droite ensemble de (6.30) et (6.31); d'autre part, en soustrayant (6.30) de (6.31) :

$$2E_i = E_t \left( 1 + \frac{\eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1} \right) \quad (6.32)$$

$$2E_r = E_t \left( 1 - \frac{\eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1} \right) . \quad (6.33)$$

Comme pour l'incidence normale, on garde la même définition du coefficient de réflexion  $\Gamma_{\perp}$ , comme le rapport entre les phaseurs des champs électriques réfléchi et incident à la surface de séparation. De (6.32) et (6.33), on en arrive à :

$$\Gamma_{\perp} = \left[ \frac{E_r}{E_i} \right]_{z=0} = \frac{\eta_2 \cos \theta_1 - \eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2} \quad (6.34)$$

$$\tau_{\perp E} = \left[ \frac{E_t}{E_i} \right]_{z=0} = 1 + \Gamma_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2} . \quad (6.35)$$

Le coefficient de transmission appliqué au champ magnétique peut aussi être obtenu, mais on préfère calculer le champ électrique transmis et, de celui-ci, déterminer le champ magnétique selon l'impédance intrinsèque du matériau #2. Cette approche est préférée car, tel qu'on la vu dans le cas de l'incidence normale, les résultats sont généraux, sauf dans le cas du coefficient de transmission du champ magnétique dans le cas d'un conducteur idéal.

### Exemple 6.2

Une onde plane à 3 GHz dans le vide ( $z < 0$ ) arrive à incidence sur un polystyrène ( $z > 0$ ) dont les paramètres électriques sont  $\epsilon_r = 1.96$ ,  $\mu_r = 1$  et  $\sigma = 0$ . Le phaseur du champ électrique est donné par :

$$\bar{\mathbf{E}}_i = 32.5 e^{-jk(0.866y + 0.5z)} \mathbf{a}_x \text{ V/m} .$$

► Donnez la valeur de la constante  $k$  dans l'expression de  $\bar{\mathbf{E}}_i$ .

On note d'abord que  $(0.866)^2 + (0.5)^2 = 1$ . La constante  $k$  est donc le module de la constante de phase  $\beta_1$  reliée à la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  :

$$\beta_1 = \frac{2\pi \times 3 \times 10^9}{3 \times 10^8} = 20\pi = 62.8 \text{ rad/m} .$$

- Déterminez l'angle d'incidence  $\theta_1$  par rapport à la normale  $\mathbf{a}_z$ .
- 

Une petite analyse du terme de phase  $\beta = \beta_1(0.866y + 0.5z)$  montre que l'onde incidente se situe dans le plan  $yz$  qui est le plan d'incidence. La direction unitaire s'exprimerait  $\mathbf{a}_\beta = \sin \theta_1 \mathbf{a}_y + \cos \theta_1 \mathbf{a}_z$ . Ainsi l'angle d'incidence vaut

$$\theta_1 = \arcsin(0.866) = \arccos(0.5) = 60^\circ .$$

- Exprimez le phaseur du champ électrique réfléchi  $\bar{\mathbf{E}}_r$ .
- 

Il suffit simplement de modifier le signe du  $\beta_{1z}$ , car l'onde réfléchie continue de progresser en  $\mathbf{a}_y$  mais s'inverse en  $\mathbf{a}_z$ . Il faut aussi tenir compte du coefficient de réflexion pour une polarisation perpendiculaire, car le champ électrique ne possède qu'une composante  $E_x$ , transverse au plan d'incidence  $yz$ .

La loi de réfraction (6.23) dit :

$$1.0 \sin 60^\circ = \sqrt{1.96} \sin \theta_2$$

d'où  $\theta_2 \approx 38^\circ$ .

De (6.34), le coefficient de réflexion vaut :

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2 \cos 60^\circ - \eta_o \cos 38^\circ}{\eta_2 \cos 60^\circ + \eta_o \cos 38^\circ}$$

ce qui est équivalent à écrire (en divisant le numérateur et le dénominateur par  $\eta_2$  et en remplaçant  $\eta_o/\eta_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$ ) :

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos 60^\circ - \sqrt{1.96} \cos 38^\circ}{\cos 60^\circ + \sqrt{1.96} \cos 38^\circ} = -0.375 .$$

Le champ électrique pointe toujours dans la direction  $\mathbf{a}_x$  (plutôt  $-\mathbf{a}_x$  à cause du signe du coefficient de réflexion) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_r &= (0.375)(32.5) e^{-j(62.8)(y \sin 60^\circ - z \cos 60^\circ)} (-\mathbf{a}_x) \text{ V/m} \\ &= -12.2 e^{-j(62.8)(0.866y - 0.5z)} \mathbf{a}_x \text{ V/m} . \end{aligned}$$

- Exprimez le phaseur du champ électrique transmis  $\bar{\mathbf{E}}_t$ .
- 

On doit évaluer l'angle de transmission dans le polystyrène, la nouvelle constante de phase et la relation d'amplitude (celle de la phase ne peut valoir que 0

ou  $180^\circ$  avec des matériaux sans perte). Cette dernière s'estime par le biais du coefficient de transmission en polarisation perpendiculaire.

De (6.35), le coefficient transmission vaut :

$$\tau_{\perp E} = \frac{2 \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ + \sqrt{1.96} \cos 38^\circ} = 0.625 .$$

Et la nouvelle constante de phase  $\beta_2$  :

$$\beta_2 = \beta_1 \sqrt{1.96} = 28\pi = 88.0 \text{ rad/m} .$$

Tout est en place pour terminer le problème puisque le vecteur unitaire du champ électrique continue de pointer dans la direction  $\mathbf{a}_x$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_t &= (0.625)(32.5) e^{-j(88.0)(y \sin 38^\circ + z \cos 38^\circ)} \mathbf{a}_x \text{ V/m} \\ &= 20.3 e^{-j(88.0)(0.62y + 0.79z)} \mathbf{a}_x \text{ V/m} . \end{aligned}$$

► Indiquez la direction du champ magnétique transmis.

La direction de propagation de l'onde transmise est spécifiée par le vecteur de propagation :

$$\beta_t = (88.0) \underbrace{(0.62\mathbf{a}_y + 0.79\mathbf{a}_z)}_{\mathbf{a}_{\beta_t}} \text{ rad/m} .$$

Or, on sait que  $\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_\beta$  ou encore :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{H_t} &= \mathbf{a}_{\beta_t} \times \mathbf{a}_{E_t} \\ &= (0.62\mathbf{a}_y + 0.79\mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_x = -0.62\mathbf{a}_z + 0.79\mathbf{a}_y . \end{aligned}$$

### 6.4.3 Polarisation parallèle (p ou TM)

L'autre polarisation indépendante est celle où les champs électriques des ondes incidente, réfléchie et transmise sont complètement localisés dans le plan d'incidence. Toutes les autres polarisations sont vues comme des combinaisons linéaires des polarisations horizontale et verticale.

La géométrie utilisée pour l'application des conditions aux limites dans la polarisation parallèle<sup>5</sup> est illustrée à la figure 6.5.

En supposant encore une fois que les conductivités sont finies et qu'il n'y a pas de courant surfacique, les conditions limites à  $z = 0$ , s'écrivent toujours ainsi :

$$E_{i_x} + E_{r_x} = E_{t_x} \quad (6.36)$$

$$H_{i_y} - \underset{\uparrow}{H_{r_y}} = H_{t_y} . \quad (6.37)$$

<sup>5</sup>Pour les ingénieurs en RF, le champ électrique est dit "vertical" en supposant que le sol forme le plan de séparation (voir remarque similaire dans la sous-section précédente).

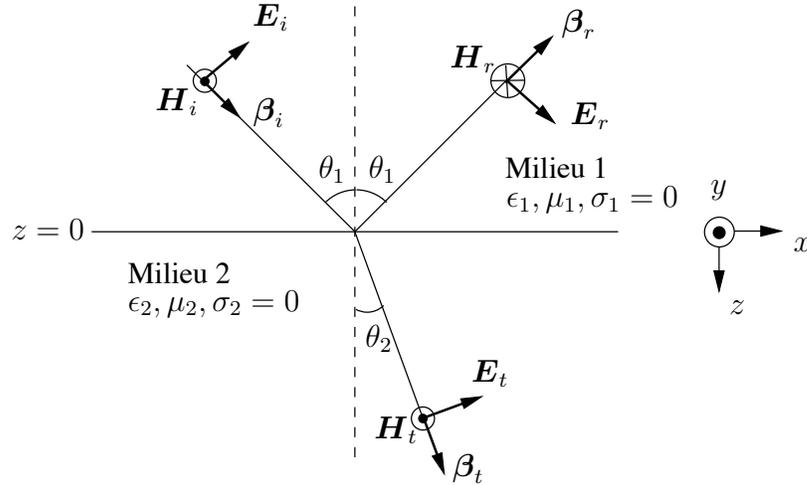


FIGURE 6.5 – Géométrie utilisée pour l’incidence oblique d’une onde plane sur une interface plane avec polarisation parallèle.

On note le changement de sens du champ magnétique  $H_r$  conformément à la géométrie montrée sur la figure 6.5. Cette inversion de  $180^\circ$  devient nécessaire pour tenir compte du sens de propagation de l’onde réfléchi. L’inversion appliquée sur le champ électrique  $E_r$  a le désagrément de changer le signe du coefficient de réflexion par rapport aux expressions préalablement obtenues avec la polarisation perpendiculaire et avec l’incidence normale lorsqu’on pose  $\theta_1 = 0$ .

Cette fois, en termes des champs totaux, on a maintenant :

$$E_i \cos \theta_1 + E_r \cos \theta_1 = E_t \cos \theta_2 \tag{6.38}$$

$$H_i - H_r = H_t \tag{6.39}$$

$$\frac{E_i}{\eta_1} - \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2} \tag{6.40}$$

On définit le coefficient de réflexion en polarisation parallèle  $\Gamma_{\parallel}$  comme le rapport entre les phaseurs des champs électriques réfléchi et incident à la surface de séparation. De (6.38) et (6.40), on aboutit à :

$$2E_i = E_t \left( \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} + \frac{\eta_1}{\eta_2} \right) \tag{6.41}$$

$$2E_r = E_t \left( \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} - \frac{\eta_1}{\eta_2} \right) \tag{6.42}$$

puis à :

$$\Gamma_{\parallel} = \left[ \frac{E_r}{E_i} \right]_{z=0} = \frac{\eta_2 \cos \theta_2 - \eta_1 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1} \tag{6.43}$$

$$\tau_{\parallel E} = \left[ \frac{E_t}{E_i} \right]_{z=0} = (1 + \Gamma_{\parallel}) \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \tag{6.44}$$

$$= \frac{2\eta_2 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1} \tag{6.45}$$

**Exemple 6.3**

Soit une onde plane incidente sur une vitre ( $n = 1.52$ ) avec un angle  $\theta_i = 40^\circ$ .

- Recherchez quelle polarisation permet une meilleure réflexion.

Tout dépend du module du coefficient de réflexion. Comme on ne se préoccupe pas de la transmission, que les matériaux sont des **diélectriques sans perte non-magnétiques**, on peut réécrire les expressions des coefficients de réflexion en termes de  $n_1$ ,  $n_2$  et  $\theta_1$  seulement. On obtient alors de (6.34) et (6.43) :

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_1}}$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-(n_2/n_1)^2 \cos \theta_1 + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_1}}{(n_2/n_1)^2 \cos \theta_1 + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_1}}.$$

En polarisation perpendiculaire, on a donc :

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos 40^\circ - \sqrt{(1.52)^2 - \sin^2 40^\circ}}{\cos 40^\circ + \sqrt{(1.52)^2 - \sin^2 40^\circ}} = -0.285$$

tandis qu'en polarisation parallèle, on a :

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-(1.52)^2 \cos 40^\circ + \sqrt{(1.52)^2 - \sin^2 40^\circ}}{(1.52)^2 \cos 40^\circ + \sqrt{(1.52)^2 - \sin^2 40^\circ}} = -0.125.$$

On peut aussi utiliser les expressions initiales des coefficients de réflexion pour arriver à la même chose. En appliquant la loi de la réfraction (6.23), l'angle de transmission est de  $\theta_2 = 25^\circ$  ; et les impédances intrinsèques sont  $\eta_1 = 377\Omega$  et  $\eta_2 = 248\Omega$ .

Conclusion : meilleure réflexion en polarisation perpendiculaire.

#### 6.4.4 Analyse et discussion

Diverses situations spéciales sont à considérer dans l'analyse des expressions obtenues avec des matériaux sans perte. Certaines se généraliseront directement, d'autres demanderont quelques modifications et d'autres encore disparaîtront avec des matériaux à pertes.

D'abord, on vérifie la correspondance pour  $\theta_1 = 0$ , alors que l'onde possède une incidence normale. De (6.23), on déduit  $\theta_2 = 0$  ; puis quelle que soit la polarisation, de (6.34), (6.35) ou (6.43), (6.45), on retrouve :

$$\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel} = \Gamma$$

$$\tau_{\perp E} = \tau_{\parallel E} = \tau_E.$$

### 6.4.4.1 Angle critique

Si l'application de *Snell-Descartes* donne  $\sin \theta_2 = 1$ , alors on obtient une réflexion totale, soit  $\Gamma_{\perp} = 1$  ou  $\Gamma_{\parallel} = -1$ ; Il sera bientôt montré que toute la puissance est réfléchié et qu'aucune puissance n'est transmise et ce même si les coefficients de transmission  $\tau_{\perp E}$  et  $\tau_{\parallel E}$  ne sont pas nuls.

L'angle d'incidence auquel la réflexion totale (ou réflexion totale interne) commence s'appelle l'angle critique  $\theta_c$ . Il dépend des indices de réfraction des deux matériaux en présence.

La détermination de l'angle critique  $\theta_c$  suit :

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta_c &= n_2 \sin(90^\circ) = n_2 \\ \theta_c &= \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \end{aligned} \quad (6.46)$$

On voit bien que pour avoir un angle critique, il faut  $n_1 > n_2$ . Ce n'est possible que dans un sens.

Suivant la loi de réfraction (6.23), dès que  $\theta_1 > \theta_c$ , le terme  $\sin \theta_2$  dépasse l'unité ! En conséquence,  $\cos \theta_2$  devient imaginaire<sup>6</sup> et les coefficients de réflexion – pour toutes polarisations – sont des nombres complexes de module unitaire. L'explication physique vient du fait que, pour satisfaire les conditions aux limites, la présence d'une onde transmise est requise. Cette onde a une forme exponentielle décroissante rapide et ne se propage pas. Elle est dite évanescente.

D'après la géométrie utilisée à la figure 6.3 pour la transmission dans le second milieu, la constante de phase s'écrit :

$$\beta_{x_2}^2 + \beta_{z_2}^2 = \beta_t^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 .$$

À la limite  $\theta_1 = \theta_c$  on a :

$$\begin{aligned} \beta_{x_2}^2 &= \beta_{x_1}^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \theta_c \\ &= \omega^2 \left(\frac{n_1 \sin \theta_c}{c}\right)^2 = \omega^2 \left(\frac{n_2}{c}\right)^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 . \end{aligned}$$

Ceci implique que  $\beta_{x_2}^2 = \beta_t^2$  et, par conséquent,  $\beta_{z_2}^2 = 0$ .

Lorsque on augmente  $\theta_1$  tel que  $\theta_1 > \theta_c$ , on a :

$$\beta_{x_2}^2 = \beta_{x_1}^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \theta_1 > \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \theta_c = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 = \beta_t^2 .$$

Cette fois, ceci implique que  $\beta_{x_2}^2 > \beta_t^2$  et, par conséquent,  $\beta_{z_2}^2 < 0$ . Ainsi  $\beta_{z_2}$  devient purement imaginaire de type  $-jk$ .

En référence à la constante de propagation, une constante de phase purement imaginaire correspond à une constante d'atténuation, ce qui implique donc une atténuation exponentielle des champs, malgré un matériau sans perte et un taux de variation de la phase nulle. Ce phénomène est celui de l'onde évanescente qui ne se propage pas.

<sup>6</sup>Ce découle de  $\cos^2 \theta_2 = 1 - \sin^2 \theta_2 < 0$ .

## 6.4.4.2 Angle de Brewster

Dans la condition  $\eta_1 \cos \theta_1 = \eta_2 \cos \theta_2$ , le coefficient de réflexion en polarisation parallèle vaut zéro :  $\Gamma_{\parallel} = 0$ . Une transmission totale existe sans aucune réflexion. L'angle d'incidence qui produit ce résultat s'appelle l'angle de *Brewster*  $\theta_{B\parallel} = \theta_B$  :

$$\cos \theta_B = \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos \theta_2 .$$

De la loi de réfraction (6.23) avec la condition d'une réflexion nulle, il découle une seconde équation liant  $\theta_1$  et  $\theta_2$  :

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_B .$$

Par la combinaison des deux dernières équations et en utilisant l'identité trigonométrique  $\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}$ , l'angle de *Brewster* peut être exprimé :

$$\cos \theta_B = \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} \quad (6.47)$$

$$= \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_B} \quad (6.48)$$

$$\cos^2 \theta_B = \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 - \left(\frac{\eta_2 n_1}{\eta_1 n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_B \quad (6.49)$$

$$1 - \sin^2 \theta_B = \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \sin^2 \theta_B \quad (6.50)$$

$$\sin \theta_{B\parallel} = \sqrt{\frac{1 - \mu_2 \epsilon_1 / \mu_1 \epsilon_2}{1 - (\epsilon_1 / \epsilon_2)^2}} . \quad (6.51)$$

L'expression est simplifiée davantage avec des matériaux tels que  $\mu_1 = \mu_2$  :

$$\theta_{B\parallel} = \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon_1 / \epsilon_2}} \right) = \arctan \left( \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \right) = \arctan \left( \frac{n_2}{n_1} \right) . \quad (6.52)$$

Sans faire une démonstration aussi élaborée, on vérifie pour la polarisation perpendiculaire que la condition  $\eta_2 \cos \theta_1 = \eta_1 \cos \theta_2$  exige cette fois :

$$\sin \theta_{B\perp} = \sqrt{\frac{1 - \mu_1 \epsilon_2 / \mu_2 \epsilon_1}{1 - (\mu_1 / \mu_2)^2}} . \quad (6.53)$$

Avec des matériaux non-magnétiques ou ceux tels que  $\mu_1 = \mu_2$ , l'angle de *Brewster* existe toujours dans la polarisation parallèle mais jamais dans celle perpendiculaire puisque  $\sin \theta_{B\perp} = \infty$ , laquelle n'a pas de solution réelle. C'est complètement l'inverse lorsque  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ . Entre ces deux cas, l'angle de *Brewster* apparaît dans une seule des deux polarisations à la fois.

**Exemple 6.4**

Soit une interface air-silicium. Le silicium est assumé sans perte avec une constante diélectrique de 11.7.

- ▶ Déterminez l'angle auquel la réflexion sera totale si une onde plane à polarisation parallèle arrive à incidence
  - de l'air vers le silicium ;
  - du silicium vers l'air.

L'angle critique déterminé par (6.46) vaut dans le sens air-silicium :

$$\theta_c = \arcsin \sqrt{\epsilon_{r_{si}}} = \arcsin \sqrt{11.7} = 1.571 - j1.901$$

donc il y a impossibilité.

Par contre dans le sens silicium-air :

$$\theta_c = \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r_{si}}}} \right) = \arcsin \sqrt{\frac{1}{11.7}} = 17^\circ .$$

- ▶ Déterminez cette fois l'angle auquel la transmission sera totale
  - de l'air vers le silicium ;
  - du silicium vers l'air.

De (6.52) et dans le sens air-silicium :

$$\theta_{B\parallel} = \arctan \sqrt{\epsilon_{r_{si}}} = \arctan \sqrt{11.7} = 73.7^\circ$$

alors que le sens silicium-air :

$$\theta_{B\parallel} = \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r_{si}}}} \right) = \arctan \sqrt{\frac{1}{11.7}} = 16.3^\circ .$$

On remarque que les deux angles sont complémentaires, ce qui est toujours le cas. Qui plus est, l'angle  $\theta_2$  est aussi complémentaire à  $\theta_B$ , de sorte qu'il y a toujours un angle de  $90^\circ$  entre la réflexion (si elle existait) et la réfraction.

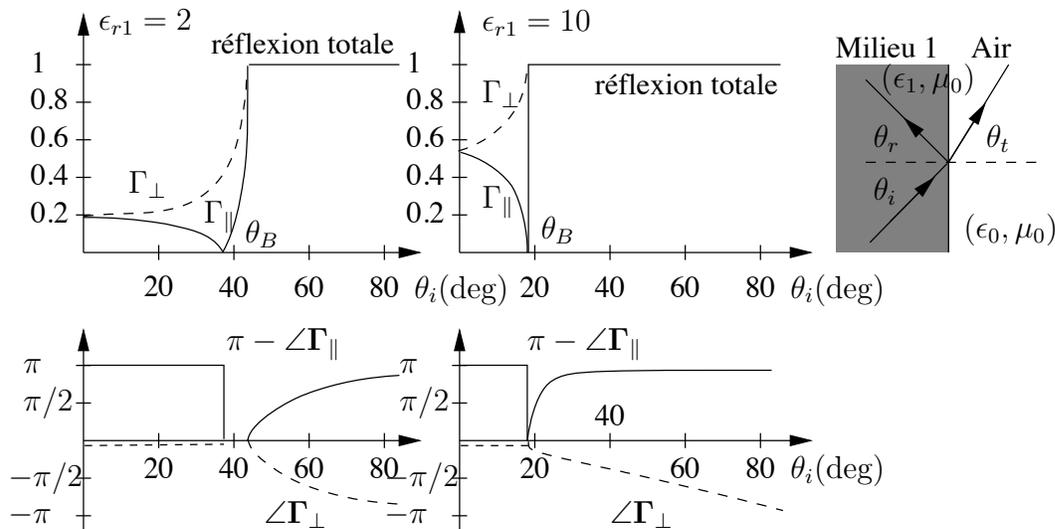


FIGURE 6.6 – Comportement typique du coefficient de réflexion en fonction de l’angle d’incidence pour les deux polarisations.

#### 6.4.4.3 Comportement des coefficients

Cette analyse du comportement est valide uniquement pour des matériaux qui sont non-magnétiques (sans perte bien sûr). Les courbes typiques apparaissent sur la figure 6.6.

- Polarisation perpendiculaire

Le module du coefficient de réflexion :

- suit une courbe monotone croissante avec pente croissante pour des angles d’incidence allant de 0 à l’angle critique ;
- reste égal à l’unité (réflexion totale) pour des angles d’incidence plus élevés ou, dans le sens où il n’existe pas d’angle critique, devient égal à l’unité qu’à l’incidence rasante ( $\theta_i = 90^\circ$ ).

L’argument du coefficient de réflexion dans le sens sans angle critique demeure à  $-180^\circ$ .

Par contre dans le sens avec angle critique, l’argument du coefficient de réflexion :

- reste nul entre 0 et l’angle critique ;
- décroît de manière monotone vers  $-180^\circ$  pour des angles d’incidence plus élevés que l’angle critique.

- Polarisation parallèle

Dans le sens de propagation où il existe un angle critique, le module du coefficient de réflexion :

- suit une courbe décroissante avec pente de plus en plus prononcée, ce, jusqu’à devenir nul pour des angles d’incidence allant de 0 à l’angle de *Brewster* ;

- de l'angle de *Brewster*, il se met à croître de plus en plus rapidement jusqu'à atteindre l'unité à l'angle critique ;
- reste unitaire pour des angles d'incidence plus élevés.

L'argument du coefficient de réflexion :

- reste nul entre 0 et l'angle de *Brewster* ;
- devient égal à  $-180^\circ$  entre l'angle de *Brewster* et l'angle critique ;
- croît ensuite de manière monotone pour revenir à 0.

On remarque que les coefficients de réflexions deviennent complexes lorsque  $\theta_i > \theta_c$  alors que les matériaux sont sans perte ; cela s'explique par l'angle  $\theta_t$  qui devient un angle complexe ayant un cosinus imaginaire.

Pour l'autre sens, comme il n'y a pas d'angle critique, le comportement devient similaire en assumant  $\theta_c$  atteint à l'incidence rasante i.e.  $\theta_i = 90^\circ$ .

## 6.5 Incidence sur un conducteur parfait

Les développements réalisés dans les sections précédentes ne sont pas formellement valides pour l'incidence sur un conducteur parfait. Il convient de revenir sur ce cas particulier même si on avait tenté une explication intuitive plus tôt.

Aucune onde ne se propage dans un conducteur parfait. Les composantes tangentes du champ électrique sur la surface du conducteur s'éliminent, ce qui implique :

$$[\bar{\mathbf{E}}_{\parallel i}]_{z=0^-} + [\bar{\mathbf{E}}_{\parallel r}]_{z=0^-} = 0 \tag{6.54}$$

$$\bar{E}_{\parallel i} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_1} + \bar{E}_{\parallel r} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_1} = 0 \tag{6.55}$$

$$\bar{E}_{\parallel i} = -\bar{E}_{\parallel r} . \tag{6.56}$$

En polarisation parallèle, on obtient de plus  $\bar{E}_{\perp i} = \bar{E}_{\perp r}$  inversant aussi  $\mathbf{E}_r$  par rapport à la convention tout en conservant un même module. Donc :

$$\bar{E}_i = -\bar{E}_r . \tag{6.57}$$

Ceci signifie que le coefficient de réflexion vaut  $-1$  qu'importe l'angle d'incidence et la polarisation :

$$\Gamma_{cond} = -1 . \tag{6.58}$$

En contre-partie, un courant de surface et des charges sont induits sur la surface de séparation pour satisfaire les conditions aux limites des composantes perpendiculaires de  $\mathbf{E}$  et parallèles de  $\mathbf{H}$ .

Dans le demi-espace occupé par le matériau #1 (pas le conducteur idéal), un diagramme d'onde stationnaire s'établit. Si le matériau #1 est sans perte, le champ double d'amplitude à certains endroits par rapport à  $E_i$ . À d'autres endroits, il est complètement

annulé. Ce diagramme ne varie pas dans le temps, d'où le terme stationnaire. Effectivement, en essayant avec une polarisation perpendiculaire (on obtient le même résultat avec une polarisation parallèle), le champ total dans ce matériau s'exprime comme :

$$\bar{\mathbf{E}}_1 = \bar{\mathbf{E}}_i + \bar{\mathbf{E}}_r \quad (6.59)$$

$$= \bar{E}_i e^{-j\beta_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)} \mathbf{a}_y + \bar{E}_r e^{-j\beta_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)} \mathbf{a}_y \quad (6.60)$$

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_i e^{-j\beta_1 x \sin \theta_1} \underbrace{\left( e^{-j\beta_1 z \cos \theta_1} - e^{j\beta_1 z \cos \theta_1} \right)}_{-2j \sin(\beta_1 z \cos \theta_1)} \quad (6.61)$$

$$E_1 = 2 E_i |\sin(\beta_1 \cos \theta_1 z)| . \quad (6.62)$$

Le diagramme stationnaire ne dépend que de  $z$ , la distance au plan de séparation. Il se répète à tous les multiples de  $\lambda_{1z}/2$  i.e.  $\lambda_1/(2 \cos \theta_1)$ .

Si on déplaçait la surface du conducteur à  $z = \pm k \lambda_{1z}/2$  ( $k$  entier), le diagramme resterait identique dans tout le reste de l'espace du matériau #1! Cette propriété sera longuement revue dans le chapitre sur le régime sinusoïdal permanent dans les lignes de transmission.

## Exercices

### Question 1

Une onde plane uniforme à la fréquence de 1 MHz arrive à incidence normale du vide à l'interface en  $z = 0$  avec un matériau dont les paramètres électriques sont :  $\sigma = 10^{-3} S/m$ ,  $\epsilon = 6\epsilon_o$  et  $\mu = \mu_o$ . Calculez les coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique.

### Question 2

La région  $z < 0$  est le vide tandis que la région  $z > 0$  est remplie d'un matériau caractérisé par  $\sigma = 10^{-3} S/m$ ,  $\epsilon = 12\epsilon_o$  et  $\mu = \mu_o$ . Si une onde plane uniforme avec un champ électrique en provenance du vide :

$$\mathbf{E}_i = E_o \cos(3\pi \times 10^6 t - 0.01\pi z) \mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

est incident sur l'interface  $z = 0$ , obtenez l'expression des champs électromagnétiques réfléchis et transmis.

### Question 3

Une onde plane à 100 MHz dans un matériau diélectrique parfait de constante  $\epsilon_{r1} = 3$  non-magnétique arrive à incidence avec un angle de  $45^\circ$  sur un matériau diélectrique parfait de constante  $\epsilon_{r2} = 9$  non-magnétique.

Calculez les rapports  $E_r/E_i$  et  $E_t/E_i$  pour les polarisations perpendiculaire et parallèle.

### Question 4

Une onde dans le vide (région  $x < 0$ ) est incidente à  $45^\circ$  sur un matériau diélectrique parfait (région  $x > 0$ ) de constante  $\epsilon_r = 1.5$  non-magnétique. Exprimez les champs électriques réfléchi et transmis si (notez que  $E_i = E_o\sqrt{2}$  et  $\beta_i = 2\pi \text{ rad/s}$ ) :

$$\mathbf{E}_i = E_o(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z) \cos(6\pi \times 10^8 t - \sqrt{2}\pi(x + z)) \text{ mV/m} .$$

### Question 5

Une onde plane est incidente sur une surface de séparation entre deux matériaux diélectriques parfaits non-magnétiques.

Trouvez la relation entre l'angle de transmission et l'angle de *Brewster*.

### Question 6

Un signal de communication sans fil (dans l'air) est représenté par :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_i &= \bar{\mathbf{E}}_{\perp i} + \bar{\mathbf{E}}_{\parallel i} \\ &= (E_1(0.71 - j0.71)\mathbf{a}_y + jE_2(0.5\mathbf{a}_x - 0.866\mathbf{a}_z)) e^{-j((40\pi/\sqrt{3})x + (40\pi/3)z)} . \end{aligned}$$

Le signal arrive à incidence oblique sur du verre ( $\sigma = 0$ ,  $\epsilon_2 = 5$  et  $\mu_r = 1$ ) situé dans le plan  $z = 0$ . Trouvez :

- l'angle d'incidence et de transmission ;
- l'expression du phaseur du champ électrique réfléchi.

### Réponses :

1.  $\bar{\Gamma} = 0.6909 \angle 164.18^\circ$ ,  $\bar{\tau}_E = 0.3846 \angle 29.33^\circ$ .

2.  $\bar{\Gamma} = 0.6363 \angle 168.8^\circ$ ,  $\bar{\tau}_E = 0.3955 \angle 18.2^\circ$  ;

$$\mathbf{E}_r = 0.6363 E_o \cos(3\pi \times 10^6 t + 0.01\pi z + 0.938\pi) \mathbf{a}_x \text{ V/m},$$

$$\mathbf{E}_t = 0.3955 E_o e^{-0.0495z} \cos(3\pi \times 10^6 t - 0.1196z + 0.1009\pi) \mathbf{a}_x \text{ V/m},$$

$$\mathbf{H}_r = -\frac{0.6363 E_o}{377} \cos(3\pi \times 10^6 t + 0.01\pi z + 0.938\pi) \mathbf{a}_y \text{ A/m},$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{0.3955 E_o}{91.51} e^{-0.0495z} \cos(3\pi \times 10^6 t - 0.1196z - 0.0241\pi) \mathbf{a}_y \text{ A/m}.$$

3.  $\Gamma_\perp = -0.382$ ,  $\tau_\perp = 0.618$ ,

$$\Gamma_\parallel = -0.146$$
,  $\tau_\parallel = 0.662$ .

4.  $\Gamma_\parallel = -0.03$ ,  $\tau_\parallel = 0.84$ ,  $\theta_t = 35.26^\circ$  ;

$$\mathbf{E}_r = 0.03 E_o (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) \cos(6\pi \times 10^8 t - \sqrt{2}\pi(-x + z)) \text{ mV/m},$$

$$\mathbf{E}_t = 0.84 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} E_o (\mathbf{a}_x - \sqrt{2}\mathbf{a}_z) \cos(6\pi \times 10^8 t - \sqrt{6}\pi(0.82x + 0.58z)) \text{ mV/m}.$$

Le module de  $E_t$  est bien  $0.84 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} E_o \sqrt{3} = 0.84 E_o \sqrt{2}$ .

5. Ayant  $n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \cos \theta_B$  puisque  $\tan \theta_B = \sin \theta_B / \cos \theta_B = n_2 / n_1$ , on déduit que  $\theta_t = 90^\circ - \theta_B$ .

6. a)  $f = 4 \text{ GHz}$ ,  $\theta_i = 60^\circ$ ,  $\theta_t = 22.8^\circ$  ;

b)  $\Gamma_\perp = -0.61$ ,  $\Gamma_\parallel = -0.1$

$$\bar{\mathbf{E}}_r = (-0.61(0.71 - j0.71)E_1 \mathbf{a}_y - 0.1jE_2(0.5\mathbf{a}_x + 0.866\mathbf{a}_z)) e^{-j((40\pi/\sqrt{3})x - (40\pi/3)z)}$$

$$= ((0.61E_1 \angle 2.36) \mathbf{a}_y + (0.1E_2 \angle 4.71)(0.5\mathbf{a}_x + 0.866\mathbf{a}_z)) e^{-j((40\pi/\sqrt{3})x - (40\pi/3)z)} .$$



# Chapitre 7

## Ligne de transmission en mode TEM

### 7.1 Introduction

Au chapitre précédent, l'onde se propageait dans un canal sans frontière. Le terme utilisé pour décrire ce type de propagation est “onde libre”. Dans le reste de la matière à couvrir, l'onde sera guidée par une structure appelée ligne de transmission. Parfois les champs seront complètement bornés dans la structure, parfois non. De toute manière, les conditions aux limites appliquées par certains composants de la structure servent toujours à définir la distribution des champs.

En général, les lignes de transmission supportent plusieurs mode de propagation où les champs ne sont pas toujours entièrement transverses. Dans un cas particulier, certaines lignes de transmission supportent un mode dit TEM pour “Transverse Electro-Magnetic” dans lequel tant le champ électrique que le champ magnétique sont entièrement transverses et se comportent donc de manière très similaire à l'onde plane libre. Il est, par conséquent, plus simple d'aborder le guidage en commençant par le mode TEM, d'autant plus que, lorsque ce n'est pas le cas, la propagation peut souvent être convenablement approximée TEM.

Les lignes de transmission se retrouvent partout et non pas seulement chez les compagnies de téléphones, d'électricité ou de télévision-câblée. Un circuit imprimé contient une grande quantité de lignes de transmission ; de même un réseau informatique, un bus SCSI, SATA ou USB, et une banale sonde d'oscilloscope, constituent d'excellents exemples.

Afin de respecter la condition d'existence d'un mode TEM, la configuration de la ligne de transmission respecte les points suivants retrouvés sur la figure 7.1 :

- deux conducteurs parallèles espacés ;
- un seul diélectrique<sup>1</sup>, homogène et toujours isotropique (peut être le vide) ;
- une section transversale constante, génératrice du prisme infiniment long.

---

<sup>1</sup>En présence dans plusieurs diélectriques, il est impossible d'avoir un mode TEM car les vitesses de propagation de l'onde diffèrent dans chacun d'eux. On peut toutefois supposer un mode quasi-TEM où on assume un comportement semblable au mode TEM.

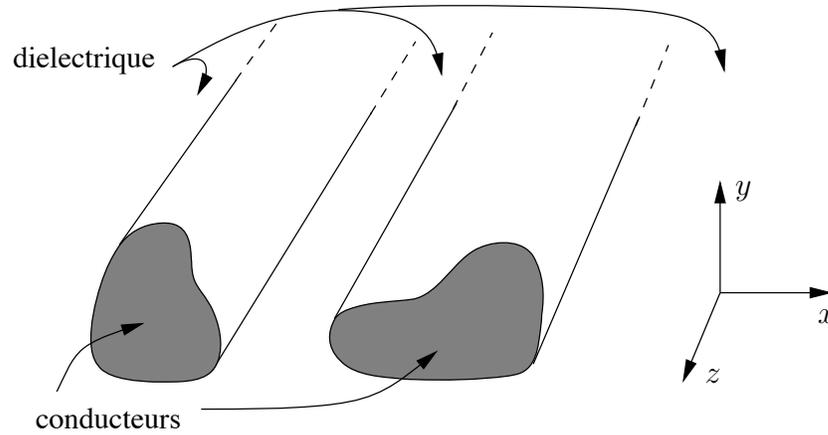


FIGURE 7.1 – Configuration d’une ligne de transmission à section quelconque.

Selon le troisième point, l’analyse de la distribution des champs se réalise en deux dimensions dans un plan – on choisit le plan  $xy$  à  $z = 0$  – transversal à la direction de propagation  $z$ .

## 7.2 Mode TEM

Avant d’entreprendre l’étude des lignes, il est opportun de décrire davantage le mode TEM. Au chapitre précédent, on mentionne que l’onde plane uniforme n’existe pas ; cependant les concepts qui s’y rattachent, peuvent s’appliquer à des ondes particulières qui, elles, existent. En fait, l’onde plane uniforme a servi à obtenir plus facilement certaines caractéristiques de l’onde plane. Or, l’onde qui se propage dans une ligne de transmission infinie de section transversale constante se comporte et possède les caractéristiques d’une onde plane telles que décrites à la section 5.6.

Dans un arrangement TEM avec propagation en  $z$ , les champs ont possiblement deux composantes en  $x$  et en  $y$  qui peuvent varier en fonction de  $x, y$  et, par la relation spatio-temporelle, de  $z$ .

- La composante en  $z$  est nulle car les champs sont transverses à la direction de propagation ( $\mathbf{a}_E \perp \mathbf{a}_z$  et  $\mathbf{a}_H \perp \mathbf{a}_z$  avec  $\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H = \pm \mathbf{a}_z$ ).
- La coordonnées  $z$  n’intervient qu’à cause du déplacement de l’onde dans cet axe. Elle apparaît donc dans le terme d’atténuation  $e^{-\alpha z}$  et dans la primitive de la relation spatio-temporelle de type  $(t - z/v_p)$  ou  $(\omega t - \beta z)$  pour une onde positive.

Donc, on a par exemple, pour une onde positive en régime sinusoïdal permanent :

$$\mathbf{E} = E^+(x, y)e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \xi^+) \mathbf{a}_E \tag{7.1}$$

$$\mathbf{H} = H^+(x, y)e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \xi_h^+) \mathbf{a}_H . \tag{7.2}$$

La différence entre une onde TEM et une onde plane se situe donc au niveau de la dépendance des coordonnées  $x$  et  $y$  pour chacune des composantes des champs. L’onde plane uniforme est simplement un cas particulier de l’onde TEM qui a l’avantage d’être plus simple à développer.

## 7.3 Modèle distribué d'une ligne

Dans la théorie des circuits, l'effet des lignes de transmission est négligé. La tension – ou le courant – à la sortie d'une source directement connectée à une charge est supposée identique à celle aux bornes de la charge et ce, malgré l'atténuation possible ou le délai de propagation de la ligne qui joint les deux éléments. Tant que la ligne est "électriquement" courte<sup>2</sup>, la supposition n'entraîne pas de conséquences importantes. Il en va autrement lorsque la fréquence augmente, un peu comme les limites de validité du comportement d'une inductance ou d'un condensateur montrées dans la section 4.8.

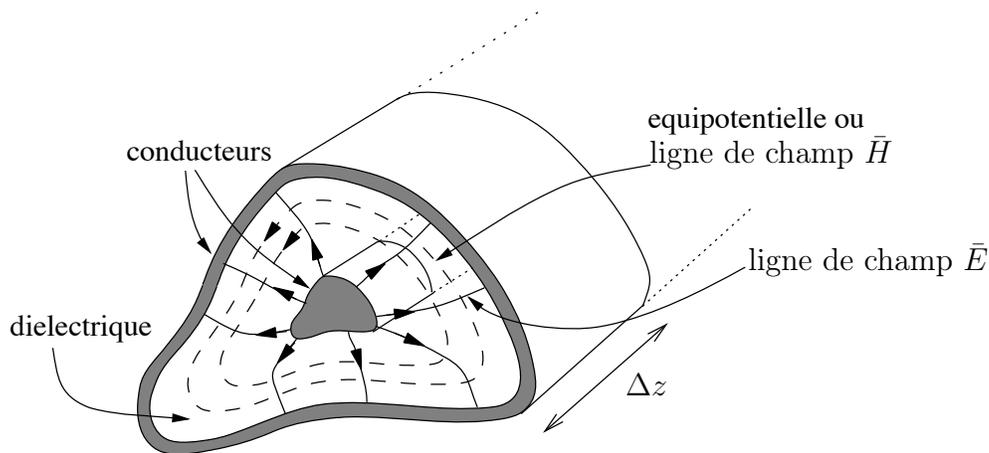


FIGURE 7.2 – Lignes des champs électrique et magnétique dans une ligne de transmission à section quelconque.

Pour introduire la modélisation d'une ligne générale, on suppose une section patatoïdale constituée de deux conducteurs avec, entre eux, un diélectrique. Une telle ligne est reproduite sur la figure 7.2. Les champs électromagnétiques sont complètement contenus dans le diélectrique. Cette ligne doit aussi satisfaire les hypothèses de validité suivantes :

- la distance de séparation entre les deux conducteurs et le rayon des fils doivent être petits par rapport à la longueur d'onde<sup>3</sup> ;
- les paramètres physiques ( $\epsilon$ ,  $\sigma$  et  $\mu$  des matériaux en jeu) demeurent constants le long de la ligne ;
- plusieurs segments identiques de longueur  $\Delta z$  (qui tendra vers  $dz$ ) mis bout à bout pour constituer la ligne.

L'idée consiste à transformer la ligne pour en faire une représentation avec des éléments de circuits électriques, puis à travailler avec les notions de courant et de tension bien connues.

<sup>2</sup>La longueur électrique correspond à la longueur en terme de longueur d'onde. Dès que la dimension physique d'un objet dépasse une fraction appréciable de la longueur d'onde, e.g.  $\lambda/10$ , l'objet ne peut être qualifié d'électriquement court.

<sup>3</sup>Cette restriction est due à l'exigence d'effet simultané de la tension et du courant sur chacun des conducteurs.

La validité d'une telle démarche pour des fréquences élevées repose sur des dimensions petites pour assumer un mode quasi-statique d'où émane les notions de circuits. Avec une segmentation de plus en plus fine, la ligne est assimilée à une infinité de segments de ligne mis bout à bout. C'est le modèle distribué d'une ligne. Le travail consiste maintenant à déduire le comportement d'un segment plutôt que la ligne entière.

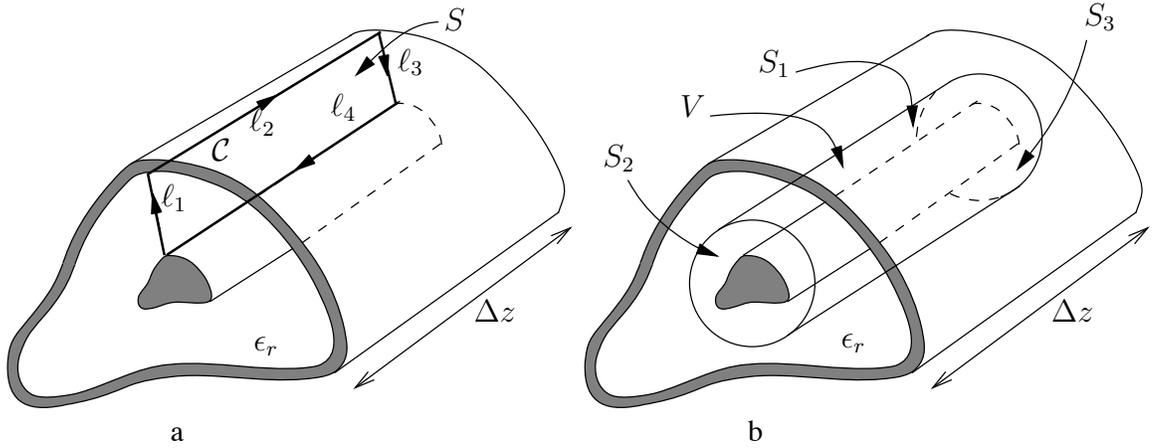


FIGURE 7.3 – Parcours fermé et surface fermée d'intégration pour développer le modèle distribué.

De l'équation de *Faraday* et de l'équation de continuité sous la forme intégrale, on obtient deux relations entre la tension et le courant qui servent de base au modèle.

- On choisit d'abord un parcours fermé qui délimite une surface par laquelle passe tout le flux magnétique du segment  $\Psi(z, t)$ . Un tel parcours  $\mathcal{C}$  longe la surface des deux conducteurs sur la longueur  $\Delta z$  ( $\ell_2, \ell_4$ ) et se rend directement d'un conducteur à l'autre aux extrémités du segment ( $\ell_1, \ell_3$ ) comme sur la figure 7.3 (a).

Avec des conducteurs parfaits, la différence de potentiel sur la surface le long des conducteurs est nulle. Les intégrales sur  $\ell_2$  et  $\ell_4$  sont nulles. Donc, avec (4.35) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}_{\Psi(z,t)} \quad (7.3)$$

$$\underbrace{\int_{\ell_1}}_{-V(z,t)} + \underbrace{\int_{\ell_2}}_0 + \underbrace{\int_{\ell_3}}_{V(z+\Delta z,t)} + \underbrace{\int_{\ell_4}}_0 = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\Psi(z,t)}_{L_{\Delta z} I(z,t)} \quad (7.4)$$

$$\Delta V(z,t) = -L_{\Delta z} \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} . \quad (7.5)$$

où  $\Delta V(z,t)$  indique la différence des voltages entre les deux conducteurs à l'entrée et à la sortie du segment de ligne ;  $L_{\Delta z}$  correspond, quant à lui, à l'inductance du segment.

En divisant les deux termes de l'égalité par  $\Delta z$  et en faisant tendre la longueur du segment vers quelque chose d'infinitésimal, on en arrive à :

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -\mathcal{L} \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \quad (7.6)$$

où  $\mathcal{L}$  représente l'inductance par unité de longueur de la ligne ou inductance distribuée. Pour obtenir l'inductance  $L$  d'un bout de ligne de longueur  $\Delta z$ , on fait :

$$L = \mathcal{L} \Delta z . \quad (7.7)$$

Si la conductivité des conducteurs est finie, on doit tenir compte de la chute de potentiel sur  $\ell_2$  et  $\ell_4$  qu'on modélise par une résistance distribuée  $\mathcal{R}$  de sorte que :

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -\mathcal{R} I(z, t) - \mathcal{L} \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} . \quad (7.8)$$

- On prend ensuite une surface fermée qui englobe le conducteur interne sur toute sa longueur  $\Delta z$  dans le diélectrique ( $S_1$ ) que l'on ferme aux deux extrémités par des surfaces planes ( $S_2, S_3$ ) comme sur la figure 7.3 (b). La surface fermée  $S$  délimite un volume  $V$  dans lequel se trouvent certaines charges  $Q(z, t)$  sur la surface du conducteur interne.

Un diélectrique idéal fait en sorte qu'aucun courant de conduction ne passe d'un conducteur à l'autre par  $S_1$ . Ainsi, et avec l'aide de (4.30) :

$$\oint_S \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_V \rho dv}_{Q(z, t)} \quad (7.9)$$

$$\underbrace{\int_{S_1}}_0 + \underbrace{\int_{S_2}}_{-I(z, t)} + \underbrace{\int_{S_3}}_{I(z+\Delta z, t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{Q(z, t)}_{C_{\Delta z} V(z, t)} \quad (7.10)$$

$$\Delta I(z, t) = -C_{\Delta z} \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} . \quad (7.11)$$

Répétant les mêmes étapes finales que précédemment, on débouche sur :

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -\mathcal{C} \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (7.12)$$

où  $\mathcal{C}$  représente la capacitance par unité de longueur de la ligne ou capacitance distribuée. Puisque les capacités sont toutes en parallèles le long de la ligne, la capacité  $C$  d'un bout de ligne de longueur  $\Delta z$  vaut :

$$C = \mathcal{C} \Delta z . \quad (7.13)$$

Avec diélectrique à pertes, un courant de conduction traverse la surface  $S_1$ . Le courant à  $z+\Delta z$  devient plus faible que prévu initialement. On rajoute une conductance distribuée  $\mathcal{G}$  en parallèle qui dérive le courant pour en tenir compte :

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -\mathcal{G} V(z, t) - \mathcal{C} \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} . \quad (7.14)$$

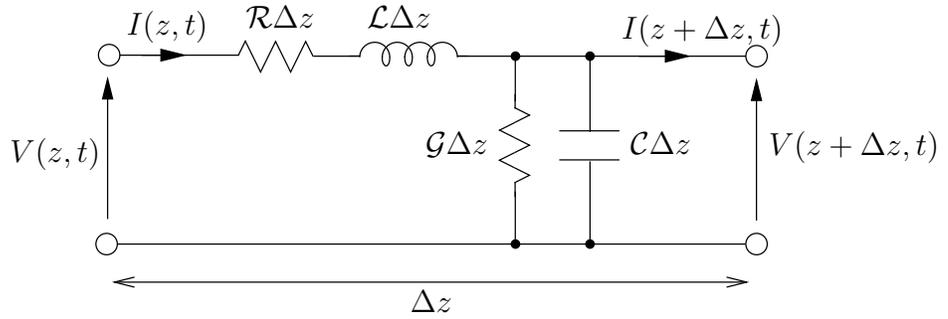


FIGURE 7.4 – Modèle équivalent d'un bout de ligne de transmission.

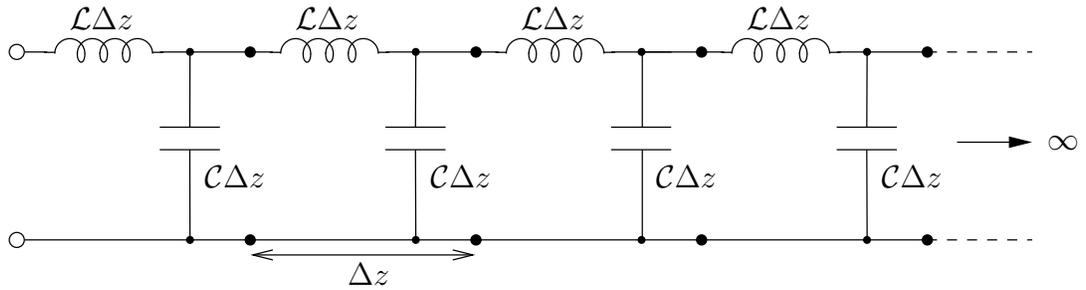


FIGURE 7.5 – Représentation distribuée d'une ligne de transmission sans perte.

Les deux équations (7.8) et (7.14) s'appellent les équations du télégraphiste ou encore les équations des lignes de transmission, car ils expliquent la manière dont les signaux électriques se transmettent sur une ligne en référence avec des quantités de circuits.

Le modèle équivalent d'une ligne de transmission est dessiné sur la figure 7.4. On vérifie que les équations de *Kirchoff* sur la boucle et sur le noeud satisfont les équations du télégraphiste pour un segment infinitésimal de ligne. La représentation distribuée d'une ligne de transmission, en opposition avec le modèle à paramètres localisés familier en circuit, apparaît à la figure 7.5 lorsqu'on néglige les pertes. On n'y voit que des éléments réactifs lesquels ne consomment aucune puissance active – d'où l'absence de pertes. Le rôle des éléments réactifs consiste uniquement à reproduire le délai de propagation des signaux sur la ligne (voir l'équation (7.33)).

## 7.4 Correspondances électromagnétisme-circuit

Les deux équations du télégraphiste (7.8) et (7.14) sans perte – dans ces conditions  $\mathcal{G} = \mathcal{R} = 0$  – représentent la solution générale de la propagation d'un signal dans une ligne de transmission. Or, on connaît aussi la solution générale de la propagation d'une onde plane électromagnétique dans un matériau sans perte, donnée en (5.7) et (5.8). Elles sont retranscrites ci-dessous pour bien faire ressortir les analogies entre elles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &\iff \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -\mathcal{L} \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} &\iff \frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -\mathcal{C} \frac{\partial V(z,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

d'où on établit les correspondances suivantes (les unités des quantités en question aident) :

$$\begin{aligned} E &\leftrightarrow V \\ H &\leftrightarrow I \\ \mu &\leftrightarrow \mathcal{L} \\ \epsilon &\leftrightarrow \mathcal{C} . \end{aligned} \tag{7.15}$$

La correspondance des éléments distribués responsables des pertes dans une ligne de transmission avec les pertes de l'onde plane se réalise partiellement. Il faut rappeler que les pertes sont attribuées à deux facteurs dans une ligne de transmission :

- Les pertes parallèles, symbolisées par la conductance  $\mathcal{G}$ , proviennent d'un diélectrique à pertes dans lequel se propage les champs. Ainsi :

$$\sigma_d \leftrightarrow \mathcal{G} . \tag{7.16}$$

- Les pertes séries  $\mathcal{R}$ , sont causées par la chute de potentiel dans les conducteurs non-idéaux. Elles n'ont pas d'équivalents car l'onde plane se propage sans être guidée par une structure, laquelle apparaît ici avec les lignes de transmission. Bien sûr, les pertes séries sont reliées d'une certaine manière à la conductivité finie du conducteur  $\sigma_c$ .

Les paramètres distribués permettent de travailler sur une modélisation des lignes de transmission sous forme d'un circuit électrique. On peut dès lors se servir des quantités de circuit. Il est toutefois impératif de se rappeler en tout temps, les notions de champs qui sont sous-entendues.

Pour une raison ou pour une autre, on trouve avantageux de travailler avec les tensions et les courants. Certains diront que ces quantités sont plus faciles à visualiser (pourtant personne n'a vu un courant ou une tension si ce n'est à travers un ampèremètre, un voltmètre ou un oscilloscope); d'autres diront qu'elles ont plus de sens physique (alors que les champs sont à la base de leur existence et que l'existence des champs est connue depuis plus longtemps). La réalité se situe plutôt dans le fait que tension et courant sont des quantités scalaires tout simplement. Dorénavant, les lignes de transmission seront traitées comme des circuits.

### 7.4.1 Équivalences rapides C-G-L

Dans les dernières sections sur le comportement statique et quasi-statique, les notions de capacitance, de conductance et d'inductance ont été introduites pour un système à trois dimensions. Une ligne de transmission est un arrangement tel qu'une des dimensions – ici en  $z$  – est assumée infinie; donc l'étude dans la section transversale de l'arrangement – soit dans le plan  $xy$  – suffit. Les champs statiques deviennent complètement indépendants de la coordonnée  $z$  par symétrie; il en est de même de la distribution du potentiel statique (voir figure 7.2).

En présentant les éléments capacitance, conductance et inductance, on a pu remarquer une grande similitude des définitions générales via leurs équations. Cela est particulièrement évident entre la capacitance et la conductance d'après les équations (4.31) et (4.34). En réalité, les intégrales des deux équations sont identiques, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de refaire les calculs. La connaissance des paramètres électriques du matériau entre les deux électrodes et la connaissance de la capacitance suffisent pour déterminer immédiatement la conductance ou vice-versa. Aucun calcul requis : on remplace uniquement  $\epsilon$  par  $\sigma_d$  ou vice-versa. Mathématiquement, on écrit :

$$\frac{G}{C} = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{C}} = \frac{\sigma_d}{\epsilon} \tag{7.17}$$

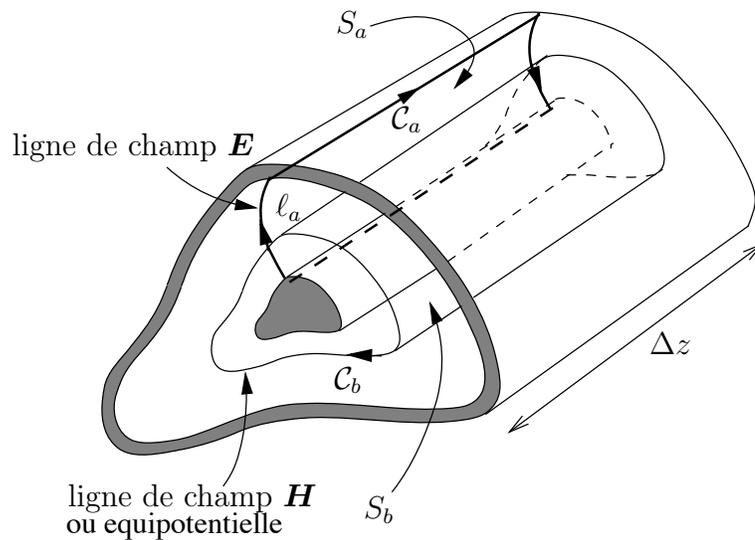


FIGURE 7.6 – Contours et surface d'intégration pour déterminer l'inductance et la capacitance d'un segment de ligne.

Un même rapprochement peut être établi entre l'inductance et la capacitance dans le cas d'une structure infinie à section constante, quoique que cela ne semble pas aussi évident. Voici une démonstration rapide. On choisit les paramètres d'intégration qui sont montrés sur la figure 7.6, soit :

- comme surface  $S_a$  pour obtenir le flux magnétique, une surface dont une arête suit une ligne de champ électrique  $\ell_{a1} = \ell_a$  et l'autre suit l'axe  $z$  soit  $\ell_{a2} = \Delta z$  ;
- comme parcours fermé pour déduire le courant, une ligne de champ magnétique ou une équipotentielle  $C_b$  ;
- comme surface fermée pour obtenir la charge, une surface constituée d'un segment de longueur  $\Delta z$  de la surface cylindrique générée par  $C_b$ ,  $S_b$ , fermé aux extrémités par deux surfaces planes au travers lesquelles ne passe aucun flux électrique – l'intégration du champ électrique est nulle sur ces surfaces ;
- et finalement, comme parcours d'intégration pour trouver la différence de potentiel, l'arête  $\ell_a$ .

Il faut voir les avantages des choix effectués ci-dessus :

- d'une part, les champs sont constants selon l'axe  $z$  facilitant une partie du calcul sur les surfaces  $S_a$  et  $S_b$  ;
- d'autre part, les produits  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}_a$  et  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_b$  sont maximisés<sup>4</sup> parce que les champs sont perpendiculaires l'un à l'autre sans composantes en  $z$ .
- pour terminer, on se rappelle qu'en tout point le rapport  $E/H$  équivaut à l'impédance intrinsèque du diélectrique  $\eta$  dans lequel sont confinés les champs.

Ainsi, on déduit que, de (4.36) et (4.30) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\Delta z} \frac{\mu \int_{S_a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}_a}{\oint_{C_b} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_b} = \frac{1}{\Delta z} \frac{\mu \Delta z \int_{\ell_a} H dl_a}{\oint_{C_b} H dl_b} = \frac{\frac{\mu}{\eta} \int_{\ell_a} E dl_a}{\oint_{C_b} H dl_b} \quad (7.18)$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\Delta z} \frac{\epsilon \int_{S_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_b}{\int_{\ell_a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_a} = \frac{1}{\Delta z} \frac{\epsilon \Delta z \oint_{C_b} E dl_b}{\int_{\ell_a} E dl_a} = \frac{\epsilon \eta \oint_{C_b} H dl_b}{\int_{\ell_a} E dl_a}. \quad (7.19)$$

On se rend bien compte que, sans faire aucune supposition autre qu'un mode TEM, le produit  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{C} &= \left( \frac{\frac{\mu}{\eta} \int_{\ell_a} E dl_a}{\oint_{C_b} H dl_b} \right) \left( \frac{\epsilon \eta \oint_{C_b} H dl_b}{\int_{\ell_a} E dl_a} \right) \\ &= \mu\epsilon. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Quoique la relation (7.17) demeure toujours vraie pour des structures diverses, celle (7.20) s'applique uniquement dans le cas de ligne de transmission en mode TEM.

## 7.4.2 Puissance transportée

La puissance d'un signal en circuit, qu'elle soit instantanée ou moyenne, dépend directement de la tension et du courant sur les conducteurs.

D'autre part, on a appris via (5.49) ou (5.52) que le vecteur de *Poynting* – instantané ou moyen – intégré sur une surface indique la puissance passant au travers la surface. Pour connaître la puissance totale de l'onde TEM, il suffit d'intégrer sur la section d'analyse  $S_{\perp}$  qui contient le diélectrique et où se trouvent les champs. Le figure 7.7 illustre bien les limites de la section d'analyse d'une ligne quelconque.

Pour montrer le lien entre la puissance transportée par l'onde et la puissance d'un signal en circuit pour toutes lignes de transmission, on utilise un système de coordonnées curvilignes formées par les lignes de champ électromagnétique. Dans un mode TEM, ces lignes forment bien un système de coordonnées valide car les lignes se croisent toujours à angle droit. On peut dire que chaque surface infinitésimale correspond au produit vectoriel  $d\mathbf{l}_a \times d\mathbf{l}_b$  tel que :

<sup>4</sup>Par exemple,  $d\mathbf{S}_a = dz \mathbf{a}_z \times d\mathbf{l}_a$  pointe dans une direction perpendiculaire à  $\mathbf{a}_z$  et  $d\mathbf{l}_a$  à la fois. Puisque  $\ell_a$  suit une ligne de champ électrique, il s'ensuit que tous les segments  $d\mathbf{l}_a$  sont orientés dans la direction du champ électrique ; donc toutes surfaces différentielles  $d\mathbf{S}_a$  pointent dans la direction de  $\mathbf{H}$ . Un même raisonnement peut être appliqué pour la surface  $S_b$ .

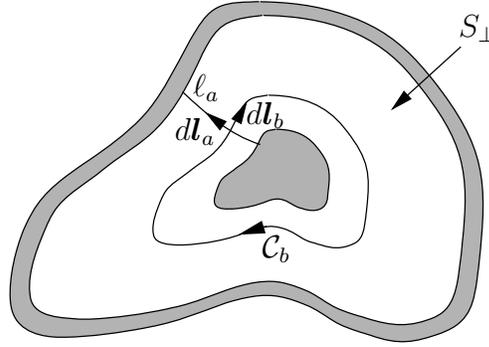


FIGURE 7.7 – Définition de la section d’analyse contenant les champs électromagnétiques.

- $dl_a$  est un segment infinitésimal du parcours  $l_a$  qui suit une ligne du champ électrique ;
- $dl_b$  est un segment infinitésimal du parcours fermé  $C_b$  qui suit une ligne du champ magnétique.

Le produit vectoriel des deux segments pointe dans la même direction que la normale à la surface d’analyse :

$$d\mathbf{S} = dl_a \times dl_b = dl_a dl_b \mathbf{a}_z .$$

Le lien entre les deux notions de puissance (celle de circuit et celle transportée par l’onde) peut maintenant être fait. On doit d’abord reconnaître l’indépendance du choix des parcours le long d’une ligne de champ :

- quelle que soit la position sur  $C_b$ , on a toujours :  $\int_{l_a} \mathbf{E}(z, t) \cdot d\mathbf{l}_a = V(z, t)$  ,
- quelle que soit la position sur  $l_a$ , on a toujours :  $\oint_{C_b} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_b = I(z, t)$  .

Ainsi, avec l’aide de (4.7) et (4.2) :

$$\mathcal{P}(z, t) = \int_{S_{\perp}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \tag{7.21}$$

$$= \int_{l_a} \oint_{C_b} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot (d\mathbf{l}_a \times d\mathbf{l}_b) \tag{7.22}$$

qui, selon une identité vectorielle, équivaut à :

$$\mathcal{P}(z, t) = \int_{l_a} \oint_{C_b} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_a)(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_b) - \underbrace{(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_b)}_0 \underbrace{(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_a)}_0 \tag{7.23}$$

$$= \int_{l_a} \oint_{C_b} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_a)(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_b) \tag{7.24}$$

$$= \underbrace{\int_{l_a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_a}_{V(z, t)} \underbrace{\oint_{C_b} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_b}_{I(z, t)} \tag{7.25}$$

$$= V(z, t) I(z, t) . \tag{7.26}$$

C'est l'équation connue et utilisée en circuit pour évaluer la puissance active ! En clair, la puissance des signaux est contenue dans les champs électrique et magnétique. La preuve : il est possible d'extraire de la puissance à Hydro-Québec sans jamais toucher leurs fils en plaçant une boucle constituée de plusieurs tours de fil sous les lignes de transmission, transverse à la direction des lignes pour maximiser l'effet. Il y aura une *fem* induite entre les deux extrémités du fil de la boucle. Ce procédé, extrêmement dangereux<sup>5</sup> et non recommandable, est bien connu des bidonvilles dans les pays sous-développés.

**Exemple 7.1**

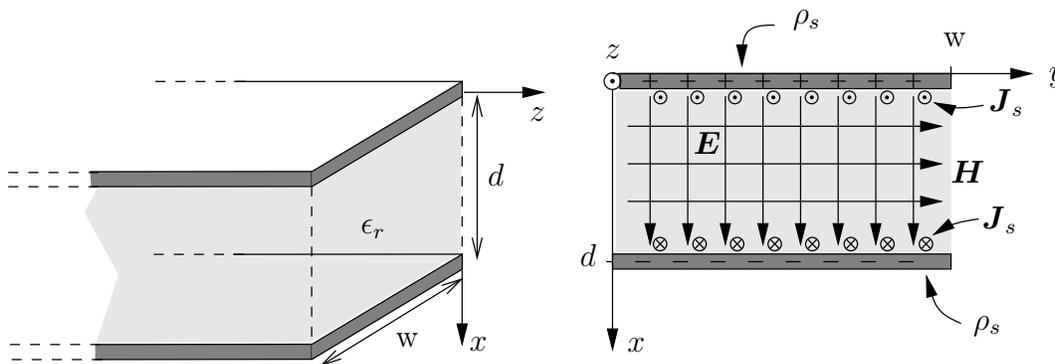


FIGURE 7.8 – Géométrie d'une ligne à plaques parallèles pour le calcul de la puissance transportée.

La ligne la plus simple à analyser est faite de deux plaques conductrices parallèles de largeur  $w$ , espacées par un diélectrique sans pertes ( $\sigma_d = 0$ ) de constante  $\epsilon_r$  ayant une épaisseur  $d$ . Le tout tel que représenté sur la figure 7.8. Cette configuration s'appelle une ligne de transmission à plaques parallèles.

Avec une onde TEM uniforme qui se propage suivant l'axe  $z+$  dans le diélectrique seulement (on néglige les effets de bouts i.e. la partie des champs susceptibles d'être à l'extérieur du diélectrique), les champs s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_x(z, t)\mathbf{a}_x \\ \mathbf{H} &= H_y(z, t)\mathbf{a}_y.\end{aligned}$$

On voit bien l'orthogonalité des champs entre eux et avec la direction de propagation ; on remarque aussi que  $\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_P$ .

- Partant de l'expression des champs et de la géométrie, vérifiez que la puissance contenue dans les champs est bien égale au produit  $VI$ .

Tout est en place pour exprimer le voltage entre les deux conducteurs ainsi que le courant sur chacun d'eux en terme des champs :

$$V(z, t) = \int_0^d E_x(z, t) dx = d E_x(z, t) \quad (7.27)$$

$$I(z, t) = \int_0^w H_y(z, t) dy = w H_y(z, t). \quad (7.28)$$

<sup>5</sup>La boucle maintient la *fem* constante quelle que soit la charge et force le courant à circuler.

La simplicité de ces relations découlent de l'uniformité des champs électrique et magnétique entre les deux plaques.

On a appris que le vecteur de *Poynting* intégré sur une surface indique la puissance passant au travers la surface. Pour connaître la puissance instantanée totale de l'onde TEM, il suffit d'intégrer sur la section d'analyse  $S_{trans}$  se trouvant directement entre les deux plaques, les champs étant nuls à l'extérieur. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(z, t) &= \int_{S_{\perp}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \int_{x=0}^d \int_{y=0}^w E_x(z, t) H_y(z, t) \mathbf{a}_z \cdot dx dy \mathbf{a}_z \\
 &= \int_{x=0}^d \int_{y=0}^w \frac{V(z, t)}{d} \frac{I(z, t)}{w} dx dy \\
 &= V(z, t) I(z, t) .
 \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

---

## 7.5 Effet d'une ligne sans perte

Avec l'aide de toutes les correspondances, on peut déduire rapidement la solution générale aux deux équations du télégraphiste sans perte (où  $\mathcal{R} = \mathcal{G} = 0$ ) à partir des solutions pour onde plane (5.21) et (5.23) :

$$V(z, t) = V^+ f(t \overset{\downarrow}{-} z\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}) + V^- g(t \overset{\downarrow}{+} z\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}) \tag{7.29}$$

$$I(z, t) = I^+ f(t - z\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}) + I^- g(t + z\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}) \tag{7.30}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}/\mathcal{C}}} \left( V^+ f(t - z\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}) \underset{\uparrow}{-} V^- g(t + z\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}) \right) . \tag{7.31}$$

On tire les deux paramètres de propagation d'une ligne de transmission, par analogie avec ceux d'une onde plane dans un matériau, à partir d'observations sur les expressions ci-dessus.

- La tension et le courant se déplacent dans les directions  $z+$  et  $z-$  avec des fonctions spatio-temporelles différentes  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  respectivement. Comme les champs sont porteurs de la puissance, la vitesse des signaux  $V$  et  $I$  doit être strictement identique à la vitesse de propagation  $v_p$  des champs dans le diélectrique.
- L'expression du courant ressemble à celle de la tension un peu comme celle du champ  $H$  avec  $E$ . Les différences se situent aux niveaux du rapport des amplitudes  $V^+/I^+$  et  $V^-/I^-$  dans chacune des directions et de l'inversion de  $180^\circ$  du signal  $I^-$  par rapport à  $V^-$ . Cette inversion indique encore ici dans quelle direction va la

puissance de l'onde tout en respectant les conventions des axes. Quant aux rapports constants des amplitudes, on procède comme pour l'onde plane avec l'impédance intrinsèque  $\eta$  du matériau et on définit l'impédance caractéristique  $Z_o$  de la ligne de transmission :

$$Z_o = \frac{V^+}{I^+} = \frac{V^-}{\uparrow I^-} . \quad (7.32)$$

Pour une ligne sans perte<sup>6</sup> on obtient :

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (7.33)$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} = \eta F_f \quad (7.34)$$

$$\neq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} . \quad (7.35)$$

La dernière inégalité est cruciale : elle montre que le rapport des signaux  $V$  et  $I$  diffère du rapport des champs  $E$  et  $H$ . Il est montré un peu plus loin qu'on peut toujours exprimer l'impédance caractéristique  $Z_o$  comme un produit entre un facteur forme  $F_f$  qui dépend de la géométrie de la structure guidante et de l'impédance  $\eta$ , comme l'indique l'équation 7.34. Le rapport des champs dans le diélectrique ne dépendra pas de la géométrie alors que le rapport entre  $V$  et  $I$  va changer avec la géométrie. Les deux concepts nommés impédance ne sont pas totalement interchangeables.

### Exemple 7.2

Soit une ligne de transmission sans perte dont la section présente un conducteur interne carré et un externe aussi carré creux avec des côtés deux fois plus grands. Les deux conducteurs sont centrés l'un sur l'autre. Lorsque le diélectrique est le vide, l'impédance caractéristique<sup>7</sup>  $Z_{o_0} = 38\Omega$ . En plaçant un isolant sans perte non-magnétique de constante diélectrique inconnue, la vitesse diminue d'un facteur 1.5 .

- Déterminez la vitesse de propagation de l'onde dans la ligne avec l'isolant inconnu.

---

La vitesse de propagation ne dépend que de la constante diélectrique. Ainsi :

$$\begin{aligned} v_{p_{iso}} &= \frac{v_{p_0}}{1.5} = 0.67 c \\ &= 2 \times 10^8 \text{ m/s} . \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Dans la pratique, les diélectriques des lignes de transmission se comportent dans la bande des fréquences d'opération, comme des diélectriques à très faibles pertes. Les lignes sans perte restent plus simples à analyser et fournissent tout de même d'excellentes approximations (voir sous-section 5.7.2).

<sup>7</sup>Le calcul de l'impédance caractéristique a été fait numériquement sous matlab selon la méthode des différences finies par la solution matricielle avec un maillage comptant 40 000 mailles !

- Déduisez la capacitance par unité de longueur toujours avec l'isolant inconnu.

Selon (7.33) et (7.34), on voit là deux équations et deux inconnues  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{C}$ , desquelles on désire isoler l'une des inconnues, ici  $\mathcal{C}$ . Le produit  $v_p$  par  $Z_o$  répond à nos attentes puisque :

$$v_p Z_o = \frac{1}{\mathcal{C}} .$$

On connaît les valeurs de ces paramètres de propagation pour le vide, ce qui permet d'obtenir  $\mathcal{C}_o$  immédiatement. La question cependant demande  $\mathcal{C}_{iso}$ . On remarque que pour une ligne sans perte non-magnétique :

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \\ Z_o &= \frac{Z_{o0}}{\sqrt{\epsilon_r}} \end{aligned}$$

donc, pour le cas de l'exemple :

$$\mathcal{C}_{iso} = \frac{\epsilon_{r_{iso}}}{c Z_{o0}} .$$

La seule inconnue manquante est la valeur de la constante diélectrique de l'isolant inconnu. Sachant que :

$$v_{p_{iso}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r_{iso}}}}$$

on conclue que  $\epsilon_{r_{iso}} = (1.5)^2 = 2.25$ . Finalement, on détermine :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{iso} &= \frac{2.25}{(3 \times 10^8)(38)} \\ &= 197.4 \times 10^{-12} \text{ F/m} . \end{aligned}$$

## 7.6 Effet d'une ligne quelconque à pertes

Si on doit considérer les pertes sur la ligne de transmission, on préfère travailler avec les phaseurs dans le régime sinusoïdal permanent, comme cela a été fait pour l'onde plane. Les nouvelles équations du télégraphiste s'expriment ainsi :

$$\frac{d\bar{V}(z)}{dz} = -\mathcal{R}\bar{I}(z) - j\omega\mathcal{L}\bar{I}(z) \tag{7.36}$$

$$= -\bar{Z}_s\bar{I}(z) \tag{7.37}$$

$$\frac{d\bar{I}(z)}{dz} = -\mathcal{G}\bar{V}(z) - j\omega\mathcal{C}\bar{V}(z) \tag{7.38}$$

$$= -\bar{Y}_p\bar{V}(z) . \tag{7.39}$$

On a défini pour plus de simplicité, l'impédance série  $Z_s$  et l'admittance parallèle  $Y_p$  d'une ligne de transmission. On solutionne pour  $\bar{V}$  en dérivant la première par rapport à  $z$ , ce qui fait apparaître des termes  $d\bar{I}(z)/dz$  que l'on remplace par la seconde équation. Cela conduit vers l'équation de propagation équivalente à l'équation d'onde (5.28) :

$$\frac{d^2\bar{V}}{dz^2} = \bar{\gamma}^2 \bar{V} \quad (7.40)$$

où  $\bar{\gamma}$ , la constante de propagation dans la ligne de transmission s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \sqrt{(\mathcal{R} + j\omega\mathcal{L})(\mathcal{G} + j\omega\mathcal{C})} \\ &= \sqrt{\bar{Z}_s \bar{Y}_p}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Le même parallèle s'établit avec la constante de propagation de l'onde plane dans un matériau à pertes :

$$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta \quad (7.42)$$

$$0 < \arg\{\bar{\gamma}\} \leq 90^\circ. \quad (7.43)$$

- La partie réelle  $\alpha = \text{Re}\{\bar{\gamma}\}$  est responsable de l'atténuation des signaux le long de la ligne selon  $e^{-\alpha z}$  pour l'onde positive ou  $e^{+\alpha z}$  pour l'onde négative. Elle porte encore le nom de constante d'atténuation.
- La partie imaginaire  $\beta = \text{Im}\{\bar{\gamma}\}$  affecte la phase des signaux sur la ligne ; elle est en relation avec la longueur d'onde  $\lambda$  ou encore avec la fréquence et la vitesse de propagation  $v_p$  de la même manière que la constante de phase de l'onde plane.

La solution de  $\bar{V}$ , puis celle de  $\bar{I}$  qui en découle, ressemblent à celles des champs de l'onde plane sinusoïdale nonobstant la définition de la constante de propagation et de l'impédance caractéristique (plutôt que l'impédance intrinsèque). On obtient :

$$\bar{V}(z) = \bar{V}^+ e^{\downarrow\bar{\gamma}z} + \bar{V}^- e^{\uparrow\bar{\gamma}z} \quad (7.44)$$

$$\bar{I}(z) = \bar{I}^+ e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{I}^- e^{+\bar{\gamma}z} \quad (7.45)$$

$$= \frac{1}{\bar{Z}_o} \left( \bar{V}^+ e^{-\bar{\gamma}z} \underset{\uparrow}{-} \bar{V}^- e^{+\bar{\gamma}z} \right) \quad (7.46)$$

avec :

$$\bar{Z}_o = \sqrt{\frac{\mathcal{R} + j\omega\mathcal{L}}{\mathcal{G} + j\omega\mathcal{C}}} \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\bar{Z}_s}{\bar{Y}_p}} \\ -45^\circ &< \arg\{\bar{Z}_o\} < 45^\circ. \end{aligned} \quad (7.48)$$

L'impédance caractéristique possède ici une partie imaginaire, faible généralement devant la partie réelle. Cette partie imaginaire peut être soit inductive, soit capacitive.

**Exemple 7.3**

Une ligne de transmission bifilaire est modélisée par les paramètres distribués suivants<sup>8</sup> :

- $\mathcal{R} = 1.1 \times 10^{-3} \Omega/m$
- $\mathcal{L} = 0.16 \times 10^{-6} H/m$
- $\mathcal{G} = 0.02 \times 10^{-6} S/m$
- $\mathcal{C} = 0.17 \times 10^{-9} F/m$ .

► Déterminez l'impédance caractéristique, la vitesse de propagation et l'atténuation des signaux sur 10 km en dB, aux fréquences de 300 Hz et 3 kHz en assumant que les paramètres distribués demeurent constants.

- À 300 Hz :

On calcule d'abord l'impédance série et l'admittance parallèle :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_s &= \mathcal{R} + j\omega\mathcal{L} = (1.1 + j0.3) \times 10^{-3} \Omega/m \\ &= 1.14 \times 10^{-3} \angle 15.3^\circ \\ \bar{Y}_p &= \mathcal{G} + j\omega\mathcal{C} = (0.02 + j0.32) \times 10^{-6} S/m \\ &= 0.321 \times 10^{-6} \angle 86.4^\circ . \end{aligned}$$

On tire rapidement  $\bar{Z}_o$  et  $\bar{\gamma}$  selon (7.47) et (7.41) respectivement :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_o &= \sqrt{\frac{1.14 \times 10^{-3} \angle 15.3^\circ}{0.321 \times 10^{-6} \angle 86.4^\circ}} = (59.6 \angle -35.6^\circ) \Omega \\ \bar{\gamma} &= \sqrt{(1.14 \times 10^{-3} \angle 15.3^\circ)(0.321 \times 10^{-6} \angle 86.4^\circ)} \\ &= (19.14 \times 10^{-6} \angle 50.9^\circ) m^{-1} \\ &= \underbrace{(12.1 \times 10^{-6})}_{\alpha} + j \underbrace{14.85 \times 10^{-6}}_{\beta} m^{-1} . \end{aligned}$$

Les valeurs des quantités demandées sont :

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{\beta} = 1.270 \times 10^8 \text{ m/s} \\ L_{10 \text{ km}} &= -20 \log(e^{-\alpha \times 10^4}) = 1.05 \text{ dB} . \end{aligned}$$

- À 3 kHz :

On répète les mêmes étapes pour trouver :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_s &= 3.21 \times 10^{-3} \angle 67^\circ \\ \bar{Y}_p &= 3.20 \times 10^{-6} \angle 89.64^\circ \\ \bar{Z}_o &= (31.7 \angle -11.3^\circ) \Omega \\ \bar{\gamma} &= 101.3 \times 10^{-6} \angle 79.8^\circ m^{-1} = (17.95 \times 10^{-6} + j 99.75 \times 10^{-6}) m^{-1} \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Normalement, le paramètre  $\mathcal{R}$  est sensible à la fréquence en augmentant continuellement selon  $\sqrt{f}$ . Dans cet exemple, il correspond à celui mesuré à 300 Hz.

desquels on tire<sup>9</sup> :

$$\begin{aligned}v_p &= 1.89 \times 10^8 \text{ m/s} \\L_{10 km} &= 1.56 \text{ dB} .\end{aligned}$$

On note que la vitesse de propagation calculée sans tenir compte des pertes est indépendante de la fréquence et vaut

$$v_{p_{sp}} = \frac{1}{\sqrt{(0.16 \times 10^{-6})(0.17 \times 10^{-9})}} = 1.917 \times 10^8 \text{ m/s} .$$

Le dernier exemple illustre bien un des graves problèmes d'une ligne à pertes outre l'atténuation – laquelle peut être mineure : la vitesse de propagation varie selon la fréquence. Cette variation entraîne la dispersion des composantes spectrales du signal, ce qui signifie que le signal devient de plus en plus distordu en s'éloignant de la source car les relations de phase entre les composantes spectrales rapprochées se modifient de plus en plus. Les pertes séries sont susceptibles, elles aussi, d'apporter la dispersion<sup>10</sup>.

Pour éviter la dispersion, on doit modifier les valeurs des paramètres distribués de manière à rendre la constante de phase  $\beta$  directement proportionnelle à la fréquence soit :

$$\beta = \frac{2\pi f}{v_p} = k f$$

où  $k$  est une constante.

Une ligne sans perte répond toujours à ce critère mais pas forcément une ligne à pertes. Si c'est le cas, la ligne est dite sans distorsion. Un examen attentif de l'expression de la constante de propagation (7.41) indique que pour parvenir à une ligne sans distorsion, il suffit d'avoir  $\bar{Z}_s$  et  $\bar{Y}_p$  proportionnels l'un à l'autre i.e. le rapport des parties réelles de  $\bar{Y}_p$  et  $\bar{Z}_s$  équivaut à celui de leurs parties imaginaires :

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{R}} = \tilde{k}^2 . \quad (7.49)$$

En effet, avec cette règle (7.49) dite de *Heaviside*<sup>11</sup>, on a :

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{Z}_s \tilde{k}^2 \bar{Z}_s} = \tilde{k}(\mathcal{R} + j\omega\mathcal{L}) .$$

Il en résulte  $\beta = \omega\tilde{k}\mathcal{L}$  donc la constante de phase dépend bien linéairement de la fréquence.

<sup>9</sup>Si on prenait  $\mathcal{R} = \sqrt{10}(1.1 \times 10^{-3})$ , les résultats auraient été fort différents :  $v_p = 1.71 \times 10^8 \text{ m/s}$  et  $L_{10 km} = 4.43 \text{ dB}$ !

<sup>10</sup>Voici l'explication sur l'importance d'employer des fils de gros calibres afin de diminuer  $R$  pour des lignes de transmission pour la connexion entre un ampli Hi-Fi et les enceintes acoustiques.

<sup>11</sup>*Heaviside* est un brillant ingénieur autodidacte anglais qui a reformulé les équations de *Maxwell* sous la forme connue aujourd'hui, qui a trouvé les équations du télégraphiste en 1874 et qui a développé une manière de solutionner les équations différentielles avec l'opérateur  $D$  (qui ne fut pas apprécié des mathématiciens). On lui doit aussi la fameuse fonction échelon  $u(t)$  qui est parfois appelée par son nom.

Le problème de distorsion a été une source de problèmes pour les compagnies téléphoniques : le rapport  $\mathcal{R}/\mathcal{L}$  était de plusieurs ordres supérieur à celui  $\mathcal{G}/\mathcal{C}$  et le message vocal devenait incompréhensible après quelques kilomètres. Pour y remédier les choix consistaient à augmenter  $\mathcal{G}$  entraînant une atténuation supplémentaire des signaux ; ou à réduire  $\mathcal{R}$  par des conducteurs plus gros ; ou à réduire  $\mathcal{C}$  par un espacement plus grand entre les conducteurs. Les deux dernières solutions s'avéraient trop coûteuses. Restait l'augmentation de  $\mathcal{L}$  réalisée localement par l'ajout de bobines dites de pupinisation car le principe a été breveté en 1894 par un dénommé *Mihajlo I. Pupin* –immigrant serbe aux États-Unis – sept ans après les travaux de *Heaviside* qui en avait proposé mathématiquement leur usage pour les câbles télégraphiques transatlantiques.

Ces bobines ont été insérées à des intervalles réguliers correspondant à 3000 pieds (type B), 4500 pieds (type D) ou 6000 pieds (type H) de sorte qu'il deviennent des éléments localisés et non-distribués. Leurs valeurs typiques sont de 135, 88, 44 ou 22 *mH*. Par exemple, pour une ligne torsadée couramment rencontrée avec des fils de calibre 26, la bobine de pupinisation utilisée est celle de 88 *mH* à tous les 6000 pieds (26H88). On tente aujourd'hui d'éliminer ces bobines afin de rendre les lignes capables de transmettre à haut débit (service ADSL "*Asymmetric Digital Subscriber Line*") : les bobines agissent comme des filtres passe-bas avec la charge du téléphone. Pour ne pas avoir les effets de distorsion, on amène la fibre optique dans des sous-centrales téléphoniques situées à une distance en deça de l'emplacement de la première bobine.

## 7.7 Paramètres distribués vs facteur de forme

Les paramètres distribués  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{L}$  s'obtiennent facilement les uns des autres par les équivalences C-G-L vues précédemment. Ils dépendent tous des paramètres électriques du diélectrique uniquement et de la géométrie de la section de la ligne par l'entremise du facteur de forme  $F_f$ .

Soit le cas d'une ligne sans perte ou, du moins, à très faibles pertes. Dans ces conditions, on peut utiliser (7.33) et (7.34) comme pour l'onde plane tel que discuté dans la sous-section 5.7.2. On démontre alors facilement qu'avec les équivalences (7.17) et (7.20) :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{v_p Z_o} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{1} \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon} F_f} = \frac{\epsilon}{F_f} \tag{7.50}$$

$$\mathcal{G} = \frac{\sigma_d}{F_f} \tag{7.51}$$

$$\mathcal{L} = \mu F_f . \tag{7.52}$$

Le quatrième, la résistance distribuée  $\mathcal{R}$ , demande une étude spéciale du courant sur la "peau" d'un conducteur (voir l'effet de peau à la sous-section 5.7.3.1). Il est le seul paramètre distribué complètement indépendant du facteur de forme et du diélectrique. Pour la calculer analytiquement, il faudrait considérer l'atténuation des champs dans le conducteur, ce qui implique que la densité de courant volumique varie selon la profondeur dans le conducteur. Sans trop entrer dans les détails, l'épaisseur de peau  $\delta_p$  de (5.89) détermine, en première approximation, la largeur de la zone où se concentre le courant

dans un conducteur. La section dans laquelle passe le courant vaut donc  $A_c \approx \delta_p \ell_c$  où  $\ell_c$  correspond à la longueur du périmètre de la section du conducteur. La résistance effective d'un bout d'un conducteur de longueur  $\Delta z$  se détermine alors en partant de l'expression  $R = \frac{\Delta z}{\sigma_c A_c}$  (obtenue dans l'exemple 4.10). On somme la résistance des deux conducteurs pour obtenir la résistance distribuée de la ligne. Donc :

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1,2} \frac{1}{\underbrace{\sigma_{c_i} \delta_{p_i}}_{\mathbf{r}_{s_i}}} \frac{1}{\ell_i} \quad (7.53)$$

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{\sigma_c \delta_p} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma_c}} \quad (7.54)$$

où  $\mathbf{r}_s$  est la résistivité surfacique du conducteur. Pour un feuillet conducteur, cette résistivité doit être **divisée** par sa largeur<sup>12</sup> de la surface pour fournir l'estimation de  $\mathcal{R}$ . Ainsi, cette résistance distribuée est aussi dépendante de la forme des conducteurs mais par le biais de leur surface par unité de longueur, ce qui donne les expressions retrouvées dans le tableau 7.1

## 7.8 Détermination des paramètres de ligne

Dans le cas où les pertes risquent d'être importantes et en régime sinusoïdal permanent, les paramètres de ligne  $v_p$  et  $Z_o$  se déduisent uniquement à partir des paramètres distribués  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$ . Mais dans un *diélectrique sans perte ou à faibles pertes*, certaines choses se simplifient.

- $v_p$  ne dépend alors que des paramètres  $\mu$  et  $\epsilon$  du diélectrique comme dans (7.33). Si ce dernier est non-magnétique alors  $\mu = \mu_o$  et :

$$v_p \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (7.55)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

- $Z_o$  est pratiquement réel et est affecté à la fois par l'impédance intrinsèque du diélectrique et par la géométrie comme dans (7.34). Ainsi, s'aidant de (7.50) :

$$Z_o \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} F_f = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\mathcal{C}} = \frac{1}{v_p \mathcal{C}} \quad (7.56)$$

et dans un diélectrique non-magnétique :

$$Z_o \approx \frac{\eta_o}{\sqrt{\epsilon_r}} F_f = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c \mathcal{C}} \quad (7.57)$$

<sup>12</sup>On peut voir un feuillet de largeur  $w$  comme un assemblage de plusieurs bandes étroites – soit  $N$  – de largeur  $\Delta w = w/N$  en parallèles. La résistance du tout équivaut aux  $N$  résistances identiques de chacune des bandes mises en parallèle, donc  $N$  fois moindre.

- $\alpha$  s'écrit plus simplement comme :

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{R}}{Z_o} + \mathcal{G}Z_o \right) . \tag{7.58}$$

Le calcul de  $\mathcal{C}$  est souvent choisi uniquement parce que la capacitance demeure un concept moins abstrait<sup>13</sup>.

On remarque que la détermination de  $F_f$  est simplement remplacée par celle de  $\mathcal{C}$ . En gros, on distingue trois techniques pour trouver  $\mathcal{C}$  qui sont décrites ci-après.

### 7.8.1 Technique analytique

La technique analytique est celle de type “salle de cours” qui consiste à :

- dériver l'expression exacte du champ électrique ou de la fonction de potentiel à partir de l'équation de *Laplace* en respectant les conditions aux limites dans la section 2D d'analyse ;
- réaliser les calculs symboliques nécessaires pour déduire la charge  $Q_{dz}$  sur un conducteur de longueur  $dz$  – intégrale de *Gauss* – en fonction de la différence de potentiel  $V_{ab}$  ;
- faire le rapport  $Q_{dz}/V_{ab}$  qui donne  $\mathcal{C}$ .

Description	$\mathcal{R}$	$\mathcal{C}$	$Z_o$
À plaques parallèles	$\frac{2}{w} \mathbf{r}_s$	$\epsilon \frac{w}{d}$	$\eta \frac{d}{w}$
Coaxiale	$\left( \frac{1}{2\pi a} + \frac{1}{2\pi b} \right) \mathbf{r}_s$	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$	$\eta \frac{1}{2\pi} \ln(b/a)$
Bifilaire	$\frac{2}{2\pi a} \mathbf{r}_s$	$\frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(d/a)}$	$\eta \frac{1}{\pi} \cosh^{-1}(d/a)$
Fil au dessus d'un plan de masse		$\frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(h/a)}$	$\eta \frac{1}{2\pi} \cosh^{-1}(h/a)$
Bifilaire blindée		$\frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{2d(b^2-d^2)}{a(b^2+d^2)}\right)}$	$\eta \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{2d(b^2-d^2)}{a(b^2+d^2)}\right)$
Rubanée		$\frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{3.81d}{0.8w}\right)}$	$\eta \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{3.81d}{0.8w}\right)$

TABLE 7.1 – Résistance, capacitance distribuées et impédance caractéristique de lignes de transmission usuelles.

On retrouve dans le tableau 7.1 les capacitances et les impédances caractéristiques de lignes de transmission communes dont les géométries apparaissent sur la figure 7.9.

<sup>13</sup>On se rappelle que les paramètres distribués  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{L}$  découlent facilement les uns des autres lorsqu'on connaît les paramètres électriques du diélectrique.

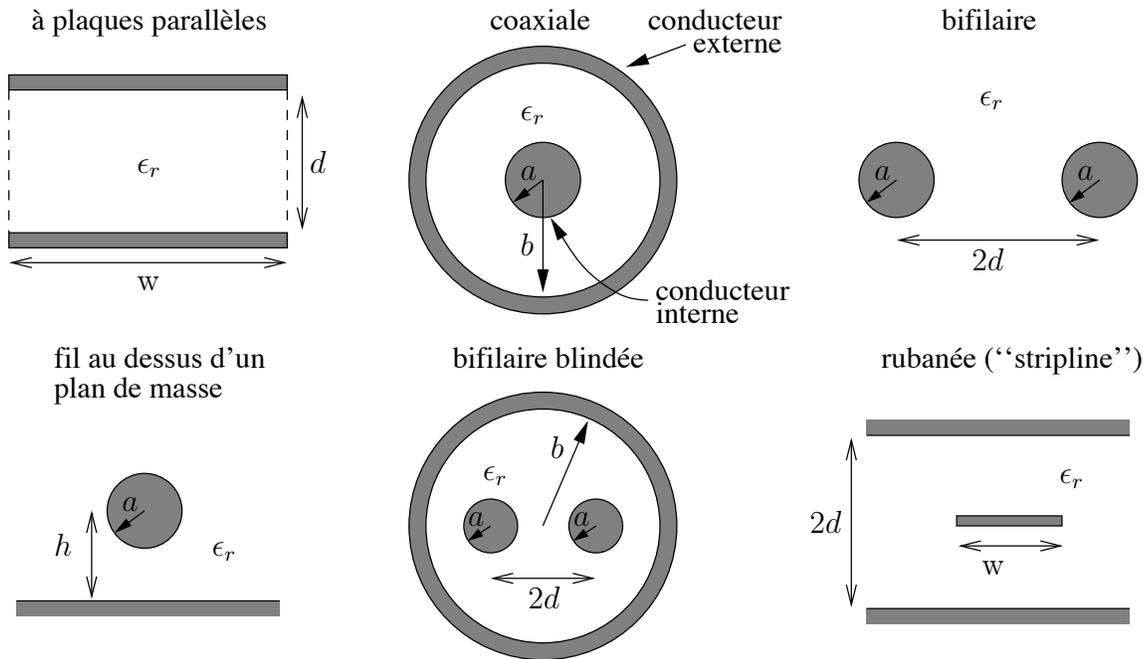


FIGURE 7.9 – Section de lignes de transmission usuelles.

**Exemple 7.4**

Soit une ligne à plaques parallèles sans perte dont la géométrie est montrée à la figure 7.8. Sans les effets de bord, les champs entre les plaques s’expriment ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x(z, t)\mathbf{a}_x \\ \mathbf{H} &= H_y(z, t)\mathbf{a}_y . \end{aligned}$$

► Donnez l’expression des paramètres distribués d’une telle ligne.

Pour trouver les deux seuls paramètres distribués non-nuls dans la ligne à plaques parallèles, on commence par isoler un segment de ligne de longueur infinitésimal  $dz$ . De là, on détermine la charge en fonction de la différence de potentiel ; le flux magnétique, en fonction du courant.

Les conditions aux limites doivent être respectées sur les plaques conductrices. Elles le sont car, à  $x = 0$  et  $x = d$ , le champ électrique est bien perpendiculaire et le champ magnétique, tangentiel. Les deux conditions aux limites applicables démontrent qu’une densité surfacique de charges et une densité de courant de surface existent à la surface des plaques :

$$\begin{aligned} [\rho_s]_{x=0} &= \mathbf{a}_x \cdot \epsilon E_x \mathbf{a}_x = \epsilon E_x \\ [\rho_s]_{x=d} &= -\mathbf{a}_x \cdot \epsilon E_x \mathbf{a}_x = -\epsilon E_x \\ [\mathbf{J}_s]_{x=0} &= \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = H_y \mathbf{a}_z \\ [\mathbf{J}_s]_{x=d} &= -\mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = -H_y \mathbf{a}_z . \end{aligned}$$

Il est clair que les densités de charges et de courant demeurent des fonctions de  $z$  et  $t$  parce qu'elles découlent de  $E_x$  et  $H_y$ . Ainsi, la propagation de l'onde est supportée par les charges et les courants sur les plaques qui se déplacent aussi selon la relation spatio-temporelle du type  $(z - t/v_p)$ .

Il devient facile de déterminer la charge de  $\rho_s$  ou le flux de  $\mathbf{J}_s$ .

- La charge contenue est déterminée à partir de (7.27) et de la densité surfacique  $\rho_s$  sur la surface du segment d'une plaque dont la dimension vaut  $w dz$  :

$$Q = \underbrace{\epsilon E_x}_{\rho_s} w dz = \frac{\epsilon w dz}{d} V$$

donc

$$C = \frac{1}{dz} \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon w}{d} .$$

- Quant au flux magnétique, on intègre  $B = \mu H$  sur une surface de dimension  $d dz$  avec une normale  $\mathbf{a}_y$  et on utilise (7.28) :

$$\Psi = \mu \underbrace{H_y}_{J_s} d dz = \frac{\mu d dz}{w} I$$

donc

$$\mathcal{L} = \frac{1}{dz} \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu d}{w} .$$

- Du même souffle, faites le développement des équations de propagation spécifiques à cette ligne (on peut alors démontrer l'exactitude des expressions des paramètres distribués obtenues auparavant).

Les deux premières équations de *Maxwell* qui doivent satisfaire les champs  $E_x$  et  $H_y$ , s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} . \end{aligned}$$

De (7.27) et (7.28), on a maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{\mu}{w} \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{1}{w} \frac{\partial I}{\partial z} &= -\frac{\epsilon}{d} \frac{\partial V}{\partial t} . \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= -\underbrace{\left(\frac{\mu d}{w}\right)}_{\mathcal{L}} \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -\underbrace{\left(\frac{\epsilon w}{d}\right)}_{\mathcal{C}} \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{LC} = \mu\epsilon .$$

C.Q.F.D.

## 7.8.2 Technique graphique

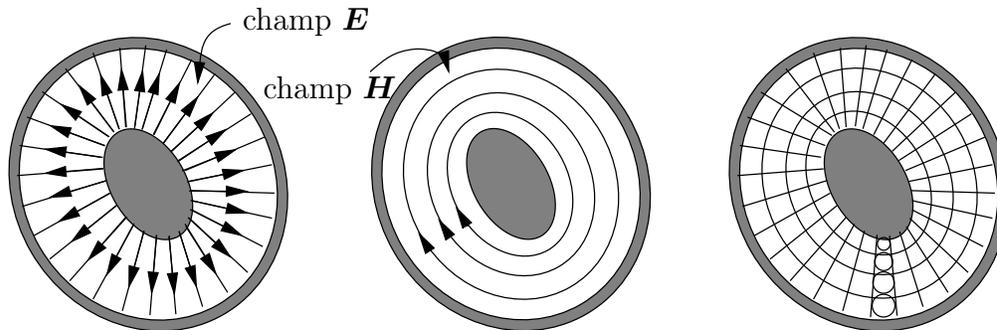


FIGURE 7.10 – Démonstration du découpage en cellules carrées de la section d’analyse d’une ligne de transmission.

De moins en moins employée, la technique graphique permet d’obtenir directement la valeur approchée de  $\mathcal{C}$  en décomposant judicieusement la section d’analyse en cellules relativement carrées. Chacune des cellules représente une capacité unitaire car la capacitance de deux plaques parallèles vaut  $\epsilon \frac{A}{d}$  où  $A$  est la surface de chaque plaque et  $d$ , la distance entre les plaques. Ayant ici  $A = w dz$  et  $w = d$  (les cellules sont carrées), il découle que  $\mathcal{C}_{cell_{ij}} = \epsilon$ . Les capacitances unitaires sont donc disposés en série et en parallèles pour couvrir la section d’analyse, de sorte que la capacitance totale par unité de longueur devient :

$$\mathcal{C} \approx \epsilon \frac{m}{n} \quad (7.59)$$

où  $m$  est le nombre de cellules sur un pourtour et  $n$ , le nombre de cellules sur un rayon. La figure 7.10 illustre un exemple dans lequel  $m = 29$  et  $n = 4$ . Les frontières des cellules mises en série suivent des lignes de champ magnétique, tandis que celles mises en parallèle suivent des lignes de champ électrique.

## 7.8.3 Techniques numériques

De loin les mieux adaptées aux problèmes complexes rencontrés dans la pratique, les techniques numériques ont été bien servies par les progrès technologiques dans le domaine de l’informatique. Elles méritent donc qu’on s’y attarde un peu plus.

Comme leur nom l’indique, le résultat final est un nombre et non une expression de sorte que l’analyse de l’effet d’un paramètre est rendue plus difficile et exige de nombreuses simulations qui peuvent être parfois très longues selon la précision désirée. La méthode des moments – d’une grande complexité –, celle aux éléments finis ou des différences

finies sont largement répandues. Avec la méthode des différences finies de la section 4.5, le domaine de définition à prendre correspond à la section d'analyse. L'idée consiste à :

- Déterminer la distribution discrète du potentiel par une méthode numérique dans la section d'analyse.

On suppose un potentiel connu sur chacun des conducteurs (habituellement une différence fixée à 1 V ou encore l'un à 1 V et l'autre à -1 V en présence de deux conducteurs et d'un blindage à la masse) d'où une différence de potentiel  $V_{ab}$ . Les points sont généralement distribués selon un maillage carré en coordonnées cartésiennes, mais rien d'obligatoire.

- Évaluer la charge  $Q$  par une intégrale de *Gauss* numérique.

Cette étape qui paraît toute simple est souvent mal comprise. Au départ, l'intégrale de *Gauss* utilise le champ de déplacement  $\mathbf{D}$  mais dans un diélectrique homogène et isotrope :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla V .$$

De par la symétrie d'une ligne infinie, la composante  $E_z$  est nulle : donc on n'a pas à s'en préoccuper. De plus, les autres composantes  $E_x$  et  $E_y$  sont indépendantes de la coordonnée  $z$ . Les mêmes constatations s'appliquent à  $\mathbf{D}$  ou à  $V$ . La surface d'intégration est celle d'un cylindre  $S_1$  de longueur  $\Delta z$  et de base quelconque, fermé aux deux extrémités par des surfaces planes par lesquelles ne traverse aucun flux électrique. Alors l'intégration de  $\epsilon \mathbf{E}(x, y)$  sur le cylindre  $S_1$  seul fournit la valeur de la charge sur une unité de longueur. Rien de bien compliqué jusque là ; mais la transposition pour des mesures discrètes de  $V(x, y)$  dans la section d'analyse en considérant un segment de ligne de longueur  $\Delta z$  semble brouiller les choses.

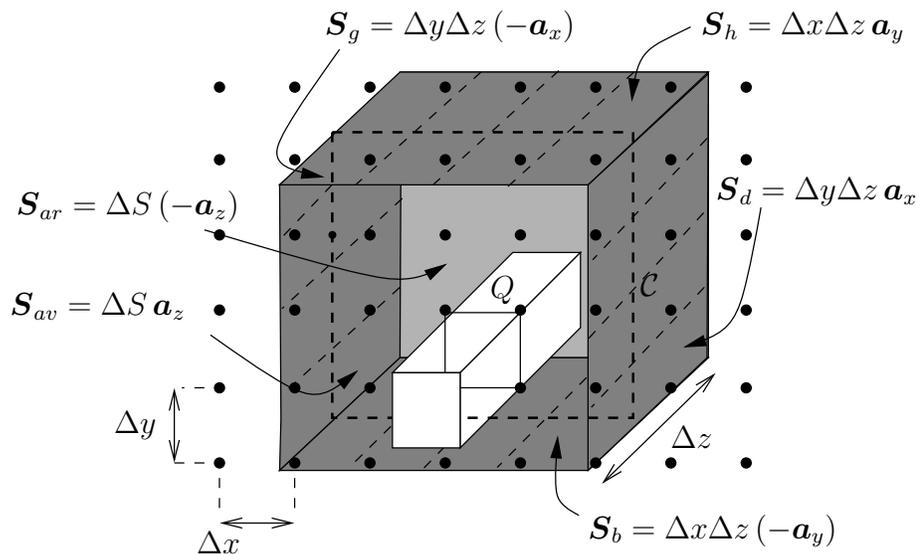


FIGURE 7.11 – Les six surfaces qui forment la surface fermée de l'intégrale de *Gauss* numérique.

Les difficultés sont de deux ordres :

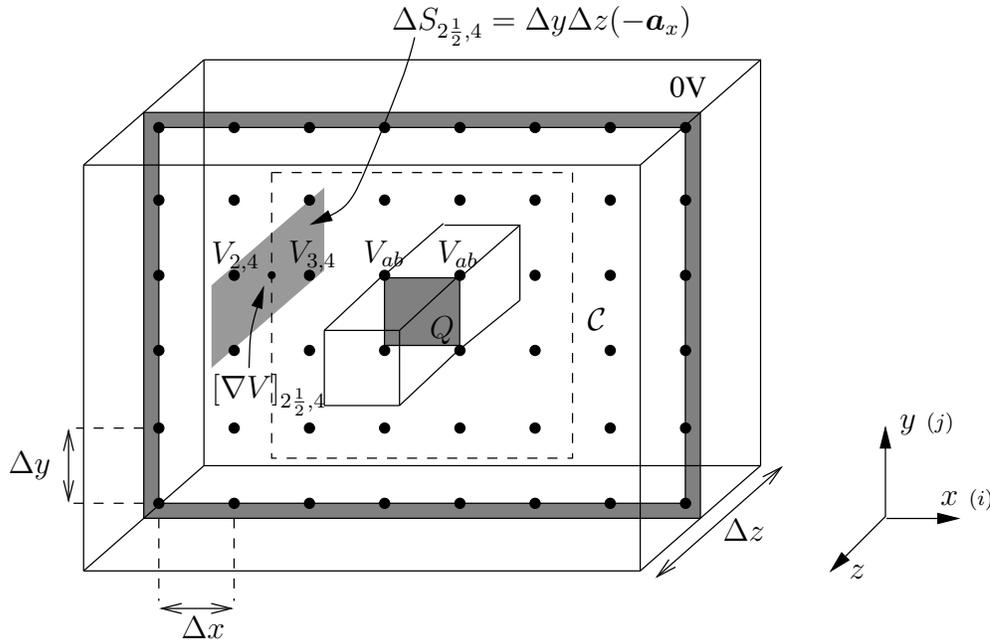


FIGURE 7.12 – Réalisation de l'intégrale de Gauss numérique à l'aide de quelques échantillons prélevés aux noeuds d'un maillage.

- le gradient de  $V_{ij}(x, y)$  pour obtenir  $\mathbf{E}_{ij}(x, y)$  ;
- l'intégrale de  $\mathbf{E}_{ij}(x, y)$  sur  $S_1$  pour aboutir à  $Q$

doivent être estimés à partir de quelques points d'échantillonnage indiqués par les indices  $i$  et  $j$  dans la section d'analyse. Les figures 7.11 et 7.12 aident à comprendre le mécanisme utilisé pour numériser l'intégrale de Gauss. D'abord un choix judicieux de la base du cylindre  $S_1$  s'impose. On choisit un cylindre<sup>14</sup> :

- de longueur  $\Delta z$  placé également de part et d'autre du plan contenant la section d'analyse – un demi cylindre  $\Delta z/2$  de chaque côté ;
- à base rectangulaire avec un maillage cartésien (un cylindre à base rectangulaire est un parallélépipède rectangle) ;
- qui passe à mi-chemin entre des points d'échantillonnage du potentiel ;
- entourant complètement un des conducteurs avec une base suivant le plus long parcours fermé  $\mathcal{C}$  possible pour améliorer la précision de l'intégrale numérique.

La figure 7.11 illustre les six surfaces formant ensemble un parallélépipède rectangle fermée autour du conducteur central. On remarque que les surfaces  $\mathbf{S}_{av}$  et  $\mathbf{S}_{ar}$  ont des normales suivant l'axe  $z$ . Aucun flux électrique ne les traverse ; on aura pas à intégrer sur ces 2 surfaces. Les quatre autres surfaces seront décomposées en petites

<sup>14</sup>Cylindre défini au sens large, i.e une surface dont les droites sont parallèles et non uniquement le cylindre généré par un cercle.

lanières de largeur  $\Delta x$  ou  $\Delta y$  selon qu'il s'agisse d'une surface horizontale ou verticale. Chaque lanière est considérée comme un élément de surface pour l'intégrale, au travers laquelle passe un flux électrique uniforme.

On rappelle que le gradient d'une fonction scalaire donne la pente dans chacune des directions. Dans le cas numérique présent, on approxime le gradient par une variation finie du potentiel selon chacun des axes  $x$  et  $y$  :

$$[\nabla V]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = [\nabla_x]_{i+\frac{1}{2},j} \mathbf{a}_x + [\nabla_y]_{i,j+\frac{1}{2}} \mathbf{a}_y \approx \frac{\overbrace{V_{i+1,j}-V_{i,j}}^{\Delta V}}{\Delta x} \mathbf{a}_x + \frac{\overbrace{V_{i,j+1}-V_{i,j}}^{\Delta V}}{\Delta y} \mathbf{a}_y . \quad (7.60)$$

Il s'adonne qu'avec un parallélépipède rectangle les éléments numériques de surface d'intégration  $\Delta \mathbf{S}$  sont définies soit par  $\pm \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x$ , soit par  $\pm \Delta x \Delta z \mathbf{a}_y$ ; le signe dépend de l'orientation de la surface  $\Delta \mathbf{S}$  considérée. On s'intéresse donc à une seule des deux composantes du gradient à la fois, à cause du produit scalaire avec l'élément numérique de surface correspondante. L'intégrale de Gauss devient une somme de produits sur l'ensemble des éléments de surface finis qui constituent le cylindre :

$$\begin{aligned} Q &= \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{S_d} \mathbf{D} \cdot dydz \mathbf{a}_x + \int_{S_g} \mathbf{D} \cdot (-dydz \mathbf{a}_x) + \int_{S_h} \mathbf{D} \cdot dx dz \mathbf{a}_y + \int_{S_b} \mathbf{D} \cdot (-dx dz \mathbf{a}_y) \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} &\approx \sum_j \epsilon_{d,j} (-[\nabla_x V]_{d+\frac{1}{2},j}) \Delta y \Delta z + \sum_j \epsilon_{g,j} (-[\nabla_x V]_{g-\frac{1}{2},j}) (-\Delta y \Delta z) \\ &\quad + \sum_i \epsilon_{i,h} (-[\nabla_y V]_{i,h+\frac{1}{2}}) \Delta x \Delta z + \sum_i \epsilon_{i,b} (-[\nabla_y V]_{i,b-\frac{1}{2}}) (-\Delta x \Delta z) \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$\begin{aligned} &\approx \sum_j \epsilon_{d,j} \left( \frac{V_{d,j} - V_{d+1,j}}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta z + \sum_j \epsilon_{g,j} \left( \frac{V_{g,j} - V_{g-1,j}}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta z \\ &\quad + \sum_i \epsilon_{i,h} \left( \frac{V_{i,h} - V_{i,h+1}}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta z + \sum_i \epsilon_{i,b} \left( \frac{V_{i,b} - V_{i,b-1}}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (7.63)$$

$$Q \approx \Delta z \sum_{i,j} \epsilon_{d,j} (V_{d,j} - V_{d+1,j}) + \epsilon_{g,j} (V_{g,j} - V_{g-1,j}) + \epsilon_{i,h} (V_{i,h} - V_{i,h+1}) + \epsilon_{i,b} (V_{i,b} - V_{i,b-1}) \quad (7.64)$$

**Attention :** Le passage de (7.63) à (7.64) implique que tous les  $\Delta S_{i,j}$  soient égaux donc  $\Delta x = \Delta y$ . Cette dernière condition, quoique non-essentielle découle de la méthode des différences finies montrée à la section 4.5. On indique sur la figure 7.12 la base du cylindre par la ligne pointillée, un élément de surface et l'estimation du gradient du potentiel en un point à partir des échantillons voisins.

- Faire les rapports  $Q/V_{ab}$  puis  $C/\Delta z$

On obtient ainsi la capacitance d'un bout de fil de longueur  $\Delta z$  par le rapport  $Q/V_{ab}$ . La capacitance par unité de longueur  $\mathcal{C}$  requiert la division par  $\Delta z$  qui annule le terme  $\Delta z$  au numérateur de l'expression de  $Q$ .

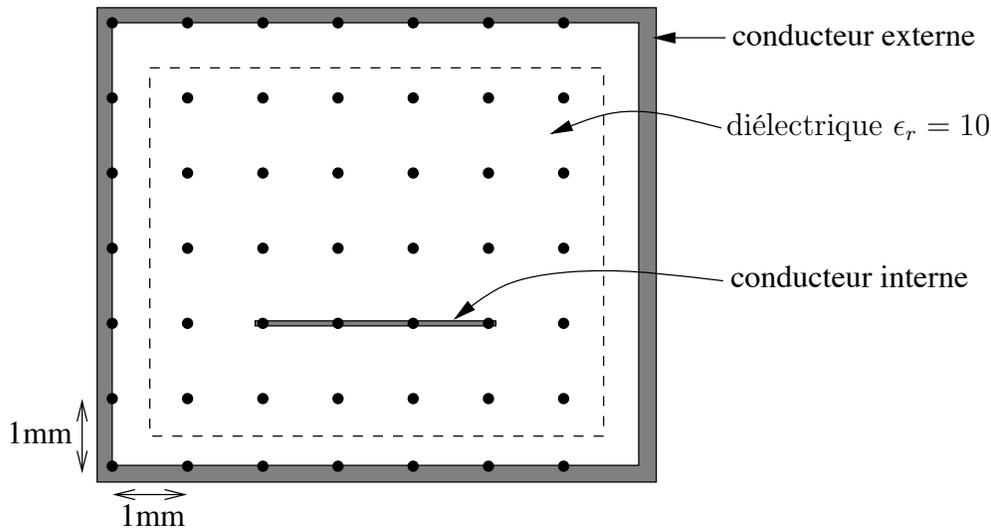


FIGURE 7.13 – Géométrie de la section d’analyse de la ligne de transmission et maillage utilisé.

**Exemple 7.5**

Une ligne de transmission assumée sans perte dont la section est montrée sur la figure 7.13, est faite d’un conducteur interne mince large de 3 *mm* placé à 2 *mm* à l’intérieur d’un conducteur externe rectangulaire de 7 *mm* × 6 *mm*. Le matériau est un diélectrique de constante  $\epsilon_r = 10$  non-magnétique ( $\mu = \mu_o$ ). On applique la méthode des différences finies en décomposant la section d’analyse en mailles carrées de 1 *mm* comme sur la figure 7.13. Si une tension de 1.000 *V* est appliquée sur le conducteur interne par rapport à celui externe fixée à 0 *V*, la matrice des potentiels en volts à chaque noeud du maillage (tolérance de 0.002 *V*) est la suivante :

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.075	0.137	0.169	0.169	0.137	0.075	0
0	0.162	0.306	0.371	0.371	0.306	0.162	0
0	0.270	0.554	0.641	0.641	0.554	0.270	0
0	0.366	1.000	1.000	1.000	1.000	0.366	0
0	0.196	0.417	0.472	0.472	0.417	0.196	0
0	0	0	0	0	0	0	0

- Déterminez les valeurs des paramètres de propagation de cette ligne : la vitesse de propagation et l’impédance caractéristique.

La vitesse de propagation ne dépend que de la constante diélectrique, d’où selon (7.55) :

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{10}} = 0.94868 \times 10^8 \text{ m/s} .$$

Il faut maintenant obtenir le champ électrique en calculant le gradient du potentiel avec changement de signe puisque  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . Pour obtenir la charge, il faut calculer l'intégrale de *Gauss* qui est l'intégrale sur un parcours fermé du produit scalaire entre le champ et l'élément de surface sur le parcours.

D'une part, le champ est nécessaire uniquement de part et d'autre du parcours. Inutile donc de calculer le gradient ailleurs. D'autre part, le produit scalaire permet de calculer uniquement la composante du gradient selon l'orientation de la surface.

Pour l'intégrale de *Gauss*, on choisit donc une surface formant un parallélépipède rectangle de longueur  $\Delta z$  dont la coupe est représentée par la ligne pointillée sur la figure 7.13. Il suffit de soustraire les valeurs de champ de part et d'autre du parcours, en multipliant par l'élément de surface, tout en faisant attention aux signes. On n'a pas à s'occuper des surfaces avant et arrière car aucun flux électrique ne les traverse. On découpe les surfaces dessus et dessous respectivement, en petits éléments numériques de surface d'intégration :

$$\Delta S_p = \pm \Delta x \Delta z \mathbf{a}_y = \pm (10^{-3}) \Delta z \mathbf{a}_y .$$

Il en va de même pour les surfaces latérales gauche et droite respectivement :

$$\Delta S_q = \mp \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x = \mp (10^{-3}) \Delta z \mathbf{a}_x .$$

La valeur du champ électrique au centre de chacune des éléments numériques de surface est estimée à partir du gradient, donc en  $V/m$  :

	$75\mathbf{a}_y$	$137\mathbf{a}_y$	$169\mathbf{a}_y$	$169\mathbf{a}_y$	$137\mathbf{a}_y$	$75\mathbf{a}_y$	
$-75\mathbf{a}_x$							$75\mathbf{a}_x$
$-162\mathbf{a}_x$							$162\mathbf{a}_x$
$-270\mathbf{a}_x$							$270\mathbf{a}_x$
$-366\mathbf{a}_x$							$366\mathbf{a}_x$
$-196\mathbf{a}_x$							$196\mathbf{a}_x$
	$-196\mathbf{a}_y$	$-417\mathbf{a}_y$	$-472\mathbf{a}_y$	$-472\mathbf{a}_y$	$-417\mathbf{a}_y$	$-196\mathbf{a}_y$	

On note ici que le choix de placer le conducteur externe à une tension 0 simplifie grandement le calcul du gradient puisqu'il n'est même plus nécessaire de calculer la différence.

La capacitance peut maintenant être déterminée :

$$\begin{aligned} C &\approx \frac{\epsilon}{V_{ab}\Delta z} \left( (75 + 137 + 169 + 169 + 137 + 75)\Delta x \Delta z \right. \\ &\quad + (75 + 162 + 270 + 366 + 196)\Delta y \Delta z \\ &\quad + (-196 - 417 - 472 - 472 - 417 - 196)(-\Delta x \Delta z) \\ &\quad \left. + (-196 - 366 - 270 - 162 - 75)(-\Delta y \Delta z) \right) \\ &\approx (10)(8.854 \times 10^{-12})(762 + 1069 + 2170 + 1069)(10^{-3})/1.000 \\ &\approx 448.9 \times 10^{-12} F/m . \end{aligned}$$

Finalement, on déduit l'impédance caractéristique  $Z_o$  à partir de l'estimation de  $\mathcal{C}$  selon (7.57). :

$$Z_o = \frac{\sqrt{10}}{(3 \times 10^8)(448.9 \times 10^{-12})} = 23.48\Omega .$$

## 7.9 Mode quasi-TEM

La ligne de transmission TEM considérée jusqu'à présent assumait que les champs étaient confinés à l'intérieur d'un seul diélectrique homogène et isotrope. Lorsque la section d'analyse comporte plusieurs diélectriques non-magnétiques (*donc  $\mu = \mu_o$  pour tous les diélectriques impliqués ici*), la situation ressemble à celle d'un diélectrique non-homogène. Dans ce cas, le mode TEM n'est pas strictement possible.<sup>15</sup> car les champs se propagent à des vitesses différentes, de sorte que les conditions aux limites ne peuvent être satisfaites avec une onde plane transverse de part et d'autre. De plus, les écarts de vitesses varient selon la fréquence du signal, ce qui occasionne des délais de groupe ou des distorsions harmoniques.

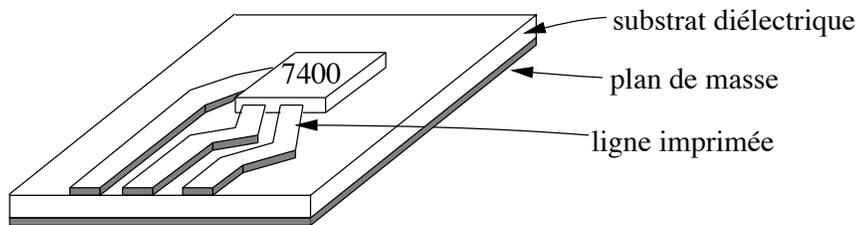


FIGURE 7.14 – Exemple d'un circuit imprimé avec lignes micro-rubans.

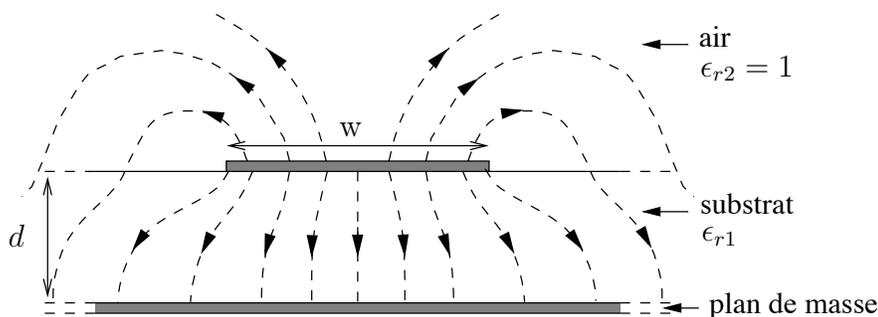


FIGURE 7.15 – Section d'une ligne micro-ruban avec lignes de champ électrique.

Un exemple de ce type est la ligne de transmission micro-ruban que l'on rencontre fréquemment sur des circuits imprimés de systèmes micro-ondes ou numériques/informatiques. Cette ligne consiste généralement en une plaquette de diélectrique (ou substrat)

<sup>15</sup>D'autres modes de propagation dit supérieurs, seront montrés au chapitre sur les guides-d'ondes.

à haute permittivité, sur laquelle sont imprimées d'un côté des bandes de cuivre, et de l'autre côté une couche pleine de cuivre appelée "plan de masse". Les figures 7.14 et 7.15 reproduisent un exemple de lignes micro-ruban d'un circuit informatique et une coupe de l'une d'elles. Dans ce genre de ligne, les champs électromagnétiques sont distribués dans le substrat, mais aussi dans l'air au-dessus du substrat du côté des bandes. Avec un calcul exact en électromagnétisme – sans passer par les notions de statique ou quasi-statique, on verrait qu'une partie de la puissance disponible contenue dans les champs présents dans l'air est rayonnée i.e. émise à la manière d'une antenne. On peut toutefois traiter la ligne comme si le mode TEM continuait d'exister ; la supposition produit des résultats approximatifs qui sont d'autant plus proches de la réalité avec un substrat à constante diélectrique élevée<sup>16</sup>.

### 7.9.1 Constante diélectrique effective

La difficulté d'une ligne en mode quasi-TEM, est de déterminer la constante électrique effective  $\epsilon_{r_{eff}}$ , car une partie des champs se retrouve dans le substrat de constante  $\epsilon_{r_1}$  et l'autre partie dans un autre diélectrique  $\epsilon_{r_2}$  (pour la ligne micro-ruban, le second diélectrique est l'air, d'où  $\epsilon_{r_2} = 1$ ), tel que reproduit sur la figure 7.15. La valeur de la constante électrique effective se situe quelque part entre ces deux valeurs extrêmes  $]\epsilon_{r_1}, \epsilon_{r_2}[$  selon la quantité de flux électrique partant dans chacun des milieux. Donc :

$$\epsilon_{r_{eff}} = \frac{\Psi_{e_1}}{\Psi_e} \epsilon_{r_1} + \frac{\Psi_{e_2}}{\Psi_e} \epsilon_{r_2} \tag{7.65}$$

où

- $\Psi_{e_1}$  représente le flux électrique  $\int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$  émanant du micro-ruban dans le premier milieu de constante diélectrique  $\epsilon_{r_1}$  ;
- $\Psi_{e_2}$ , le flux électrique  $\int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$  émanant du micro-ruban dans le second milieu de constante diélectrique  $\epsilon_{r_2}$  ;
- $\Psi_e$ , le flux électrique total i.e.  $\oint_{S=S_1+S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ .

L'expression (7.65) peut facilement être étendue au cas général de plusieurs diélectriques différents comme dans une ligne multi-couches.

Une fois la constante diélectrique effective évaluée, la détermination des paramètres de ligne en quasi-TEM sans perte, à savoir  $v_p$  et  $Z_o$ , se réalise de la même manière qu'une ligne constituée d'une seul diélectrique de constante  $\epsilon_r = \epsilon_{r_{eff}}$  en mode TEM :

$$v_p \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r_{eff}}}} \tag{7.66}$$

$$Z_o \approx \frac{\eta_o}{\sqrt{\epsilon_{r_{eff}}}} F_f . \tag{7.67}$$

<sup>16</sup>Plus la permittivité du substrat est élevée, plus les champs se confinent dans le diélectrique, ce qui diminue les pertes par rayonnement.

Souvent on préfère la détermination des paramètres de ligne à partir des capacitances par unité de longueur même en mode quasi-TEM. On combine alors la détermination de la constante diélectrique effective avec celle du facteur de forme en deux étapes qui se ressemblent beaucoup, sans compter que les calculs numériques s'y prêtent bien. Cette fois, deux mesures sont requises :

- l'estimation de la capacitance par unité de longueur de la structure avec les diélectriques,  $\mathcal{C}$  ;
- l'estimation de la capacitance par unité de longueur de la structure en remplaçant tous les diélectriques par le vide,  $\mathcal{C}_o$ .

Ces deux mesures peuvent se réaliser à l'aide du même programme dans lequel les constantes diélectriques sont variables et passées comme paramètres. On vérifie alors que :

$$\epsilon_{r_{eff}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_o} \quad (7.68)$$

et que :

$$v_p \approx \sqrt{\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}_o}} \sqrt{\frac{\mathcal{C}_o}{\mathcal{C}}} = c \sqrt{\frac{\mathcal{C}_o}{\mathcal{C}}} \quad (7.69)$$

$$Z_o \approx \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} = \sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}_o} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{C}_o\mathcal{C}}} = \frac{1}{c\sqrt{\mathcal{C}_o\mathcal{C}}} . \quad (7.70)$$

Les dernières égalités sont rendues possibles par le fait que l'inductance n'est pas sujette aux variations de la constante diélectrique.

## 7.9.2 Modification aux calculs

En présence de deux diélectriques, la version modifiée de la méthode des différences finies avec interface entre diélectriques vue à la sous-section 4.5.2 doit être appliquée pour les points à l'interface tel que stipulé.

Il y a plus, car il faut aussi considérer les deux diélectriques différents dans le calcul de l'intégrale de *Gauss*. En effet, certains parallélépipèdes rectangles sont situés à cheval à l'interface entre les deux diélectriques. Or cette intégrale de *Gauss* fait intervenir la permittivité. La simplicité veut qu'on assume simplement que le flux électrique passant par chacune des deux moitiés de chacun de ces parallélépipèdes, soit directement proportionnel aux constantes diélectriques. Ce choix respecte la condition aux limites du champ électrique tangentiel à savoir  $E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2}$  d'où  $D_1 = \epsilon_{r_1} D_o$  et  $D_2 = \epsilon_{r_2} D_o$  avec  $D_o$ , la densité de flux électrique dans le vide. En conséquence, pour un interface en  $y = 0$  par exemple avec la même notation que (7.63), on écrit :

$$\int_{S_{\text{interface}}} \underbrace{\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}_{\approx \Delta_y \Delta_z \mathbf{a}_x} \approx \frac{(\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}) (V_d - V_{d+1})}{2} \frac{1}{\Delta_x} \Delta_y \Delta_z \quad (7.71)$$

ce qui revient à dire :

$$\epsilon_{r_{\text{interface}}} \approx \frac{(\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2})}{2} . \quad (7.72)$$

**Exemple 7.6**

Une ligne micro-ruban possède la géométrie suivante :

- un substrat diélectrique sans perte de  $\epsilon_r = 10$  d'épaisseur  $h = 2$  unités ;
- une bande de cuivre (qu'on assume sans perte aussi) de largeur  $w = 3$  unités.

On cherche à obtenir les paramètres de propagation de cette ligne numériquement. Pour les besoins, on limite la section d'analyse à six unités par six unités, car on considère que le flux électrique décroît rapidement et devient très faible en dehors de cette section. Ainsi, on ferme la section d'analyse par un conducteur au potentiel "0" qui assimile du même coup le plan de masse de la ligne micro-ruban.

On procède ensuite à l'obtention de la distribution du potentiel dans la section d'analyse par la méthode des différences finies avec des mailles carrées d'une unité de côté. L'équation (4.27) sert pour tous les points à l'exception de ceux à la surface du substrat où l'équation (4.29) est requise avec  $\epsilon_{r_1} = 10$  et  $\epsilon_{r_2} = 1$ .

Les matrices des potentiels en *volts* à chaque noeud du maillage en appliquant une tension de 1.000 V sur la bande, sont données ci-dessous. Les valeurs du dessus sont obtenues en tenant compte des constantes diélectriques et celles du dessous, lorsque le vide remplit toute la section d'analyse :

0	0	0	0	0	0	0	0
0	(0.074)	(0.136)	(0.169)	(0.169)	(0.136)	(0.074)	0
0	(0.075)	(0.137)	(0.169)	(0.169)	(0.137)	(0.075)	0
0	(0.160)	(0.304)	(0.370)	(0.370)	(0.304)	(0.160)	0
0	(0.162)	(0.306)	(0.371)	(0.371)	(0.306)	(0.162)	0
0	(0.265)	(0.551)	(0.640)	(0.640)	(0.551)	(0.265)	0
0	(0.270)	(0.554)	(0.641)	(0.641)	(0.554)	(0.270)	0
0	(0.349)	1.000	1.000	1.000	1.000	(0.349)	0
0	(0.366)					(0.366)	0
0	(0.191)	(0.416)	(0.472)	(0.472)	(0.416)	(0.191)	0
0	(0.196)	(0.417)	(0.472)	(0.472)	(0.417)	(0.196)	0
0	0	0	0	0	0	0	0

- Partant de ces informations, déterminez les valeurs des paramètres de propagation.

On suit l'exemple 7.5 pour extraire les estimations des capacitances  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_o$  à partir des mesures inscrites au tableau ci-dessus. Il ne faut pas oublier de prendre en considération une permittivité possiblement différente pour chaque terme de la sommation, soient les  $(-\epsilon_{ij} \mathbf{E}_{ij} \Delta \mathbf{S}_{ij})$  dans le cas de  $\mathcal{C}$ . Pour  $\mathcal{C}_o$ , le problème n'apparaît pas à cause de la permittivité homogène  $\epsilon_o$ . On remarque aussi que la distribution du potentiel avec le vide partout n'a pas changé par rapport à celle obtenue avec un diélectrique  $\epsilon_r = 10$  de l'exemple 7.5. La

distribution est effectivement in affectée par la constante diélectrique en autant qu'elle soit homogène. Les calculs conduisent à :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_o &\approx (8.854 \times 10^{-12})(762 + 1069 + 2170 + 1069)(10^{-3})/1.000 \\
 &\approx 44.89 \times 10^{-12} \text{ F/m} ; \\
 \mathcal{C} &\approx \frac{\epsilon_o}{V_{ab}\Delta z} \left( \epsilon_{r_2}((-265 - 160 - 74)(-\Delta y \Delta z) + (74 + 160 + 265)(\Delta y \Delta z)) \right. \\
 &\quad + \epsilon_{r_2}(74 + 136 + 169 + 169 + 136 + 74)(\Delta x \Delta z) \\
 &\quad + \epsilon_{r_1}(-191 - 416 - 472 - 472 - 416 - 191)(-\Delta x \Delta z) \\
 &\quad + \epsilon_{r_1}((-191)(-\Delta y \Delta z) + (191)(\Delta y \Delta z)) \\
 &\quad \left. + \frac{\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}}{2}((-349)(-\Delta y \Delta z) + (349)(\Delta y \Delta z)) \right) \\
 &\approx (8.854 \times 10^{-12}) \left( (1)(998)(10^{-3}) + (1)(758)(10^{-3}) \right. \\
 &\quad \left. + (10)(2158)(10^{-3}) + (10)(382)(10^{-3}) + (5.5)(698)(10^{-3}) \right) / 1.000 \\
 &\approx 274.4 \times 10^{-12} \text{ F/m} .
 \end{aligned}$$

Toutes les informations sont maintenant disponibles pour terminer :

$$\begin{aligned}
 Z_o &= \frac{1}{c\sqrt{\mathcal{C}_o\mathcal{C}}} \approx \frac{1}{(3 \times 10^8)(10^{-12}\sqrt{(274.4)(44.89)})} \\
 &\approx 30.0 \Omega \\
 v_p &= c\sqrt{\frac{\mathcal{C}_o}{\mathcal{C}}} \approx (3 \times 10^8)\sqrt{\frac{44.89}{274.4}} \\
 &\approx 1.213 \times 10^8 \text{ m/s} .
 \end{aligned}$$

- Vérifiez les résultats sachant qu'une méthode conforme approxime la constante diélectrique d'une ligne micro-ruban comme suit :

$$\epsilon_{reffmr} \approx 1 + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 10 d/w}} \right) . \quad (7.73)$$

Il faut comprendre ici que le but serait de modéliser une ligne micro-ruban où le conducteur central devient la ligne imprimée, alors que le bas de la section d'analyse agit comme plan de masse. Le potentiel étant nul à l'infini, il faudrait que les limites mises à "0" à gauche, à droite et en haut de la section d'analyse, soient à l'infini. Mais ceci voudrait dire une infinité de points d'échantillonnage, ce qui n'est pas de tout repos pour le calcul numérique. Il faut limiter la section d'analyse mais en s'assurant d'un bon dégagement entre le ligne imprimée, les côtés gauche et droit, et le haut. La hauteur  $h$  représente alors l'épaisseur du substrat.

Selon (7.68) avec les données  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_o$  obtenues, la constante diélectrique effective de la ligne micro-ruban vaut :

$$\epsilon_{reffmr} \approx \frac{274.4}{44.89} = 6.11 .$$

D'un autre côté, la géométrie de la ligne combinée à (7.73) donne :

$$\epsilon_{r_{effmr}} \approx 1 + \frac{9}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{10(2/3)}} \right) = 7.24 .$$

On se rend compte que, sans être dans les patates, prendre une section d'analyse de 7 par 6 unités s'avère insuffisant. On peut vérifier qu'avec une section d'analyse de 41 par 40 unités tout en conservant la même valeur pour  $w = 3$  et  $h = 2$ , la constante diélectrique effective de la ligne micro-ruban devient égale à 7.15 !

---

## Exercices

### Question 1

Déterminez le rapport entre les rayons des conducteurs  $b/a$  d'une ligne de transmission coaxiale sans perte pour que l'impédance caractéristique soit de  $50\ \Omega$  alors que le diélectrique non-magnétique a une constante de 2.56 .

### Question 2

Un câble coaxial est assumé sans perte. On mesure une inductance de  $800\ nH/m$  et une capacitance de  $320\ pF/m$  à la fréquence de  $970\ kHz$ . Déterminez à cette fréquence :

- l'impédance caractéristique du câble ;
- la vitesse de propagation des signaux sur ce câble.

### Question 3

Soit un câble coaxial dont le conducteur interne a un rayon  $a$  et le conducteur externe, un rayon  $b$ . Exprimez les paramètres distribués dans le cas sans perte. Vérifiez que le produit  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  correspond bien au produit  $\mu\epsilon$ .

### Question 4

Une ligne de transmission a les paramètres distribués suivants à la fréquence de  $2\ MHz$  :

$$\mathcal{R} = 3\ \Omega/km, \mathcal{L} = 2 \times 10^{-3}\ H/km, \mathcal{C} = 0.05 \times 10^{-6}\ F/km \text{ et } \mathcal{G} = 0.02 \times 10^{-6}\ S/km .$$

Déterminez :

- la valeur des paramètres de propagation de la ligne de transmission ;
- la vitesse de propagation des signaux.

Vous pouvez ensuite essayer à  $f = 10\ kHz$  pour voir les changements.

### Question 5

Soit une ligne à pertes ( $\mathcal{R} \neq 0$  et/ou  $\mathcal{G} \neq 0$ ) mais ajustée pour être sans distorsion (voir règle de *Heaviside*). Donnez les expressions demandées en fonction des paramètres distribués :

- la valeur des paramètres de propagation de la ligne de transmission ( $\alpha$  en fonction de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{G}$  seulement,  $\beta$  en fonction de  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{C}$  seulement) ;
- la vitesse de propagation des signaux.

### Question 6

Une ligne de transmission à plaques parallèles sans perte a les dimensions suivantes :  $w = 0.1\text{ m}$  et  $d = 0.01\text{ m}$ . Le matériau entre les deux plaques consiste en un diélectrique parfait non-magnétique. Une onde TEM circule sur la ligne dans la direction  $z^+$ . L'expression de la tension le long de la ligne s'écrit :

$$V(z, t) = 10 \cos(3\pi \times 10^8 t - 3\pi z) \text{ V} .$$

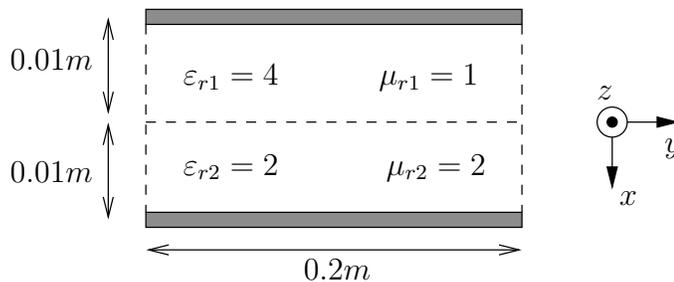
Dérivez les expressions des champs électrique et magnétique (non vectorielles) du courant et de la puissance transportée selon  $z$  et  $t$ .

### Question 7

Une ligne de transmission à plaques parallèles sans perte a les dimensions suivantes :  $w = 0.2\text{ m}$  et  $d = 0.01\text{ m}$ . Le matériau entre les deux plaques consiste en un diélectrique parfait non-magnétique de constante  $\epsilon_r = 2.25$  . Une onde TEM circule sur la ligne. Évaluez la puissance moyenne transportée en négligeant les effets de bord si :

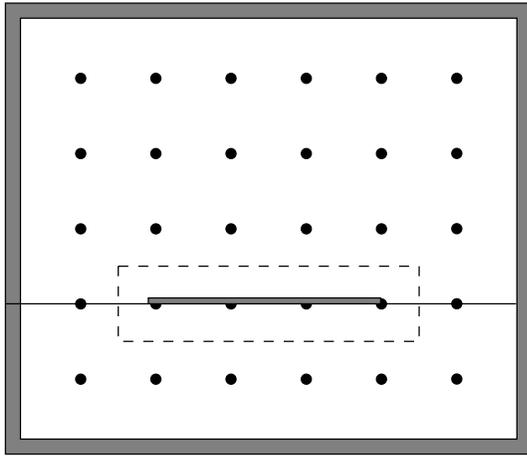
- a) le champ électrique entre les plaques est assumé uniforme, avec une valeur efficace de  $300\pi V_{rms}/m$  ;
- b) le champ magnétique, assumé uniforme, a une valeur efficace de  $7.5 A_{rms}/m$  ;
- c) la tension entre les plaques est de  $4\pi V_{rms}$  ;
- d) le courant circulant sur les plaques vaut  $0.5 A_{rms}$ .

### Question 8



Soit une ligne de transmission à plaques parallèles sans perte dont la section est représentée sur la figure ci-dessus. On note que  $\epsilon_1\mu_1 = \epsilon_2\mu_2$  de sorte que l'onde TEM existe. En négligeant les effets de bord, calculez la valeur de l'impédance caractéristique.

## Question 9



Soit la ligne micro-ruban retrouvée à l'exemple 7.6. On réutilise les matrices de potentiels en *volts* à chaque noeud du maillage préalablement obtenues, mais l'intégrale de Gauss est maintenant faite en choisissant une surface formant un parallépipède rectangle de longueur  $dz$  dont la section est représentée par la ligne pointillée sur la figure ci-dessus. Estimez avec cette nouvelle surface d'intégration :

- la constante diélectrique effective ;
- les paramètres de propagation de la ligne.

## Question 10

La figure de la question 7 du chapitre 4 représente maintenant la section d'une ligne de transmission. Par la méthode des différences finies, on trouve  $V_1 = 0.8 \text{ V}$  et  $V_2 = 0.4 \text{ V}$ . Le diélectrique entre les conducteurs possède une constante diélectrique  $\epsilon_r = 2.4$ .

Déduisez le facteur de forme  $F_f$  de cette ligne.

**Réponses :**

- $b/a = 3.794$ .
- a)  $Z_o = 50 \Omega$  ; b)  $v_p = 62.5 \times 10^6 \text{ m/s}$ .
- pour calculer  $\mathcal{C}$ , trouver  $Q = \int_{\Delta z} \int_0^{2\pi} \epsilon \left( \frac{\rho_s a}{\epsilon r} \right) \mathbf{a}_r \cdot r d\phi dz \mathbf{a}_r$   
pour calculer  $\mathcal{L}$ , trouver  $\Psi = \int_{\Delta z} \int_a^b \mu \left( \frac{I}{2\pi r} \right) \mathbf{a}_\phi \cdot dr dz \mathbf{a}_\phi$   
 $\mathcal{C} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$ ,  $\mathcal{L} = \frac{\mu \ln(b/a)}{2\pi}$ ,  $\mathcal{LC} = \mu\epsilon$ .
- a)  $\bar{\gamma} = (0.0075 + j125.66) \text{ km}^{-1}$ ,  $\bar{Z}_o = (200 \angle -0.0034^\circ) \Omega$  ; b)  $v_p = 100 \times 10^3 \text{ km/s}$ .  
à  $10 \text{ kHz}$  :  
 $\bar{\gamma} = (0.0075 + j0.6284) \text{ km}^{-1}$ ,  $\bar{Z}_o = (200 \angle -0.684^\circ) \Omega$  ; b)  $v_p = 99.99 \times 10^3 \text{ km/s}$ .

On remarque que les valeurs sont proches de celles obtenues sans tenir compte des pertes car la ligne est à très faibles pertes ( $\omega\mathcal{L} \gg \mathcal{R}$ ) et ( $\omega\mathcal{C} \gg \mathcal{G}$ ).

On voit aussi que  $\alpha$ ,  $v_p$  sont relativement indépendants de la fréquence dans ces conditions.

5. a)  $\bar{\gamma} = \sqrt{\mathcal{R}\mathcal{G}} + j\omega\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}$ ,  $\bar{Z}_o = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$ ; b)  $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$ .
6.  $E(z, t) = 1000 \cos(3\pi \times 10^8 t - 3\pi z) \text{ V/m}$ ,  
 $H(z, t) = \frac{25}{\pi} \cos(3\pi \times 10^8 t - 3\pi z) \text{ A/m}$ ,  
 $I(z, t) = \frac{2.5}{\pi} \cos(3\pi \times 10^8 t - 3\pi z) \text{ A}$ ,  
 $\mathcal{P}(z, t) = \frac{25}{\pi} \cos^2(3\pi \times 10^8 t - 3\pi z) \text{ W}$ .
7. a)  $\langle \mathcal{P} \rangle = 2.25\pi \text{ W}$ ; b)  $\langle \mathcal{P} \rangle = 9\pi \text{ W}$ ;  
c)  $\langle \mathcal{P} \rangle = 4\pi \text{ W}$ ; d)  $\langle \mathcal{P} \rangle = \pi \text{ W}$ .
8. Le modèle est celui d'une inductance distribuée  $\mathcal{L} = \frac{3}{20}\mu_o H/m$   
(l'inductance distribuée peut se calculer en prenant  $\mathcal{L}\mathcal{C} = 4\mu_o\epsilon_o$  ou  
en prenant  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  avec  $\mathcal{L}_2 = 2\mathcal{L}_1 = 0.1\mu_o$ )  
et de deux capacités distribuées en série  $1/\mathcal{C} = 1/\mathcal{C}_1 + 1/\mathcal{C}_2$  avec  
 $\mathcal{C}_1 = 80\epsilon_o$  et  $\mathcal{C}_2 = 40\epsilon_o$  d'où  $Z_o = 9\pi \Omega$ .  
On pourrait utiliser  $Z_o = 1/(v_p\mathcal{C})$  puisque le mode TEM existe avec  $v_p = c/2$ .
9.  $\mathcal{Q} = \frac{Q}{\Delta z} = 31.019\epsilon_o C/m$ ,  $\mathcal{Q}_o = \frac{Q_o}{\Delta z} = 5.100\epsilon_o C/m$   
a)  $\epsilon_{r_{eff}} = 6.082$ ; b)  $Z_o \approx 29.93 \Omega$ ,  $v_p \approx 1.21645 \times 10^8 \text{ m/s}$ .
10.  $\mathcal{C} = 4.8\epsilon F/m$  donc  $F_f = \frac{1}{4.8}$ .

# Chapitre 8

## Régime transitoire sur ligne

### 8.1 Introduction

Dans un contexte où les canaux de transmission doivent supporter des débits de plus en plus élevés avec des modulations impulsionnelles ou numériques, une ligne de transmission devient plus rapidement longue électriquement parlant. Par exemple, un lien Ethernet à 100 *Mbits/s* nécessite une ligne plus courte qu'une dizaine de centimètres pour continuer d'assumer un délai de propagation presque nul. Dans bien des cas, il importe de connaître le comportement du système avant qu'il atteigne son régime permanent, i.e. avoir une idée du transitoire. En effet, ce dernier peut avoir des conséquences déterminantes sur la conception finale des circuits.

Pour faire l'étude de régime transitoire, on utilise :

- la transformation de *Laplace* ;
- les équations du télégraphiste qui modélisent la contribution de la ligne de transmission ;
- les principes des circuits électriques lorsqu'on applique un changement à la source, à la charge ou ailleurs sur la ligne.

### 8.2 Rappels des notions

Il convient de commencer brièvement par un retour sur des notions qui serviront dans le reste du chapitre.

#### 8.2.1 Transformation de Laplace

La transformation de *Laplace* (en  $s$ ) du nom du mathématicien et astronome français s'applique lorsqu'on désire connaître l'effet d'un changement au temps  $t = 0$  en tenant compte des conditions initiales. Elle est une fonction en fréquence généralisée (contrairement à la transformation de *Fourier*)<sup>1</sup>. La comparaison avec la transformation de *Fourier*

---

<sup>1</sup>Avec *Laplace*  $s = \sigma + j\omega$

montre que  $\mathcal{F}\{e^{-\sigma t} f(t)u(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$ . Elle se définit pour  $t > 0$  comme :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt . \tag{8.1}$$

La transformation de *Laplace* a l'avantage de donner des expressions beaucoup plus simples à manipuler que les équations différentielles. Il faut aussi se rappeler quelques propriétés de la transformée de *Laplace* unilatérale qui risquent de servir dans le cadre des lignes en régime transitoire telles la dérivation, le retard, les valeurs initiale et finale. Ces propriétés apparaissent au tableau 8.1

$\mathcal{L}\{af(t)u(t) + bg(t)u(t)\} = aF(s) + bG(s)$
$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$
$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)u(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+)$
$\mathcal{L}\{f(t - t_0)u(t - t_0)\} = e^{-st_0} F(s)$
$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

TABLE 8.1 – Propriétés de la transformée de *Laplace*.

Quant à la transformation inverse de *Laplace* pour ramener dans le domaine temporel, elle s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-jT}^{c+jT} e^{st} F(s) ds \tag{8.2}$$

où  $c$  est une constante choisie telle que les points singuliers de  $F(s)$  se retrouvent à gauche de la droite  $\text{Re}\{s\} = c$  dans la plan complexe.

### 8.2.2 Principes de circuit

Comme les lignes de transmission sont maintenant traitées comme des éléments de circuit, il est bon de rappeler les théorèmes suivant :

- superposition des sources indépendantes

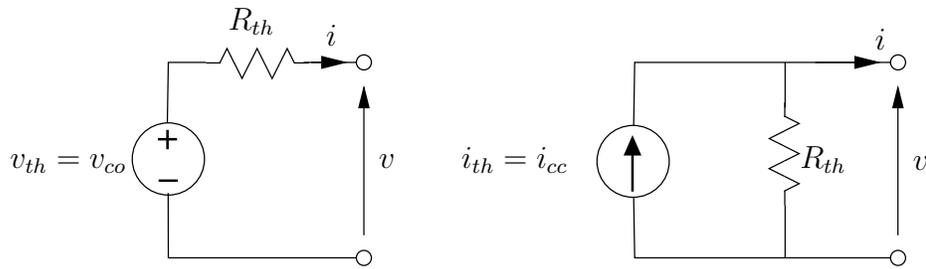
En présence de plusieurs sources indépendantes dans un circuit, on somme les contributions produites par les sources prises individuellement en mettant à zéro les autres sources ;

- mise à zéro de sources indépendantes

Une source tension nulle équivaut à un court-circuit (car son impédance de sortie est supposée nulle), tandis qu'une source courant nulle correspond à un circuit ouvert ;

- équivalence de *Thévenin* et de *Norton*

Tout circuit linéaire peut être assimilé à une source tension en série avec une résistance  $R_{th}$  – appelée résistance *Thévenin* – ou à une source courant en parallèle

FIGURE 8.1 – Circuit équivalent de *Thévenin* ou de *Norton*.

avec une résistance *Norton* de même valeur ; les deux circuits montrés à la figure 8.1 étant tout à fait équivalents. La relation  $v - i$  du circuit se résume à :

$$i = -\frac{v}{R_{th}} + i_{cc}$$

$$v = -R_{th}i + v_{co}$$

### 8.2.3 Équivalent circuit des interrupteurs

Il arrive fréquemment que l'on doive analyser le transitoire d'un circuit provoqué par une modification subite qui s'assimile à l'ouverture ou la fermeture d'un interrupteur. Des exemples : un court-circuit sur la ligne ou le contraire, une ligne coupée, un changement rapide d'une charge, etc.

La question est comment faire intervenir le changement d'état d'un interrupteur dans un circuit avec des éléments usuels. Un examen des transformations opérées aide grandement. On suppose pour commencer que le système avait atteint son régime stationnaire avant  $t = 0$ .

- À la fermeture d'un interrupteur au temps  $t = 0$ , la tension connue – ou du moins calculable –  $v_i$  qui était à ses bornes à  $t = 0^-$  tombe à zéro pour  $t > 0$  ; on ne peut rien dire du courant pour  $t > 0$  alors qu'il était nul pour  $t < 0$ .
- À l'ouverture d'un interrupteur au temps  $t = 0$ , le courant connu  $i_i$  qui traversait l'interrupteur à  $t = 0^-$  devient nul pour  $t > 0$  ; la tension qui était nulle, devient quelconque pour  $t > 0$ .

Ainsi, on remplace, tel que montré sur la figure 8.2 :

- la fermeture de l'interrupteur par une source tension  $v_i u(t)$  qui s'oppose – et annule complètement – la tension  $v_i$  initialement aux bornes ;
- l'ouverture d'un interrupteur par une source courant  $i_i u(t)$  qui pousse un courant dans la direction contraire au courant  $i_i$  le traversant initialement.

Le tout est de réfléchir quant à la cause et à l'effet pour bien modéliser avec des interrupteurs, puis remplacer convenablement l'interrupteur par sa source équivalente au bon endroit, au bons sens et avec la bonne intensité.

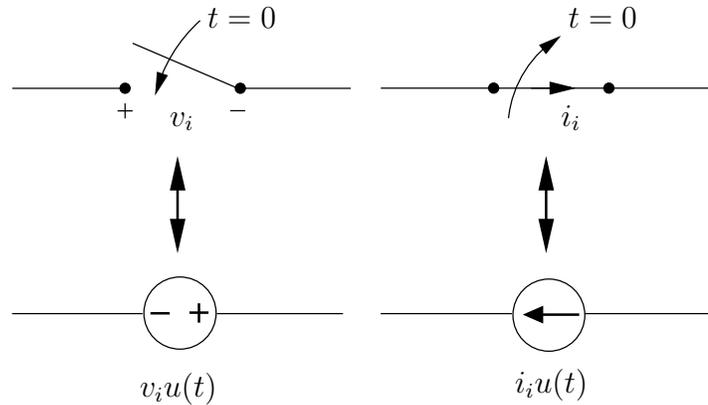


FIGURE 8.2 – Équivalence des actions d'un interrupteur au temps  $t = 0$ .

**Exemple 8.1**

Une source tension continue  $V_g(t) = V_o$  en série avec un interrupteur ouvert sont branchés à une ligne de transmission terminée dans une charge  $R_c$ . L'interrupteur est fermé au temps  $t = 0$ . Tel qu'indiqué à la figure 8.3, on suppose que la tension initiale sur la ligne est nulle.

► Démontrez que cette situation est équivalente à une source tension  $V_o u(t)$ .

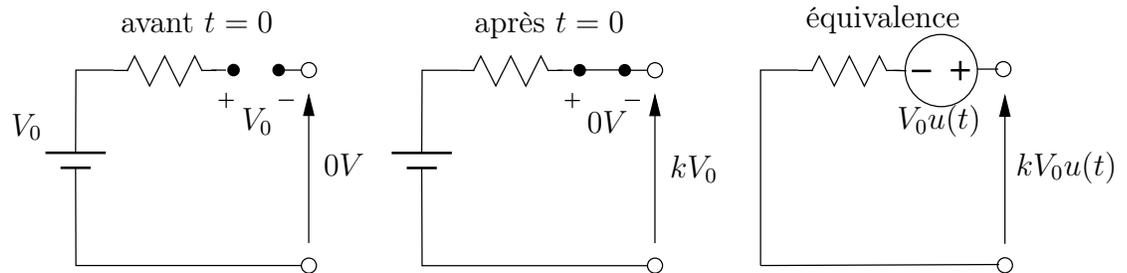


FIGURE 8.3 – Équivalence de la fermeture de l'interrupteur en série avec une source tension continue.

L'effet de fermer l'interrupteur en série peut être analysé en regardant ce qui se produit aux bornes de l'ensemble. On peut aussi voir le résultat comme une combinaison de deux sources tel qu'abordé ici.

Initialement une tension de  $V_o$  (+-) apparaît aux bornes de l'interrupteur. Une fois fermée, la tension chute subitement à  $0\text{ V}$ . Ceci équivaut à remplacer l'interrupteur par une source tension  $v_i(t) = V_o u(t)$  (-+).

Le circuit équivaut bien à une source  $V_o u(t)$  montrée à la figure 8.3.

## 8.3 Effet de la ligne

La transformation de *Laplace* des deux équations du télégraphiste est simple et permettra éventuellement de déduire le régime transitoire. Si on pose  $V(z, s) = \mathcal{L}\{v(z, t)\}$  et  $I(z, s) = \mathcal{L}\{i(z, t)\}$ , alors découlent les équations du télégraphiste :

$$\frac{\partial V(z, s)}{\partial z} = -(\mathcal{R} + s\mathcal{L}) I(z, s) \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial I(z, s)}{\partial z} = -(\mathcal{G} + s\mathcal{C}) V(z, s) \quad (8.4)$$

puis l'équation d'onde de transmission :

$$\frac{\partial^2 V(z, s)}{\partial z^2} = \gamma^2(s) V(z, s) \quad (8.5)$$

avec  $\gamma(s)$ , la constante de propagation :

$$\gamma(s) = \sqrt{(\mathcal{R} + s\mathcal{L})(\mathcal{G} + s\mathcal{C})}. \quad (8.6)$$

La solution des équations du télégraphistes (8.3) et (8.4) est bien connue. On peut se fier sur la solution de l'onde plane ou des signaux dans une ligne à pertes en régime sinusoïdal permanent (7.44) et (7.46) :

$$V(z, s) = V^+(s)e^{\downarrow\gamma(s)z} + V^-(s)e^{\uparrow\gamma(s)z} \quad (8.7)$$

$$I(z, s) = I^+(s)e^{-\gamma(s)z} + I^-(s)e^{+\gamma(s)z} \quad (8.8)$$

$$= \frac{1}{Z_o(s)} \left( \underset{\uparrow}{V^+(s)} e^{-\gamma(s)z} - \underset{\uparrow}{V^-(s)} e^{+\gamma(s)z} \right) \quad (8.9)$$

avec  $Z_o(s)$ , l'impédance intrinsèque :

$$Z_o(s) = \sqrt{\frac{\mathcal{R} + s\mathcal{L}}{\mathcal{G} + s\mathcal{C}}}. \quad (8.10)$$

Les coefficients  $V^+$  et  $I^+$  réfèrent, comme toujours, à l'onde positive (direction de propagation en  $z+$ ) tandis que les coefficients  $V^-$  et  $I^-$  réfèrent à l'onde négative (direction de propagation  $z-$ ). Ces coefficients sont indépendants de la position d'observation  $z$  le long de la ligne mais sont déterminés par l'application de conditions aux limites qui se retrouvent à chaque extrémité de la ligne. Ils dépendront donc en premier lieu :

- du type, de la valeur et de l'impédance interne de la source ;
- de la charge ;

mais aussi de :

- la longueur  $\ell$  de la ligne ;
- de la constante de propagation  $\gamma(s)$  sur la ligne (qui fournit atténuation et vitesse de propagation) ;

- l'impédance caractéristique  $Z_o(s)$  de la ligne.

Afin de déterminer complètement chacun des coefficients, il faut connaître absolument le schéma complet du circuit. Cependant, on peut établir immédiatement des relations entre  $V^+$  et  $I^+$  d'une part ; entre  $V^-$  et  $I^-$  d'autre part et ce, en n'ayant que l'impédance caractéristique de la ligne de transmission. Avec les solutions (8.7) et (8.8), on découvre que :

$$\frac{V^+(s)}{I^+(s)} = Z_o(s) \tag{8.11}$$

$$\frac{V^-(s)}{I^-(s)} = \underset{\uparrow}{-} Z_o(s) . \tag{8.12}$$

Les résultats étaient prévisibles car on avait obtenu des similaires avec l'onde plane.

### 8.4 Transitoire d'un système simple

Les coefficients  $V^+$ ,  $V^-$ ,  $I^+$  et  $I^-$  ne peuvent être déterminés que cas par cas. On doit préciser davantage le système pour imposer les conditions aux limites aux extrémités. Dès le départ, on remarque que la connaissance de  $V^+$  et  $V^-$  suffit car  $I^+$  et  $I^-$  sont déduits automatiquement avec les relations (8.11) et (8.12). Deux inconnues, deux équations sont nécessaires.

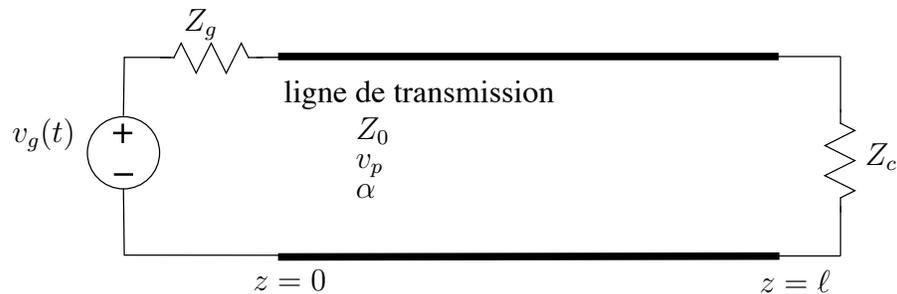


FIGURE 8.4 – Schéma simple d'un système de transmission sur ligne.

Quelle que soit la façon d'alimenter une ligne, on peut toujours représenter la source par un équivalent *Thévenin* – ou *Norton* selon ce qui semble le plus simple – avec une impédance interne  $Z_g(s)$ . La charge vue par la ligne à l'autre bout est désignée par  $Z_c(s)$ . La figure 8.4 présente la situation simple mais rencontrée fréquemment d'un système de transmission sur une ligne.

#### 8.4.1 Condition à la source

La condition à la source fournit la première équation. Les signaux à  $z = 0$  doivent respecter la relation  $v - i$  du circuit équivalent qui, combiné à l'équation (8.8), mène à :

$$V(0, s) = V_g(s) - Z_g(s) I(0, s) \tag{8.13}$$

$$= V_g(s) - \frac{Z_g(s)}{Z_o(s)} (V^+(s) - V^-(s)) \tag{8.14}$$

alors que selon (8.7), on a :

$$V(0, s) = V^+(s) + V^-(s) . \tag{8.15}$$

L'égalité des deux dernières expressions donne :

$$V^+(s) = \underbrace{V_g(s) \frac{Z_o(s)}{Z_o(s) + Z_g(s)}}_{V^o(s)} + V^-(s) \underbrace{\frac{Z_g(s) - Z_o(s)}{Z_g(s) + Z_o(s)}}_{\text{coef. réflexion}} \tag{8.16}$$

où on définit le coefficient de réflexion à la source  $\Gamma_g(s)$  :

$$\Gamma_g(s) = \frac{Z_g(s) - Z_o(s)}{Z_g(s) + Z_o(s)} . \tag{8.17}$$

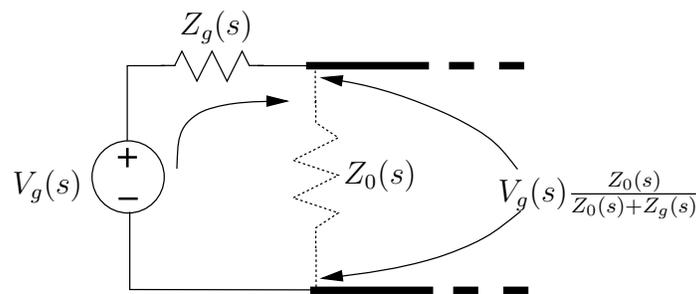


FIGURE 8.5 – Onde positive quittant la source au départ.

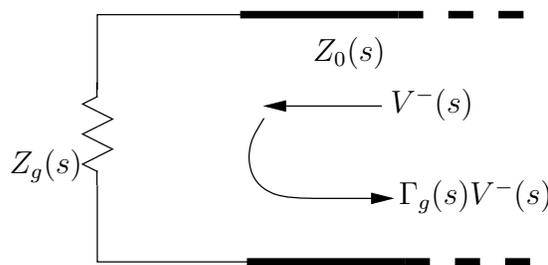


FIGURE 8.6 – Onde positive issue de la réflexion d'une onde négative à la source.

Si on comprend bien la signification de (8.16), on voit que l'onde positive est constituée de l'onde quittant la source à l'instant  $t = 0$  – illustrée à la figure 8.5 – et de la réflexion à l'interface source-ligne d'une partie de l'onde négative – illustrée à la figure 8.6.

- Le diviseur de tension implique que la ligne agit comme une simple impédance égale à son impédance caractéristique pour le calcul du signal quittant la source au départ.
- Le coefficient  $\Gamma_g(s)$  est une analogie directe avec le coefficient de réflexion d'une onde plane d'un milieu d'impédance intrinsèque  $Z_o(s)$  sur un milieu d'impédance intrinsèque  $Z_g(s)$  (voir équation (6.11)). En effet,  $Z_g(s)$  correspond à l'impédance vue par un signal incident sur la source en provenance de la ligne – un retour de la charge.

### 8.4.2 Condition à la charge

On analyse le circuit du côté de la charge. On reprend les équations (8.7) et (8.8) dans lesquelles on pose  $z = \ell$ , la longueur de la ligne :

$$V(\ell, s) = Z_c(s) I(\ell, s) \quad (8.18)$$

$$= \frac{Z_c(s)}{Z_o(s)} \left( V^+(s)e^{-\gamma(s)\ell} - V^-(s)e^{+\gamma(s)\ell} \right) \quad (8.19)$$

et

$$V(\ell, s) = V^+(s)e^{-\gamma(s)\ell} + V^-(s)e^{+\gamma(s)\ell} . \quad (8.20)$$

L'égalité des deux dernières expressions apportent la seconde équation nécessaire pour résoudre le système :

$$V^-(s) = V^+(s) \underbrace{\frac{Z_c(s) - Z_o(s)}{Z_c(s) + Z_o(s)}}_{\text{coef. réflexion}} \underbrace{e^{-2\gamma(s)\ell}}_{\text{aller-retour}} \quad (8.21)$$

où on définit le coefficient de réflexion à la charge  $\Gamma_c(s)$  :

$$\Gamma_c(s) = \frac{Z_c(s) - Z_o(s)}{Z_c(s) + Z_o(s)} . \quad (8.22)$$

### 8.4.3 Développement du transitoire

Maintenant que  $V^+(s)$  et  $V^-(s)$  sont déterminés, il devient possible d'exprimer la tension ou le courant partout sur la ligne pour ce cas particulier. On se sert de (8.16) et (8.21) pour les remplacer dans (8.7) et (8.8) :

$$V(z, s) = V_g(s) \frac{Z_o(s)}{Z_o(s) + Z_g(s)} \frac{1}{1 - \Gamma_g(s)\Gamma_c(s)e^{-2\gamma(s)\ell}} \left( e^{-\gamma(s)z} + \Gamma_c(s)e^{-2\gamma(s)\ell}e^{\gamma(s)z} \right) \quad (8.23)$$

et

$$I(z, s) = V_g(s) \frac{\overset{\downarrow}{1}}{Z_o(s) + Z_g(s)} \frac{1}{1 - \Gamma_g(s)\Gamma_c(s)e^{-2\gamma(s)\ell}} \left( e^{-\gamma(s)z} - \underset{\uparrow}{\Gamma_c(s)}e^{-2\gamma(s)\ell}e^{\gamma(s)z} \right) . \quad (8.24)$$

Le signe négatif devant le second terme à l'intérieur de la parenthèse montre bien que les coefficients de réflexion en courant équivalent ceux en tension mais avec une inversion de 180°.

La transformation inverse de *Laplace* des équations (8.23) et (8.24) permet de connaître les fonctions temporelles de la tension et du courant. Cependant, cette transformation inverse est souvent très difficile même dans un cas simple comme celui-ci. On doit se restreindre à une solution plus particulière encore. L'une d'elle suppose une ligne sans pertes et des impédances  $Z_g(s)$  et  $Z_c(s)$  purement résistives. Ainsi, on a :

- $\mathcal{R} = \mathcal{G} = 0$  donc :

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= s\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}} = s/v_p \\ Z_o(s) &= \sqrt{\mathcal{L}/\mathcal{C}} = Z_o \quad ; \end{aligned}$$

- $Z_g(s) = R_g$  et  $Z_c(s) = R_c$  donc :

$$\begin{aligned} -1 \leq \Gamma_g(s) = \Gamma_g &\leq 1 \\ -1 \leq \Gamma_c(s) = \Gamma_s &\leq 1 \quad . \end{aligned}$$

Pour faciliter davantage la transformation inverse, on développe sous forme sérielle la partie  $1/(1 - \Gamma_g(s)\Gamma_c(s)e^{-2\gamma(s)\ell})$  des expressions. Soit :

$$S(x) = \frac{1}{1-x}; \quad |x| \leq 1$$

alors

$$S(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n; \quad n \rightarrow \infty .$$

De sorte qu'avec  $x = \Gamma_g\Gamma_c e^{-2sl/v_p}$  (ce qui respecte la condition de validité car  $|\Gamma_g||\Gamma_c| < 1$  selon leurs limites<sup>2</sup>), on peut écrire :

$$\begin{aligned} V(z, s) &= V_g(s) \frac{Z_o}{Z_o + R_g} \underbrace{\left(1 + \Gamma_c\Gamma_g e^{-2sl/v_p} + \Gamma_c^2\Gamma_g^2 e^{-4sl/v_p} + \dots\right)}_{\text{expansion}} \left(e^{-sz/v_p} + \Gamma_c e^{-2sl/v_p} e^{sz/v_p}\right) \\ &= V_g(s) \frac{Z_o}{Z_o + R_g} \left( \overbrace{e^{-sz/v_p}}^{V^+(s)} + \overbrace{\Gamma_c e^{-s(2\ell-z)/v_p}}^{V^-(s)} + \overbrace{\Gamma_g\Gamma_c e^{-s(2\ell+z)/v_p}}^{V^{++}(s)} \right. \\ &\quad \left. + \overbrace{\Gamma_c\Gamma_g\Gamma_c e^{-s(4\ell-z)/v_p}}^{V^{--}(s)} + \overbrace{\Gamma_g\Gamma_c\Gamma_g\Gamma_c e^{-s(4\ell+z)/v_p}}^{V^{+++}(s)} + \dots \right) \quad (8.25) \end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} I(z, s) &= V_g(s) \frac{\downarrow 1}{Z_o + R_g} \left( \overbrace{e^{-sz/v_p}}^{I^+(s)} - \overbrace{\Gamma_c e^{-s(2\ell-z)/v_p}}^{I^-(s)} + \overbrace{\Gamma_g\Gamma_c e^{-s(2\ell+z)/v_p}}^{I^{++}(s)} \right. \\ &\quad \left. - \overbrace{\Gamma_c\Gamma_g\Gamma_c e^{-s(4\ell-z)/v_p}}^{I^{--}(s)} + \overbrace{\Gamma_g\Gamma_c\Gamma_g\Gamma_c e^{-s(4\ell+z)/v_p}}^{I^{+++}(s)} + \dots \right) \quad (8.26) \end{aligned}$$

Le résultat s'avère très intéressant : la tension (ou le courant) le long d'une ligne pendant le régime transitoire est constituée d'une somme de contributions où chaque contribution est une copie du signal émis par la source :

- décalée dans le temps d'un retard correspondant à la longueur du trajet parcouru jusque là;
- atténuée par un facteur relié au nombre de réflexions à la charge et à la source;
- la première contribution  $V^+$  ou  $I^+$ , démarre de la source car c'est à cet endroit que se produit le changement à  $t = 0$ .

<sup>2</sup>Si les deux coefficients sont simultanément égaux à  $\pm 1$  – court-circuit ou circuit-ouvert aux extrémités –, le système oscille continuellement car aucune puissance n'est dissipée.

Par exemple, dans le cas d'une source produisant un échelon de tension  $V_g(s) = \mathcal{L}\{v_g(t)u(t)\}$ , la transformée inverse de (8.25) pour la tension – il en va de même pour le courant en faisant attention aux signes cependant – donne :

$$v(z, t) = \frac{Z_o}{Z_o + R_g} \left( v_g(t - z/v_p)u(t - z/v_p) + \Gamma_c v_g(t - (2\ell - z)/v_p)u(t - (2\ell - z)/v_p) + \Gamma_g \Gamma_c v_g(t - (2\ell + z)/v_p)u(t - (2\ell + z)/v_p) + \dots \right). \quad (8.27)$$

Si la source produit une impulsion, alors la réponse impulsionnelle est obtenue. Il suffit de remplacer les fonctions  $v_g(t - t_k)u(t - t_k)$  de la réponse ci-dessus (8.27), par les fonctions impulsion  $\delta(t - t_k)$ . **Une fois la réponse impulsionnelle connue, il suffit de la convoluer avec la forme produite par la source pour trouver la réponse à une source quelconque.**

### 8.4.4 Approche raisonnée

On aurait pu entreprendre l'étude du transitoire par une approche faisant appel davantage au raisonnement physique. C'est l'approche raisonnée, un peu comme l'analyse par inspection.

À  $t = 0$ , une onde de départ positive  $v^o = v^+$  quitte la source à  $z = 0$ . Cette tension devrait correspondre à celle de la source diminuée toutefois par la chute de potentiel provoquée par le courant de départ  $i^o = i^+$  traversant l'impédance interne. Évidemment, la charge à l'autre bout n'est pas "visible" de la source et ne peut être évaluée. L'onde "voit" uniquement l'entrée de la ligne de transmission<sup>3</sup> de sorte que les signaux s'ajustent de manière à avoir  $v^+/i^+ = Z_o$ . On remplace donc localement la ligne par son impédance caractéristique  $Z_o$ . La tension aux bornes de  $Z_o$  et le courant qui la traverse correspondent aux signaux de départ :

$$V^+(s) = V_g(s) - R_g I^+(s) = V_g(s) - R_g \frac{V^+(s)}{Z_o} \quad (8.28)$$

$$V^+(s) = \frac{Z_o}{Z_o + R_g} V_g(s). \quad (8.29)$$

Les signaux de départ se déplacent sur la ligne avec une vitesse  $v_p$ . Ils atteignent la charge au temps  $T = \ell/v_p$ . Arrivés là, les signaux respectent la loi d'Ohm<sup>4</sup> avec  $Z_o$  mais non celle avec  $R_c$ . La charge  $R_c$  absorbe une partie de la puissance mais retourne des signaux réfléchis que l'on détermine de manière à respecter la condition aux limites :

$$V^+(s) + V^-(s) = R_c \left( I^+(s) + I^-(s) \right) = R_c \left( \frac{V^+(s)}{Z_o} - \frac{V^-(s)}{Z_o} \right) \quad (8.30)$$

$$V^-(s) = \underbrace{\frac{R_c - Z_o}{R_c + Z_o}}_{\Gamma_c} V^+(s). \quad (8.31)$$

<sup>3</sup>La causalité implique que la valeur de la charge à l'autre bout de la ligne ne peut pas influencer la valeur du signal à  $v^+$ . Le  $v^+$  s'ajustera donc à la ligne uniquement.

<sup>4</sup>La loi d'Ohm remplace la condition aux limites avec des éléments de circuit.

Les signaux réfléchis retournent au temps  $t = T$  toujours à la vitesse  $v_p$  vers la source, donc dans la direction  $z-$ . Ils arrivent à la source au temps  $t = 2T$ . À la source, les conditions aux limites étaient déjà pleinement satisfaites par les signaux de départ seuls. Ces signaux réfléchis qui obéissent à  $v^-/i^- = -Z_o$  violent la loi d'*Ohm*. La résistance interne absorbe une partie de leur puissance et l'autre partie sera réfléchi de nouveau dans la direction  $z+$  via les signaux  $v^{++}$  et  $i^{++}$ .

Le processus se perpétue à l'infini mais avec des réflexions de moins en moins puissantes. On prétend que le régime permanent est atteint lorsque les variations deviennent plus fines qu'une certaine valeur.

### Exemple 8.2

Soit une ligne de transmission d'une longueur de 50 m, d'impédance caractéristique  $50\Omega$ , sur laquelle la vitesse de propagation vaut 66% (sous-entendu, de la vitesse de la lumière dans le vide). Une charge de  $550\Omega$  termine cette ligne. La source de tension à l'entrée vaut  $10u(t)$  V avec une impédance interne de  $20\Omega$ .

► Déterminez la valeur de la tension et du courant aux positions et temps indiqués ci-dessous :

- 35 m,  $0.1\mu s$  ;
- 35 m,  $0.4\mu s$  ;
- 1 m,  $0.5\mu s$ .
- 0 m,  $0.5\mu s$ .

Il s'agit ici d'une réponse à un échelon de tension.

On calcule d'abord les coefficients de réflexion aux deux extrémités selon (8.17) et (8.22) :

$$\begin{aligned}\Gamma_g &= \frac{20 - 50}{20 + 50} = -\frac{3}{7} = -0.429 \\ \Gamma_c &= \frac{550 - 50}{550 + 50} = \frac{5}{6} = 0.833.\end{aligned}$$

On peut utiliser directement (8.27) pour la tension, pour chacune des quatre demandes. On doit vérifier si la primitive de la fonction  $u(\cdot)$  est positive, nulle ( $u(\cdot \geq 0) = 1$ ) ou négative ( $u(\cdot < 0) = 0$ ). On obtient :

$$\begin{aligned}v(35 \text{ m}, 0.1\mu s) &= 10 \frac{50}{50 + 20} \left( \underbrace{u\left(0.1\mu - \frac{35}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{-0.075\mu \\ 0}} + 0.833 \underbrace{u\left(0.1\mu - \frac{100 - 35}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{-0.225\mu \\ 0}} + \dots \right) \\ &= 0V;\end{aligned}$$

$$v(35 \text{ m}, 0.4\mu\text{s}) = 10 \frac{50}{50 + 20} \left( \underbrace{u\left(0.4\mu - \frac{35}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{+0.225\mu \\ 1}} + 0.833 \underbrace{u\left(0.4\mu - \frac{100 - 35}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{+0.075\mu \\ 1}} \right. \\ \left. + (0.833)(-0.429) \underbrace{u\left(0.4\mu - \frac{100 + 35}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{-0.275\mu \\ 0}} + \dots \right)$$

$$= 7.143 (1 + 0.833) = 13.095 \text{ V};$$

$$v(1 \text{ m}, 0.5\mu\text{s}) = 10 \frac{50}{50 + 20} \left( \underbrace{u\left(0.5\mu - \frac{1}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{+0.495\mu \\ 1}} + 0.833 \underbrace{u\left(0.5\mu - \frac{100 - 1}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{+0.005\mu \\ 1}} \right. \\ \left. + (0.833)(-0.429) \underbrace{u\left(0.5\mu - \frac{100 + 1}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{-0.005\mu \\ 0}} \right. \\ \left. + (0.833)(-0.429)(0.833) \underbrace{u\left(0.5\mu - \frac{200 - 1}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{-0.495\mu \\ 0}} + \dots \right)$$

$$= 7.143 (1 + 0.833) = 13.095 \text{ V};$$

$$v(0 \text{ m}, 0.5\mu\text{s}) = 10 \frac{50}{50 + 20} \left( \underbrace{u\left(0.5\mu - \frac{0}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{+0.5\mu \\ 1}} + 0.833 \underbrace{u\left(0.5\mu - \frac{100 - 0}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{0 \\ 1}} \right. \\ \left. + (0.833)(-0.429) \underbrace{u\left(0.5\mu - \frac{100 + 0}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{0 \\ 1}} \right. \\ \left. + (0.833)(-0.429)(0.833) \underbrace{u\left(0.5\mu - \frac{200 - 0}{2 \times 10^8}\right)}_{\substack{-0.5\mu \\ 0}} + \dots \right)$$

$$= 7.143 (1 + 0.833 - 0.357) = 10.544 \text{ V} .$$

Pour le courant, il faut reprendre mais en changeant le signe des coefficients de réflexion et en divisant par  $Z_o$ . Ce qui donne :

$$i(35 \text{ m}, 0.1\mu\text{s}) = 0 \text{ A};$$

$$i(35 \text{ m}, 0.4\mu\text{s}) = 10 \frac{1}{50 + 20} \left( \underbrace{u(+0.225\mu)}_1 + (-0.833) \underbrace{u(+0.075\mu)}_1 \right)$$

$$= 0.143 (1 - 0.833) = 23.81 \text{ mA};$$

$$\begin{aligned}
i(1\text{ m}, 0.5\mu\text{s}) &= 10 \frac{1}{50 + 20} \left( \underbrace{u(+0.495\mu)}_1 + (-0.833) \underbrace{u(+0.005\mu)}_1 \right) \\
&\quad + (-0.833)(+0.429) \underbrace{u(-0.005\mu)}_1 \\
&= 0.143 (1 - 0.833) = 23.81\text{ mA} \\
i(0\text{ m}, 0.5\mu\text{s}) &= 10 \frac{1}{50 + 20} \left( \underbrace{u(+0.5\mu)}_1 + (-0.833) \underbrace{u(0)}_1 + (-0.833)(+0.429) \underbrace{u(0)}_1 \right) \\
&= 0.143 (1 - 0.833 - 0.357) = -27.21\text{ mA} .
\end{aligned}$$

On peut expliquer chacun des résultats. Initialement, l'onde de départ n'est pas encore arrivée. À la seconde, l'onde de départ est passée et la réflexion aussi. Même chose à la troisième car l'onde réfléchi par la charge  $v^-$  arrive tout juste à la source ( $t = 2T = 0.5\mu\text{s}$ ) et  $v^{++}$  commence à peine à quitter la source pour se rendre à la charge, ce que l'on voit dans la dernière demande.

On observe aussi que la tension sur la ligne peut dépasser la valeur de la source et le courant devenir négatif!

#### 8.4.5 Signaux en régime permanent avec source $u(t)$

Au fur et à mesure que le temps progresse, l'amplitude des signaux réfléchis (la tension ou le courant) décroissent<sup>5</sup> de sorte que la somme des contributions converge vers une certaine valeur laquelle est celle du régime permanent soit  $v_{ss}$  pour la tension et  $i_{ss}$  pour le courant. Évidemment, à l'équilibre, on devrait tendre comme valeurs finales vers quelque chose du genre :  $v_{ss} = v(z, \infty) = v_o \frac{R_c}{R_c + R_g}$  et  $i_{ss} = i(z, \infty) = v_o \frac{1}{R_c + R_g}$ , la ligne n'ayant plus d'effet.

Il s'avère que les solutions aux équations d'onde (8.7) et (8.8) font état de deux ondes, l'une positive et l'autre négative. On devrait retrouver ces deux ondes en état permanent aussi, que l'on note  $v_{ss}^+$  ( $i_{ss}^+$ ) et  $v_{ss}^-$  ( $i_{ss}^-$ ). On démontre que l'onde positive finale est constituée de toutes les contributions positives car elles sont toutes présentes au temps  $t \rightarrow \infty$ . Il en va de même pour l'onde négative. Donc :

$$v_{ss} = v_{ss}^+ + v_{ss}^- \quad (8.32)$$

$$i_{ss} = i_{ss}^+ + i_{ss}^- = \frac{1}{Z_o} (v_{ss}^+ - v_{ss}^-) \quad (8.33)$$

avec

$$v_{ss}^+ = v^+ + v^{++} + v^{+++} \dots \quad (8.34)$$

$$v_{ss}^- = v^- + v^{--} + v^{---} \dots \quad (8.35)$$

<sup>5</sup>Le cas extrême est celui où  $|\Gamma_g| = |\Gamma_c| = 1$  mais de signe opposé. Le système se comporte comme un oscillateur.

Tout cela est lié à la propriété de linéarité de l'opérateur  $\mathcal{L}\{\cdot\}$ .

**Exemple 8.3**

- Trouvez la valeur des ondes positive et négative en tension et en courant, qui forment le régime permanent du système de l'exemple précédent 8.2.

Les deux équations (8.32) et (8.33) suffisent. Pour déterminer  $v_{ss}$  et  $i_{ss}$ , on procède comme en circuit, i.e. sans tenir compte de la ligne.

$$v_{ss} = 10 \frac{550}{550 + 20} = 9.649 V$$

$$i_{ss} = \frac{10}{550 + 20} = 17.54 mA .$$

Donc :

$$9.649 = v_{ss}^+ + v_{ss}^-$$

$$Z_o i_{ss} = (50)(17.54 \times 10^{-3}) = 0.877 = v_{ss}^+ - v_{ss}^-$$

et en additionnant les membres du même coté des égalités, on trouve  $v_{ss}^+$  :

$$10.526 = 2v_{ss}^+$$

$$v_{ss}^+ = 5.263 V .$$

On peut maintenant récupérer l'autre inconnue en tension :

$$v_{ss}^- = 9.649 - v_{ss}^+ = 4.386 V$$

puis ceux en courant :

$$i_{ss}^+ = \frac{v_{ss}^+}{Z_o} = \frac{5.263}{50} = 105.26 mA$$

$$i_{ss}^- = -\frac{v_{ss}^-}{Z_o} = -87.72 mA .$$

Une petite vérification rapide peut être faite avec les quatre premiers termes de la série de  $v_{ss}^+$  à partir du résultat de l'exemple 8.2 :

$$v_{ss}^+ \approx (7.143)(1) + (7.143)(-0.357) + (7.143)(0.128) + (7.143)(-0.046) = 5.178 V$$

## 8.5 Diagramme en Z

Il n'est pas très commode de refaire l'ensemble du développement pour chaque système ; même pour un système simple, il a fallu bien s'attabler. Une chance, l'approche raisonnée entourant le transitoire du système simple de la section précédente suggère l'utilisation d'une méthode graphique : le diagramme en Z, aussi appelé de réflexions multiples.

Il s'agit en fait du lieu géométrique de la relation spatio-temporelle d'une impulsion  $\delta(t - z/v_p)$  en tension ou en courant qui va et vient sur la ligne de transmission en se réfléchissant. Le diagramme en Z permet donc d'obtenir la réponse impulsionnelle relativement facilement. Ce graphique possède deux axes de coordonnées :

- la variable  $z$  est portée en abscisse et va de 0 à  $\ell$  ;
- la variable  $t$  est mise en ordonnée en prenant soin de subdiviser l'axe en multiples de  $T = \ell/v_p$ .

Comme l'impulsion se déplace sur une ligne sans perte et uniforme à une vitesse constante  $v_p$ , le lieu géométrique consiste en une série de lignes droites en zigzag de pente  $\pm 1/v_p$  selon que l'impulsion se déplace vers la charge ou vers la source. Une autre interprétation possible du lieu est celui qui marque la limite de la contribution d'un signal au transitoire, car sur les lignes on a  $t - z/v_p = 0$  exactement. On inscrit sur chaque ligne droite l'amplitude de la tension ou du courant donné par le terme de l'équation (8.25) ou (8.27) qui correspond à cette droite.

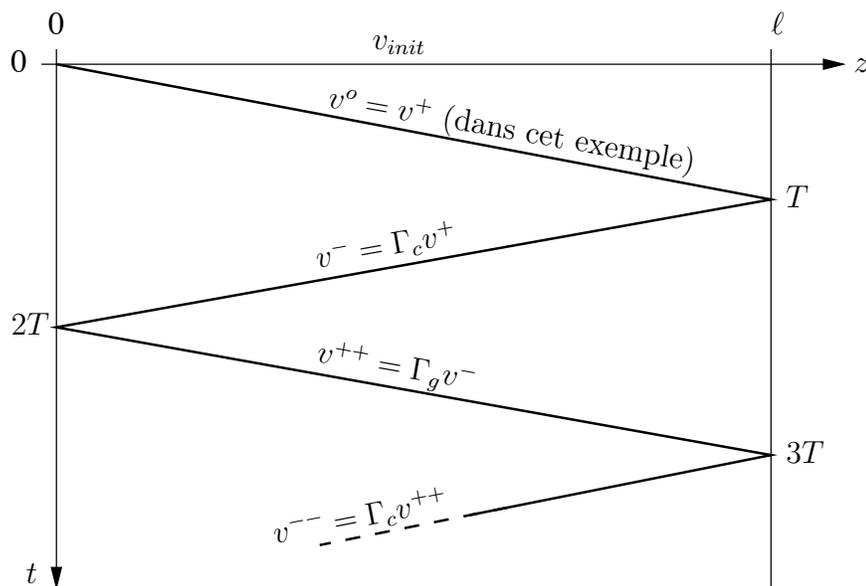


FIGURE 8.7 – Diagramme en Z typique du système simple.

La figure 8.7 montre le diagramme en Z obtenu lorsque l'onde de départ  $v^o = v^+$  ou  $i^o = i^+$  démarre à la source avec une ligne au repos, i.e. avec conditions initiales nulles.

### 8.5.1 Lecture du diagramme

À regarder les expressions, on remarque qu'il y a deux variables à considérer, lesquelles sont reliées par la relation spatio-temporelle. Les informations tirées d'un diagramme en Z offrent donc deux possibilités :

- le tracé de l'évolution de la tension ou du courant dans le temps en un endroit précis sur la ligne ;

$$v(t), i(t) \text{ pour } z = z_0$$

- le tracé de la distribution de la tension ou du courant le long de la ligne en un temps précis.

$$v(z), i(z) \text{ à } t = t_0$$

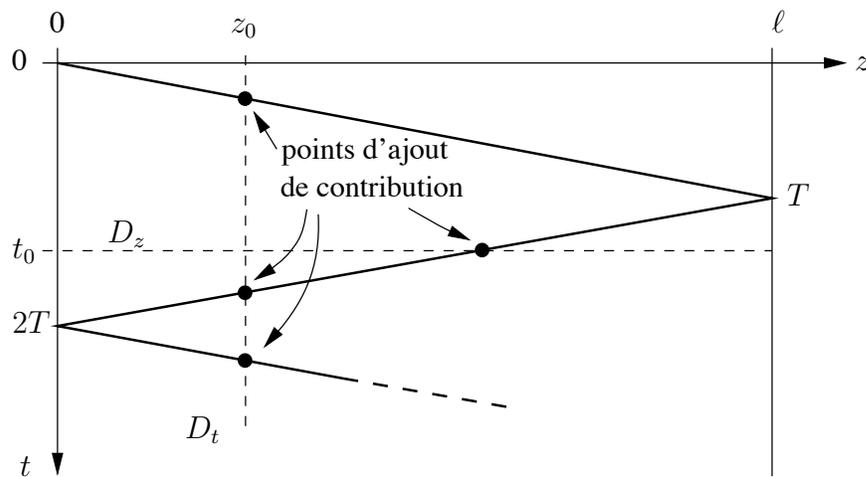


FIGURE 8.8 – Lecture d'un diagramme en Z typique en suivant la ligne en traits pointillés.

L'évolution de la tension ou du courant dans le temps se réalise en traçant une droite verticale suivant l'axe du temps à  $z = z_0$  ( $D_t$  sur la figure 8.8). La distribution de la tension ou du courant le long de la ligne demande plutôt de tracer une droite horizontale parallèle à l'axe de la position à  $t = t_0$  ( $D_z$  sur la figure 8.8). Chaque point d'intersection entre la droite  $D_{t,z}$  et les droites du diagramme en Z correspondent à l'addition d'une contribution effective. Il se produira donc un changement dans l'évolution ou dans la distribution à l'instant ou à l'endroit de cette intersection.

Cette contribution qui s'ajoute prend la forme de celle de la source. Il faut ensuite se poser la question : quel est le genre de source ? impulsion ou échelon (les deux genres considérés ici) ou autre.

**Pour une source impulsion** la lecture du diagramme en Z se limite simplement à savoir qu'à chaque point d'intersection apparaît une nouvelle impulsion dont la hauteur vaut la valeur de la contribution.

L'évolution ou la distribution montrera une impulsion à cet instant ou cet endroit respectivement.

Pour une source échelon la lecture exige de comprendre les faits suivants :

- l'aire en dessous d'une droite inclut tous les lieux où l'action produite par la composante représentée par cette droite prend effet ( $u(t - t_z) = 1$  car  $(t - t_z) \geq 0$ );
- l'action ne s'est pas encore produite pour les lieux au dessus ( $u(t - t_z) = 0$  car  $(t - t_z) < 0$ ).

Ainsi l'ajout d'une contribution correspond à superposer un nouvel échelon à l'instant ou l'endroit selon le cas de l'intersection.

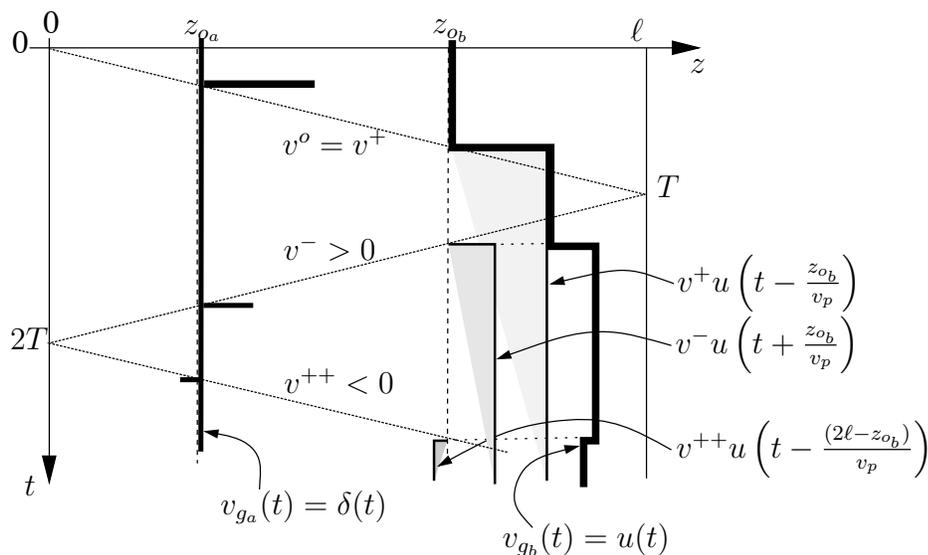


FIGURE 8.9 – Lecture de l'évolution d'un diagramme en Z typique selon le genre de source : impulsion en  $z_{0a}$ , échelon en  $z_{0b}$ .

La figure 8.9 illustre très bien le principe. Il s'agit ici d'une évolution en tension typique

- observée en  $z_{0a}$  en supposant que la source est une impulsion  $v_{g_a}(t) = \delta(t)$  ;
- observée en  $z_{0b}$  en supposant que la source est un échelon  $v_{g_b}(t) = u(t)$ .

On note qu'avec la réponse à l'impulsion, la sortie du système pour toute forme de signal d'entrée est retrouvée par convolution. Cela est d'ailleurs apparent à la figure 8.9 où la réponse à l'échelon peut être vue comme la convolution entre la réponse impulsionnelle et l'échelon.

Le tracé de l'évolution en tension se voit en penchant la tête vers la droite comme ceci (⊙) et en observant le trait plein en double épaisseur par rapport à la droite  $D_{z_a,b}$ . Il est évident que la superposition d'impulsions à des temps différents correspond à dessiner une série d'impulsions de hauteur différente alors que le comportement est autrement différent avec des échelons. En effet, un échelon  $u(t - t_1)$  reste à 1 à partir de  $t_1$  et ce pour l'éternité et chevauchera donc un autre échelon  $u(t - t_2)$   $t_2 > t_1$  à partir de  $t_2$  de sorte que les deux contributions s'additionnent.

**Exemple 8.4**

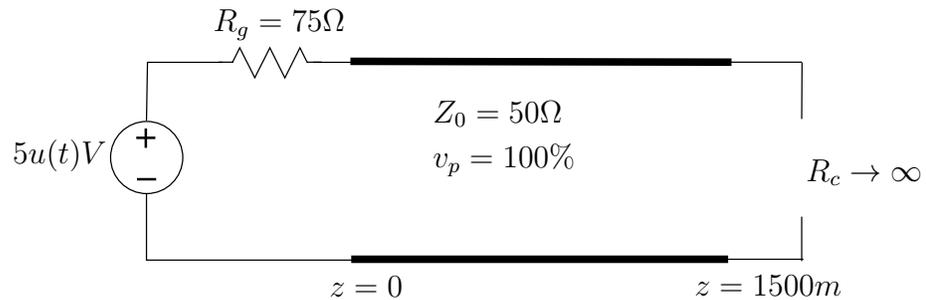


FIGURE 8.10 – Schéma du système de transmission pour une réponse à l'échelon.

On considère une ligne sans perte de longueur  $1500\text{ m}$  ayant une impédance caractéristique de  $50\Omega$  et une vitesse de propagation égale à  $100\%$  ( $3 \times 10^8\text{ m/s}$ ). On branche une source tension produisant un échelon  $v_g(t) = 5u(t)\text{ V}$  à l'une des extrémités de la ligne. La résistance interne de la source est de  $75\Omega$ . On laisse l'autre extrémité ouverte comme sur la figure 8.10.

- Dans un premier temps, tracez l'évolution de la tension et du courant à  $900\text{ m}$  de la source, jusqu'à  $16\mu\text{s}$ .

Les conditions initiales et les coefficients sont d'abord déterminés.

$$\begin{aligned}
 v_{init} &= i_{init} = 0 \\
 \Gamma_g &= \frac{75 - 50}{75 + 50} = 0.2 \\
 \Gamma_c &= \frac{\infty - 50}{\infty + 50} = 1.0 \\
 T &= \frac{1500}{3 \times 10^8} = 5\mu\text{s}
 \end{aligned}$$

La tension de l'onde de départ (qui débute du côté de la source avec l'interrupteur, là où se produit le changement) vaut :

$$v^o = v^+ = 5V \cdot 50 / (50 + 75) = 2V .$$

Le diagramme en Z de cet exemple est reproduit à la figure 8.11. La tension et le courant de chacune des réflexions sont indiqués. Les droites en traits pointillés indiquent les lieux d'observation pour les deux items de la question.

Il faut choisir le lieu d'observation correspondant à la droite verticale  $D_t$  passant par  $z = 900\text{ m}$ . Les contributions s'ajoutent aux temps  $3\mu\text{s}$ ,  $7\mu\text{s}$  et  $13\mu\text{s}$ . Avant  $3\mu\text{s}$ , la tension et le courant sont nuls, mais à  $3\mu\text{s}$  le signal  $v^+$  ( $i^+$ ) arrive à  $900\text{ m}$ . La tension monte à  $2\text{ V}$  et le courant à  $40\text{ mA}$ . À  $7\mu\text{sec}$ , la réflexion provenant de la charge fait sentir son effet :  $2\text{ V}$  supplémentaire et

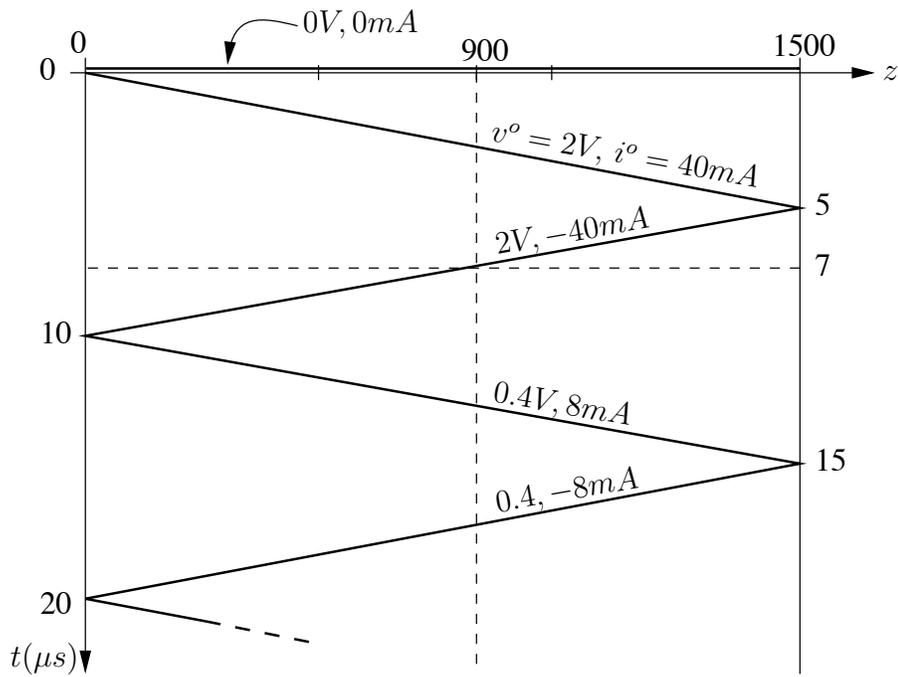


FIGURE 8.11 – Diagramme en Z de la réponse à l'échelon.

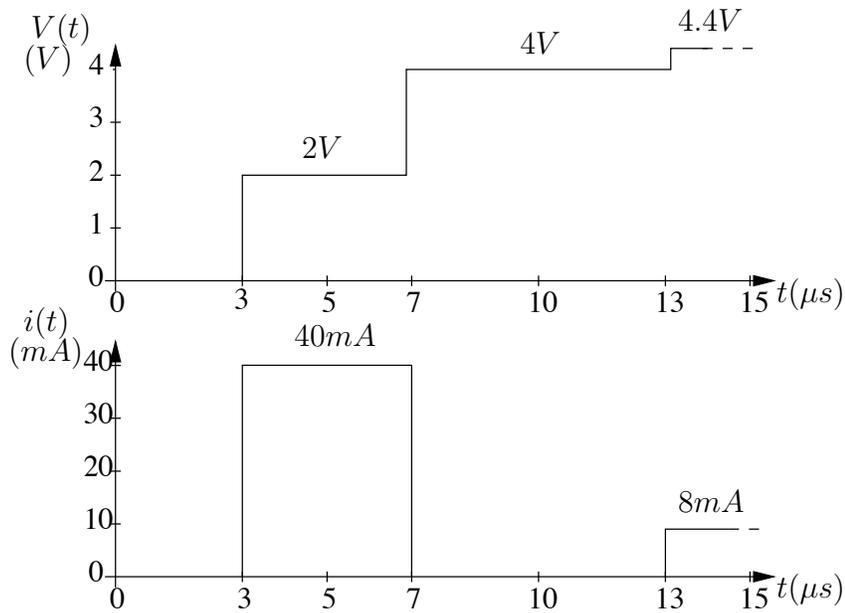


FIGURE 8.12 – Évolution de la tension (a) et du courant (b) à 900 m de la réponse à l'échelon.

un courant qui retourne à  $0\text{ mA}$ . Ce n'est qu'à  $13\mu\text{s}$  que revient la réflexion due à la mésadaptation de la source à la ligne. Ainsi, la tension monte de  $(\Gamma_g)(2) = 0.4\text{V}$ , tandis que le courant remonte temporairement à  $8\text{ mA}$ .

La figure 8.12 trace l'évolution des signaux jusqu'à  $16\mu\text{s}$ .

- Tracez maintenant la distribution de la tension et du courant le long de la ligne à  $t = 7\mu\text{s}$ .

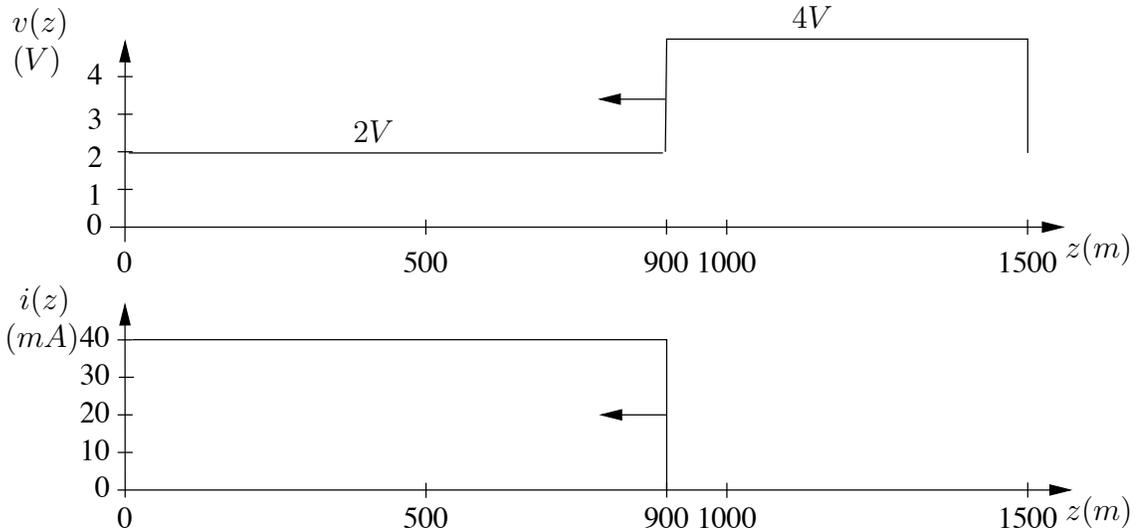


FIGURE 8.13 – Distribution de la tension (a) et du courant (b) à  $7\mu\text{s}$  de la réponse à l'échelon.

On utilise le lieu d'observation  $D_z$  à  $7\mu\text{s}$ . Le point d'addition (ou de soustraction) de contribution est à  $900\text{ m}$ . Avant  $900\text{ m}$ , seul  $v^+$  ( $i^+$ ) agissait. Après, la contribution de  $v^-$  ( $i^-$ ) doit être considérée. Les distributions en tension et en courant sont tracées sur la figure 8.13.

## 8.6 Distribution de l'énergie

Pour une ligne de transmission sans pertes, toute l'énergie fournie à l'entrée doit être emmagasinée et/ou transmise d'après la loi de conservation de l'énergie.

On considère un temps  $t_o < T$ , le temps mis pour parcourir la ligne. La source tension vaut  $V_o u(t)$ . La tension et le courant s'expriment :

$$v(z, t) = V_o \frac{Z_o}{Z_o + R_g} u(t - z/v_p)$$

$$i(z, t) = V_o \frac{1}{Z_o + R_g} u(t - z/v_p)$$

L'énergie fournie par la source après un temps  $t_o < T$  vaut :

$$W_g = V_o \cdot i(0, t) t_o = \frac{V_o^2 t_o}{Z_o + R_g} .$$

En tenant compte des pertes joules provoquées par la résistance interne de la source, on trouve que l'énergie fournie à la ligne devient :

$$W_f = \frac{V_o^2 t_o}{Z_o + R_g} - \frac{V_o^2 t_o R_g}{(Z_o + R_g)^2} = \frac{V_o^2 t_o Z_o}{(Z_o + R_g)^2}.$$

L'énergie emmagasinée d'une part par l'inductance de la ligne après un temps  $t_o < T$ , vaut :

$$W_l = \frac{\mathcal{L}}{2} \int_0^{t_o \cdot v_p} |i(z, 0)|^2 dz = \frac{\mathcal{L}}{2} t_o \cdot v_p \frac{V_o^2}{(Z_o + R_g)^2} = \frac{V_o^2 t_o Z_o}{2(Z_o + R_g)^2}$$

car  $\mathcal{L} = Z_o/v_p$ ; et d'autre part, par la capacité sachant que  $\mathcal{C} = 1/(Z_o v_p)$ , vaut :

$$W_c = \frac{\mathcal{C}}{2} \int_0^{t_o \cdot v_p} |v(z, 0)|^2 dz = \frac{\mathcal{C}}{2} t_o \cdot v_p \frac{V_o^2 Z_o^2}{(Z_o + R_g)^2} = \frac{V_o^2 t_o Z_o}{2(Z_o + R_g)^2}.$$

On vérifie bien que  $W_l + W_c = W_f$  et que la loi de conservation de l'énergie est respectée.

## 8.7 Sources multiples

Le principe de superposition des sources s'applique lorsque :

- le système comporte plusieurs sources ayant des changements à divers temps ;
- le signal d'une source peut être modélisé par une séquence de signaux provenant de plusieurs sources avec diverses amplitudes et divers retards.

Il faut alors prendre chaque source indépendamment :

- mettre à "0" toutes les autres sources ;
- tenir compte des retards de la source par rapport à l'origine ;
- tracer sur le même diagramme en Z celui produit par chacune des sources ;
- sommer les contributions à un temps donné ou à un endroit donné.

On note que les conditions initiales  $v_{init}$  et  $i_{init}$  proviennent des sources activées depuis si longtemps que leur effet est assimilable au régime permanent. On déduit ces conditions en sommant effectivement les contributions de chacune en éteignant les autres ; aucun indice du temps n'est considéré dans ce cas.

L'exemple classique d'un système modélisé par plusieurs sources est celui d'une porte rectangulaire de durée  $T_o$ . Cette fonction porte s'écrit mathématiquement comme :

$$v_g(t) = V_o u(t) - V_o u(t - T_o) \quad (8.36)$$

ce qui démontre bien qu'elle se modélise facilement par un échelon à  $t = 0$  d'amplitude  $V_o$ , suivi par un autre échelon à  $t = T_o$  mais d'amplitude  $-V_o$ , donc comme deux sources tensions en série  $v_{g1}(t) = V_o u(t)$  et  $v_{g2}(t) = -V_o u(t - T_o)$ . On trace alors sur le même

diagramme deux courbes en  $Z$  : chacune correspondant à l'une des sources. La courbe de la source  $v_{g_2}$  démarre au temps  $t = T_o$  et les amplitudes des signaux sont les mêmes que celles de la première source en changeant le signe.

**Exemple 8.5**

Une ligne raccorde une source à une charge. La source génère une porte d'amplitude  $V_o$  de durée  $T_o$  au temps  $t = 0$  alors que la ligne était au repos avec  $v_{init} = i_{init} = 0$ . Les paramètres sont les suivants :

$$\begin{aligned} T_o &= 4T/3 \\ V_o &= 12V \\ R_g &= 150\Omega, R_c = 250\Omega \\ Z_o &= 50\Omega . \end{aligned}$$

- Tracez le diagramme en  $Z$  en tension, l'évolution de la tension à  $2\ell/3$  et la distribution de la tension à  $7T/3$  par un modèle à deux sources "échelon".

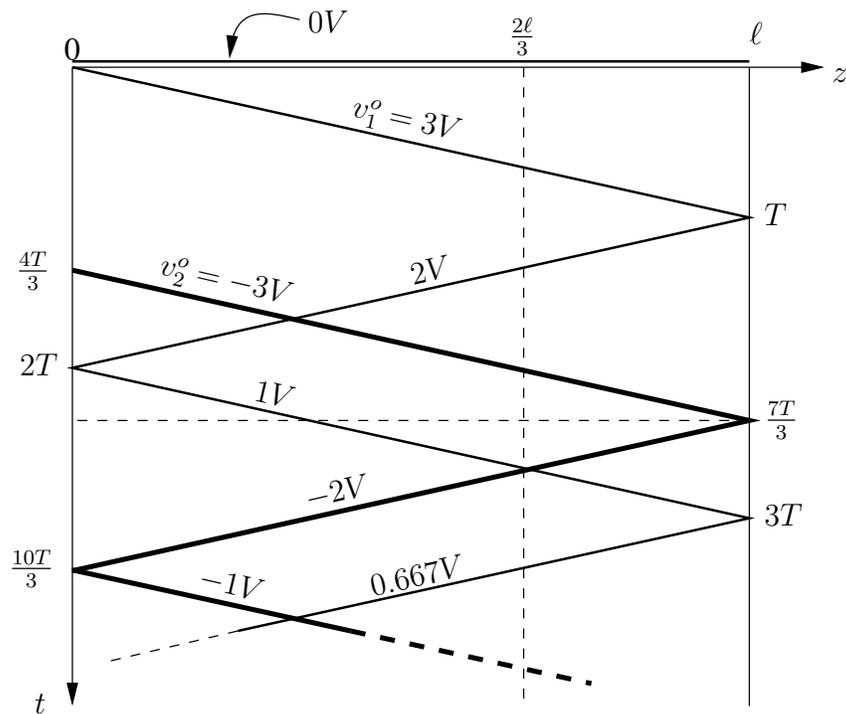


FIGURE 8.14 – Diagramme en  $Z$  de l'exemple avec porte avec un modèle à deux sources "échelon".

On suppose que la porte est produite par deux sources en série comme par l'équation (8.36).

La figure 8.14 illustre le diagramme en  $Z$  qui en résulte. Le transitoire de la source  $v_{g_1}(t)$  est le lieu qui part à  $t = 0, z = 0$ . Le lieu des contributions produites par la source retardée  $v_{g_2}(t)$  est dessiné par un trait plus épais. Cette

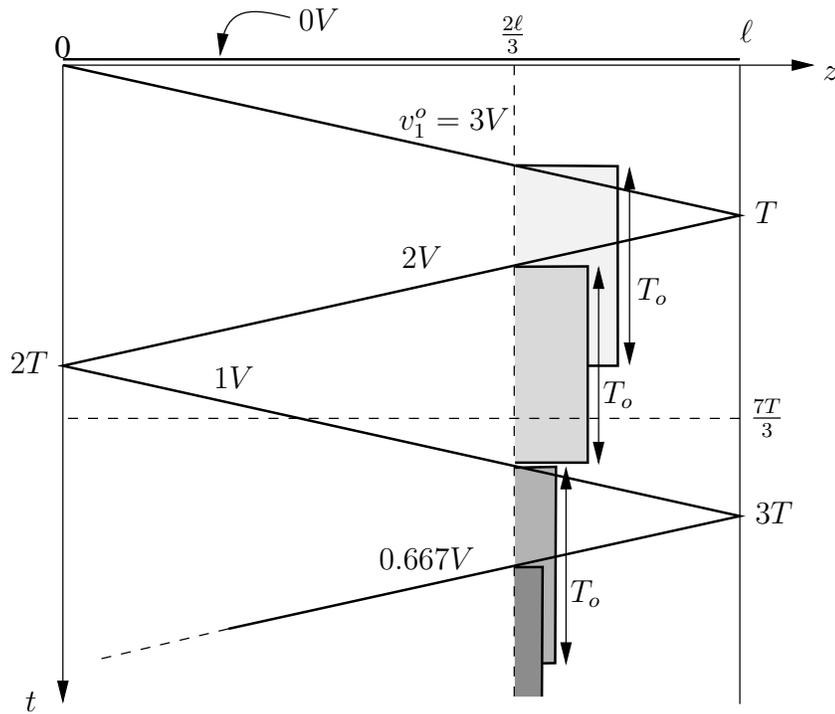


FIGURE 8.15 – Diagramme en Z de l'exemple avec porte équivalent avec un modèle à signaux "porte" pour obtenir l'évolution à  $2\ell/3$ .

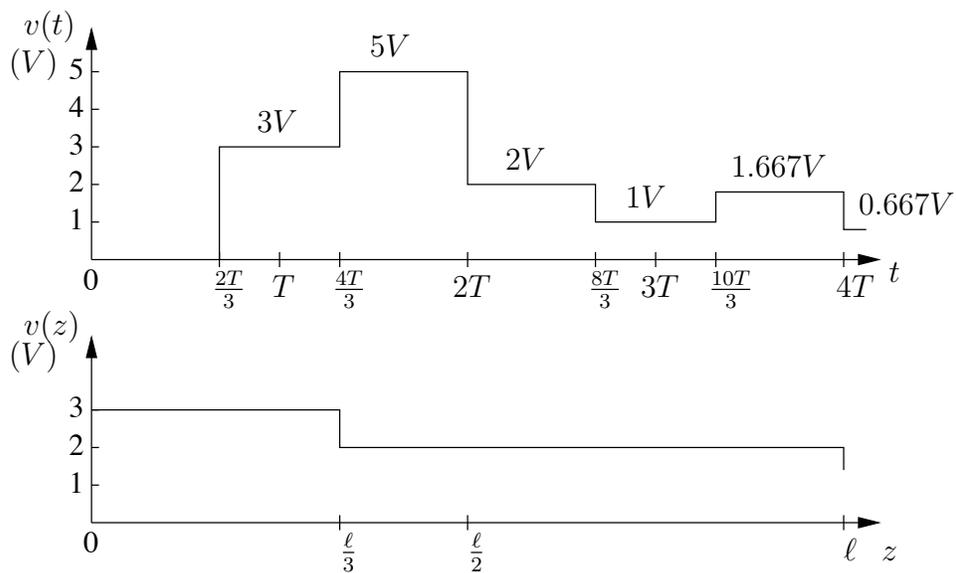


FIGURE 8.16 – Évolution (a) et distribution (b) de la tension de l'exemple avec porte.

façon de procéder à deux sources donne un résultat équivalent en supposant que chaque droite du tracé n'est active que durant la période  $T_o$  comme sur la figure 8.15. On retrouve les tracés de l'évolution de la tension et la distribution de la tension demandés sur la figure 8.16.

## 8.8 Endroit du changement et conditions initiales

Jusqu'à présent, le changement initial provoquant un régime transitoire était localisé au niveau d'une source (donc  $v^o = v^+$ ,  $i^o = i^+$ ). Il est cependant aussi probable que les changements initiaux proviennent du côté de la charge ( $v^o = v^-$ ,  $i^o = i^-$ ) ou ailleurs sur la ligne. Dans ces cas, deux nouvelles conséquences surgissent :

- les signaux de départ en tension  $v^o$  et en courant  $i^o$  démarrent de l'endroit où s'est produit la modification ; ils se propagent dans la ou les lignes en s'éloignant du point de départ à  $t \geq 0$  ;
- les conditions initiales sur la ligne sont souvent non-nulles et doivent être considérées ; comme elles contribuent depuis toujours et continueront d'exister, elles doivent être ajoutées aux signaux du régime transitoire en tout temps et à toute position.

### Exemple 8.6

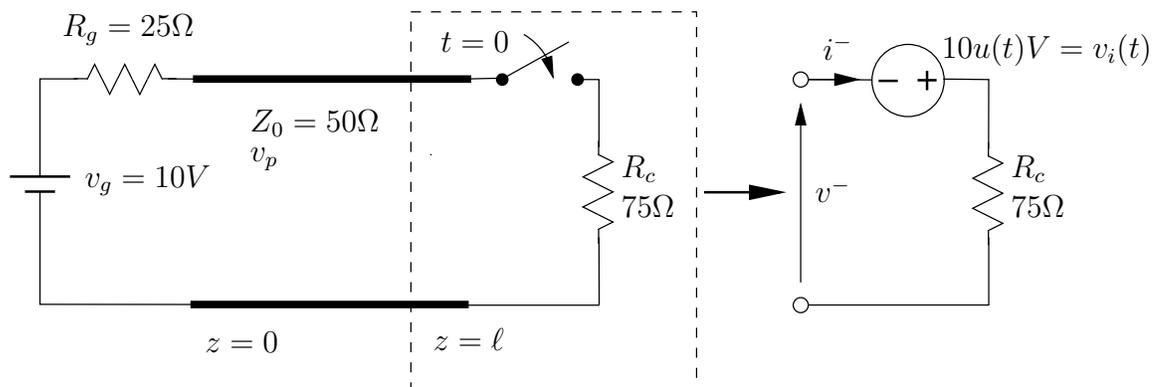


FIGURE 8.17 – Schéma du circuit de transmission avec fermeture de l'interrupteur à la charge et circuit équivalent.

Le système de transmission de la figure 8.17 est en régime permanent puisque la source de 10 V avec une impédance interne de 25Ω est connectée à la ligne de 50Ω depuis fort longtemps. Au temps  $t = 0$ , l'interrupteur en série avec une charge de 75Ω est fermé.

- Tracez l'évolution de la tension entre 0 et  $4T$  en plein milieu de la ligne, et la distribution de la tension le long de la ligne au temps  $t = 1.5T$ .

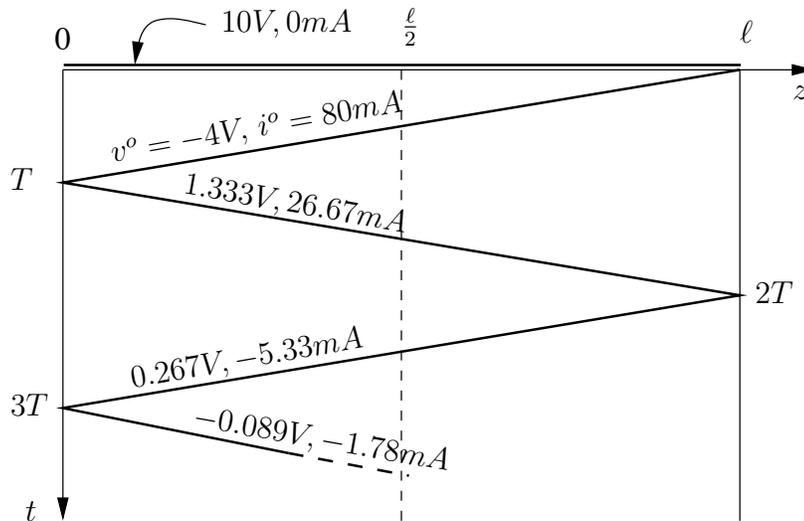


FIGURE 8.18 – Diagramme en Z de l'exemple avec fermeture de l'interrupteur à la charge.

L'effet de l'interrupteur est assimilable à une source tension de  $v_i = 10u(t)V$  ( $-+$ ) en série avec la charge comme à la figure 8.17. La source tension  $v_g(t)$  prise seule crée les conditions initiales à savoir :

$$\begin{aligned} v_{init} &= 10V \\ i_{init} &= 0A . \end{aligned}$$

Ces conditions initiales sont indiquées sur le diagramme en Z par une droite supplémentaire complètement horizontale à  $t = 0$ . L'effet de la source tension  $v_i(t)$  est de fournir de  $z = \ell$ , un signal de départ  $v^o$  et  $i^o$  (attention aux conventions de signe pour la tension et le courant) :

$$\begin{aligned} v^o = v^- &= -v_i \frac{Z_o}{Z_o + R_c} = -10 \frac{50}{50 + 75} = -4V \\ i^o = i^- &= \frac{v_i}{Z_o + R_c} = 80mA . \end{aligned}$$

L'indice  $-$  est utilisé pour le signal de départ car il se déplace selon l'axe  $z-$ . Le diagramme en Z obtenu est reproduit sur la figure 8.18 tandis que l'évolution de la tension à  $\ell/2$  et la distribution de la tension à  $3T/2$ , sur la figure 8.19.

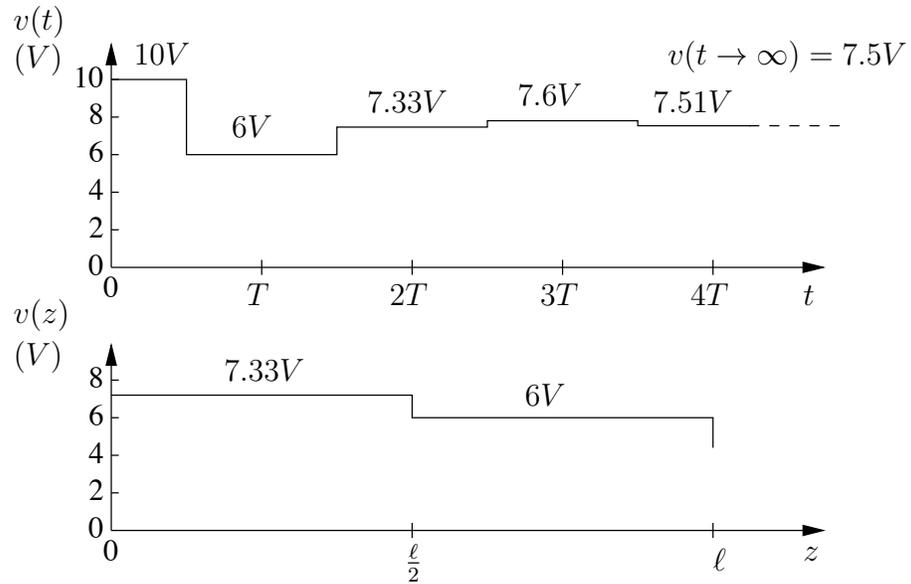


FIGURE 8.19 – Évolution (a) et distribution (b) de la tension avec fermeture de l'interrupteur à la charge.

**Exemple 8.7**

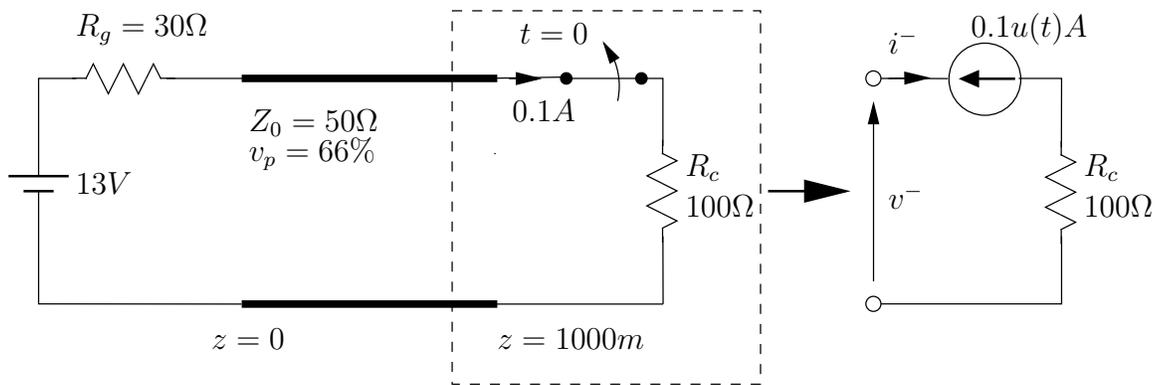


FIGURE 8.20 – Schéma du circuit de transmission avec ouverture de l'interrupteur à la charge et circuit équivalent.

Soit le système de transmission de la figure 8.20 dont la ligne a une impédance caractéristique de  $50\Omega$  et une vitesse de propagation de  $66\%$ . Depuis un temps suffisant pour qu'un régime permanent soit établi, une source tension continue de  $13\text{ V}$  avec une impédance interne de  $30\Omega$  est branchée à la ligne ; à l'autre bout, une charge de  $100\Omega$ . Au temps  $t = 0$ , on retire la charge.

- Tracez le diagramme en  $Z$  complet entre  $0$  et  $3T$  avec axes en  $m$  et  $\mu s$ .

On calcule les paramètres utiles, coefficients de réflexion et conditions initiales. On n'oublie pas que la charge est un circuit ouvert pour  $t > 0$  car l'interrupteur

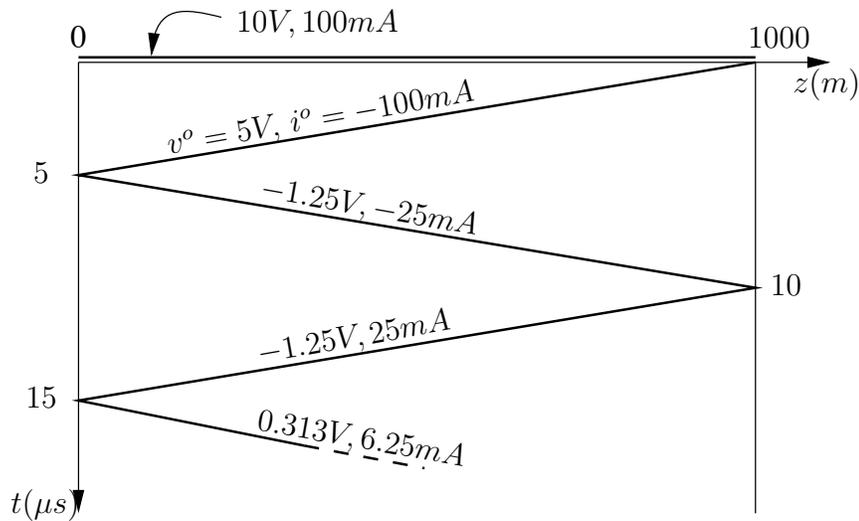


FIGURE 8.21 – Diagramme en Z de l'exemple avec ouverture de l'interrupteur à la charge.

est ouvert. Donc :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\ell}{v_p} = \frac{1000}{2 \times 10^8} = 5 \mu s \\
 \Gamma_g &= \frac{30 - 50}{30 + 50} = -0.25 \\
 \Gamma_c &= \frac{\infty - 50}{\infty + 50} = 1 \\
 v_{init} &= 13 \frac{100}{100 + 30} = 10 V \\
 i_{init} &= \frac{13}{100 + 30} = 100 mA .
 \end{aligned}$$

On analyse maintenant l'effet de la fermeture de l'interrupteur. Avant sa fermeture, un courant de 100 mA passait par l'interrupteur ; après, aucun courant. On assimile alors l'interrupteur à une source courant de  $i_i(t) = 100u(t)$  mA ( $\leftarrow$ ) qui annule le courant après  $t = 0$ . Ceci permet de déterminer les signaux de départ  $v^o$  et  $i^o$  :

$$\begin{aligned}
 v^o = v^- &= Z_o i_i = (50)(0.1) = 5 V \\
 i^o = i^- &= -i_i = -\frac{v^-}{Z_o} = -100 mA .
 \end{aligned}$$

Le diagramme en Z résultant est dessiné à la figure 8.21.

### 8.9 Point de jonction sur ligne

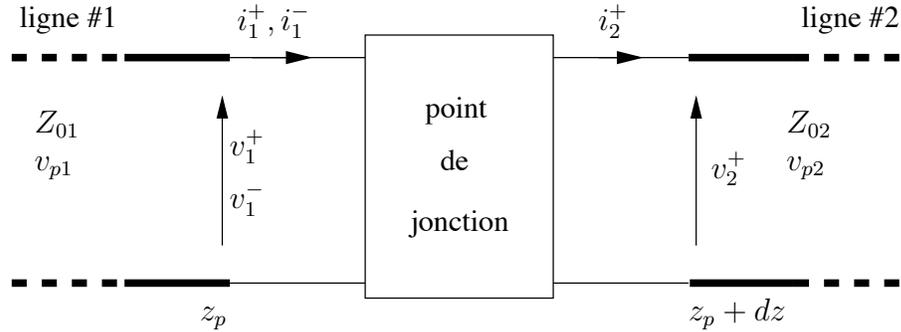


FIGURE 8.22 – Quadripôle représentant un point de jonction entre deux lignes de transmission.

Un point de jonction (ou jonction) est une discontinuité localisée – ou du moins très petite devant la longueur d’onde – à un endroit précis sur la ligne de transmission. Cette discontinuité peut être schématisée par un quadripôle ayant  $v_1^+$ ,  $v_1^-$ ,  $i_1^+$  et  $i_1^-$  à l’entrée et  $v_2^+$  et  $i_2^+$  à la sortie. On peut aussi considérer que le point de jonction fait le pont entre deux lignes de transmission. Le tout est reproduit sur la figure 8.22

Évidemment, ce point de jonction crée une réflexion du signal mais aussi une transmission du signal. Cette réflexion et cette transmission peuvent dépendre de quel côté arrive le signal, si les milieux de part et d’autre du quadripôle sont différents comme deux lignes de transmission aux caractéristiques dissemblables. On note :

- $\Gamma_{11}$  ou  $\Gamma_{22}$ , les coefficients de réflexion en tension du milieu 1 vers 1 ou 2 vers 2 (pour le courant, il suffit de changer le signe)

$$\Gamma_{11} = \frac{v_1^-}{v_1^+} = - \frac{i_1^-}{i_1^+} ; \tag{8.37}$$

- $\tau_{v,21}$  ou  $\tau_{v,12}$ , les coefficients de transmission en tension du milieu 1 vers 2 ou 2 vers 1 respectivement (en courant, on utilise  $\tau_{i,21}$  et  $\tau_{i,12}$ )

$$\tau_{v,21} = \frac{v_2^+}{v_1^+} \tag{8.38}$$

$$\tau_{i,21} = \frac{i_2^+}{i_1^+} = \frac{v_2^+/Z_{o2}}{v_1^+/Z_{o1}} = \underbrace{\frac{v_2^+}{v_1^+}}_{\tau_{v,21}} \frac{Z_{o1}}{Z_{o2}} . \tag{8.39}$$

Malgré la présence d’un point de jonction, il demeure possible d’utiliser le diagramme en  $Z$  afin de déterminer le régime transitoire. Une légère modification s’impose cependant au niveau du point de jonction à cause du phénomène de transmission de part et d’autre de la jonction.

Il existe plusieurs types de point de jonction mais on se limitera à l’analyse de deux cas : la résistance parallèle et la résistance série entre deux lignes de transmission. Les autres cas peuvent se déduire ou s’analyser de la même manière.

## 8.9.1 Résistance parallèle

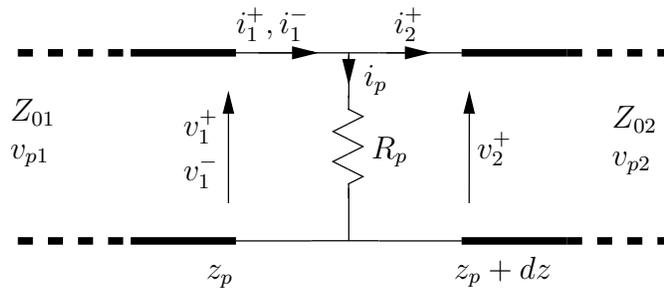


FIGURE 8.23 – Point de jonction constitué d'une résistance en parallèle.

On considère deux lignes possiblement différentes (l'une ayant :  $Z_{o1}$ ,  $v_{p1}$  et l'autre :  $Z_{o2}$ ,  $v_{p2}$ ) reliées ensemble à la position  $z = z_p$ . À cette position se trouve aussi une résistance en parallèle  $R_p$  entre les deux conducteurs comme sur la figure 8.23.

Les lois de *Kirchoff* et les équations (8.11) et (8.12) s'appliquent. Celles-ci donnent :

$$v_1^+ + v_1^- = v_2^+ \quad (8.40)$$

$$i_1^+ + i_1^- = i_p + i_2^+ \quad (8.41)$$

$$v_1^+ = Z_{o1}i_1^+ \quad (8.42)$$

$$v_1^- = -Z_{o1}i_1^- \quad (8.43)$$

$$v_2^+ = R_p i_p = Z_{o2}i_2^+ . \quad (8.44)$$

On obtient de ces équations que :

$$\Gamma_{11} = \frac{v_1^-}{v_1^+} = \frac{R_p Z_{o2} - R_p Z_{o1} - Z_{o1} Z_{o2}}{R_p Z_{o2} + R_p Z_{o1} + Z_{o1} Z_{o2}} \quad (8.45)$$

$$\tau_{v,21} = \frac{v_2^+}{v_1^+} = \frac{2R_p Z_{o2}}{R_p Z_{o2} + R_p Z_{o1} + Z_{o1} Z_{o2}} \quad (8.46)$$

$$= 1 + \Gamma_{11} \quad (8.47)$$

$$\tau_{i,21} = \frac{i_2^+}{i_1^+} = \frac{2R_p Z_{o1}}{R_p Z_{o2} + R_p Z_{o1} + Z_{o1} Z_{o2}} \quad (8.48)$$

$$\neq 1 - \Gamma_{11} .$$

La dernière inégalité provient de la perte de courant dérivée par la résistance parallèle.

Les expressions pour  $\Gamma_{22}$ ,  $\tau_{v,12}$  et  $\tau_{i,12}$  se déduisent facilement en reprenant les équations et en interchangeant cette fois les signaux incident et réfléchi ainsi que le signal transmis de l'autre côté via les indices. D'où :

$$\Gamma_{22} = \frac{R_p Z_{o1} - R_p Z_{o2} - Z_{o1} Z_{o2}}{R_p Z_{o1} + R_p Z_{o2} + Z_{o1} Z_{o2}} \quad (8.49)$$

$$\tau_{v,12} = \frac{2R_p Z_{o1}}{R_p Z_{o1} + R_p Z_{o2} + Z_{o1} Z_{o2}} \quad (8.50)$$

$$\tau_{i,12} = \frac{2R_p Z_{o2}}{R_p Z_{o1} + R_p Z_{o2} + Z_{o1} Z_{o2}} . \quad (8.51)$$

Une façon physique de concevoir la chose en réflexion est de considérer la résistance  $R_p$  en parallèle localement avec l'impédance intrinsèque  $Z_{o2}$  comme charge équivalente au bout de la première ligne pour le calcul de  $\Gamma_{11}$  :

$$\Gamma_{11} = \frac{(R_p \parallel Z_{o2}) - Z_{o1}}{(R_p \parallel Z_{o2}) + Z_{o1}} .$$

La même analogie est valable pour  $\Gamma_{22}$ , car il n'y a pas de pertes série qui affectent la tension. Il faut voir la transmission du courant par le biais d'un diviseur courant entre  $R_p$  et  $Z_{o2}$  :

$$i_2^+ = \underbrace{(i_1^+ + i_1^-)}_{(1-\Gamma_{11})i_1^+} \frac{R_p}{R_p + Z_{o2}}$$

d'où

$$\tau_{i,21} = (1 - \Gamma_{11}) \frac{R_p}{R_p + Z_{o2}} .$$

### 8.9.2 Résistance série

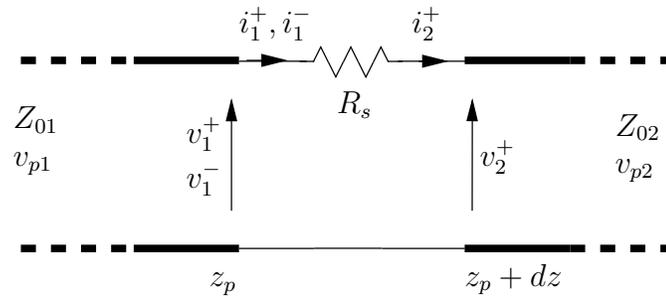


FIGURE 8.24 – Point de jonction constitué d'une résistance en série.

Cette fois, la figure 8.24 montre une résistance série  $R_s$  qui se retrouve entre les deux lignes possiblement différentes reliées ensemble à la position  $z = z_p$ .

On écrit alors :

$$v_1^+ + v_1^- = R_s i_2^+ + v_2^+ \tag{8.52}$$

$$i_1^+ + i_1^- = i_2^+ \tag{8.53}$$

$$v_1^+ = Z_{o1} i_1^+ \tag{8.54}$$

$$v_1^- = -Z_{o1} i_1^- \tag{8.55}$$

$$v_2^+ = Z_{o2} i_2^+ . \tag{8.56}$$

De ces expressions, on obtient donc :

$$\Gamma_{11} = \frac{R_s + Z_{o2} - Z_{o1}}{R_s + Z_{o2} + Z_{o1}} \tag{8.57}$$

$$\begin{aligned} \tau_{v,21} &= \frac{2Z_{o2}}{R_s + Z_{o2} + Z_{o1}} \tag{8.58} \\ &\neq 1 + \Gamma_{11} \end{aligned}$$

$$\tau_{i,21} = \frac{2Z_{o1}}{R_s + Z_{o1} + Z_{o2}} \quad (8.59)$$

$$= 1 - \Gamma_{11} \quad (8.60)$$

et

$$\Gamma_{22} = \frac{R_s + Z_{o1} - Z_{o2}}{R_s + Z_{o1} + Z_{o2}} \quad (8.61)$$

$$\tau_{v,12} = \frac{2Z_{o1}}{R_s + Z_{o1} + Z_{o2}} \quad (8.62)$$

$$\tau_{i,12} = \frac{2Z_{o2}}{R_s + Z_{o2} + Z_{o1}} \quad (8.63)$$

Encore ici, on peut y aller avec plus d'intuition physique et voir  $R_s$  en série localement avec  $Z_{o2}$  comme charge équivalente au bout de la ligne #1.

### 8.9.3 Jonction quelconque

Comme il a été mentionné lors de l'analyse des jonctions avec résistance parallèle ou série, l'approche raisonnée demeure très valable. Elle est d'un grand secours lorsque la jonction se complique. On ne peut traiter tous les cas possibles ; chaque cas devient un cas d'espèce.

#### Exemple 8.8

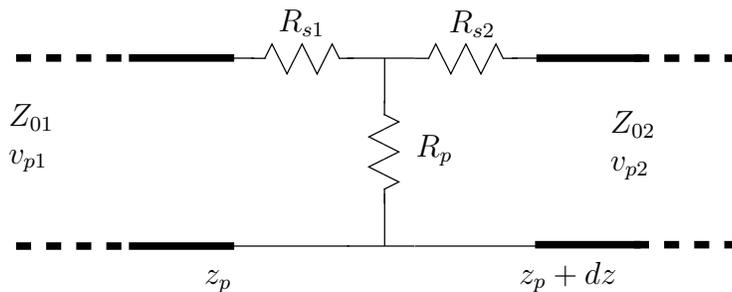


FIGURE 8.25 – Configuration d'une jonction en T.

Une jonction utilise le modèle d'un atténuateur en T tel qu'il apparaît sur la figure 8.25 : deux résistances série  $R_{s1}$  et  $R_{s2}$  forment les deux traits de la barre horizontale du T ; une résistance parallèle  $R_p$  forme la barre verticale.

- Exprimez le coefficient de réflexion et de transmission en courant d'une onde incidente de la ligne #1 soit du côté de la résistance série  $R_{s1}$ .

L'approche raisonnée indique que la charge équivalente est constituée de  $Z_{o2}$  en série avec  $R_{s2}$  ; cet arrangement ( $Z_{o2} + R_{s2}$ ) est en parallèle avec  $R_p$  ; le tout est en série avec  $R_{s1}$ . On obtient :

$$R_{ceq} = \left( (Z_{o2} + R_{s2}) \parallel R_p \right) + R_{s1}$$

et donc, en tension :

$$\Gamma_{11} = \frac{R_{ceq} - Z_{o1}}{R_{ceq} + Z_{o1}} .$$

Quant au coefficient de transmission en courant, il suffit de voir que le courant de la ligne #1 au niveau du point de jonction est le même que celui traversant  $R_{s1}$ . Or celui-ci se divise en deux parties : l'une dans  $R_p$  et l'autre dans  $R_{s2}$  et  $Z_{o2}$ , car ces dernières résistances sont en série. La portion allant dans  $R_{s2}$  et  $Z_{o2}$  se calcule à l'aide du diviseur courant. Donc :

$$i_2^+ = (i_1^+ + i_1^-) \frac{R_p}{R_p + (Z_{o2} + R_{s2})}$$

ce qui revient à écrire après division à gauche et à droite par  $i_1^+$  :

$$\tau_{i,21} = (1 - \Gamma_{11}) \frac{R_p}{R_p + (Z_{o2} + R_{s2})} .$$

### 8.9.4 Diagramme en Z avec point de jonction

Pour tenir compte du point de jonction dans le tracé du diagramme en Z, on procède comme d'habitude mais :

- on suit le (ou les) signal de départ  $v^o$  et  $i^o$  jusqu'à  $z = z_p$  avec la vitesse correspondant à la vitesse de propagation de la ligne où il se déplace ;
- on partage à chaque fois le signal en deux au point de jonction : une partie étant la réflexion et l'autre, la transmission, en tenant compte des coefficients de réflexion et de transmission respectivement ;
- on doit maintenant suivre non pas un seul mais plusieurs signaux qui se déplacent à une vitesse correspondant à la vitesse de propagation de la ligne où ils se trouvent.

La figure 8.26 illustre le type de diagramme en Z possible lorsqu'il y a présence d'un point de jonction. On note la grande quantité de signaux qui contribue au transitoire sur les lignes : une nouvelle contribution s'ajoute à chaque fois que l'une d'elles atteint le point de jonction.

Pour la lecture du diagramme, les règles ne changent pas : l'aire au-dessus d'une droite inclut tous les lieux où l'action produite par la contribution représentée par cette droite est effective. La difficulté vient du fait que :

- les intersections entre la droite  $D_{t,z}$  et les droites du diagramme correspondent toujours à des ajouts/soustractions de contributions sur le résultat ;
- une transition brusque est aussi possible au niveau du point de jonction dans le tracé de la distribution de la tension ou du courant à un temps donné. En effet, si  $v_1^+ + v_1^- \neq v_2^+$  ou  $i_1^+ + i_1^- \neq i_2^+$ , alors une transition supplémentaire apparaît en  $z = z_p$  en tension ou en courant respectivement.

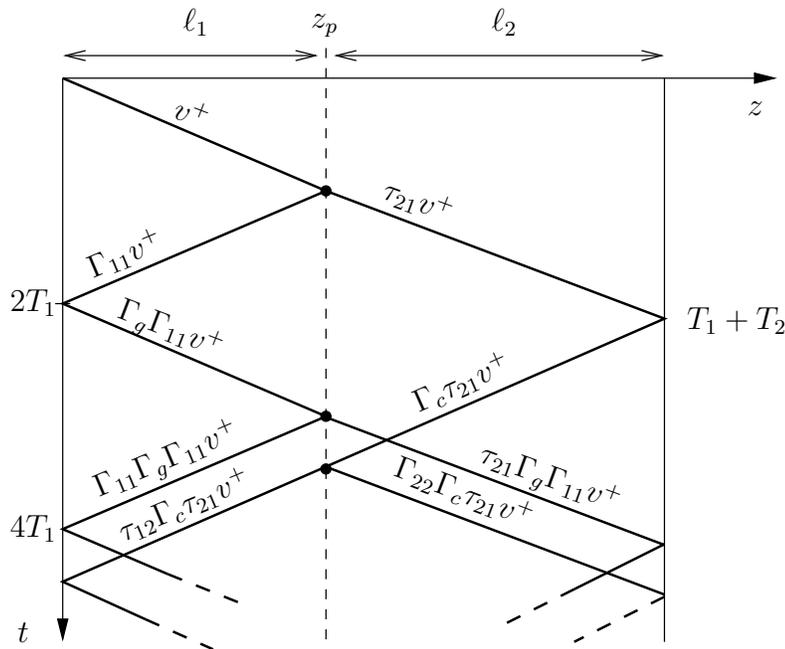


FIGURE 8.26 – Diagramme en Z typique avec point de jonction.

**Exemple 8.9**

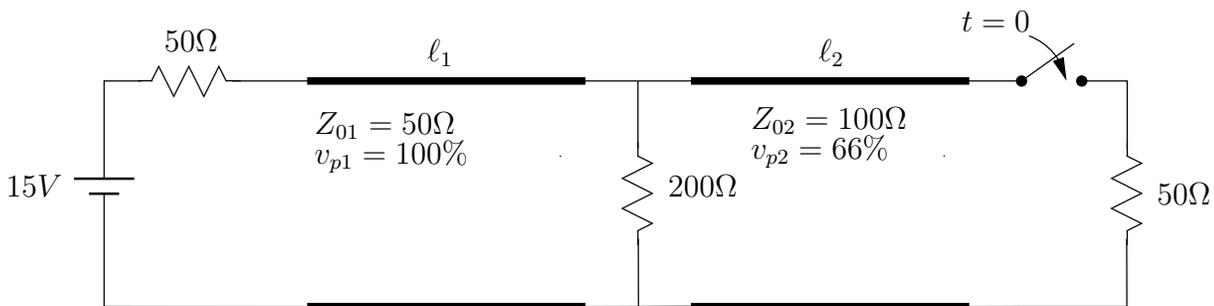


FIGURE 8.27 – Schéma du circuit de transmission avec point de jonction, départ à la charge et conditions initiales non-nulles

Soit un système de transmission représenté sur la figure 8.27 avec :

- $l_1 = 2\ell/3, l_2 = \ell/3;$
- $T_1 = 4\mu s$  (donc  $T_2 = \frac{l_1(1/2)}{v_{p1}(2/3)} = T_1(3/4) = 3\mu s$ )
- $\Rightarrow l_1 = 1200 \text{ m}$  et  $l_2 = 600 \text{ m}.$

► Tracez l'évolution à  $3\ell/5$  (1080 m) et à  $4\ell/5$  (1440 m) jusqu'à  $15\mu s$ , et la distribution le long de la ligne au temps  $t = 7\mu s$  de la tension et du courant.

On commence par évaluer tous les coefficients :

$$\begin{aligned} \Gamma_g &= \frac{50 - 50}{50 + 50} = 0 \\ \Gamma_c &= \frac{50 - 100}{50 + 100} = -0.333 \\ \Gamma_{11} &= \frac{(200 \parallel 100) - 50}{(200 \parallel 100) + 50} = \frac{66.67 - 50}{66.67 + 50} = 0.143 \\ \Gamma_{22} &= \frac{(200 \parallel 50) - 100}{(200 \parallel 50) + 100} = \frac{40 - 100}{40 + 100} = -0.429 \\ \tau_{v,21} &= 1 + \Gamma_{11} = 1.143 \\ \tau_{v,12} &= 1 + \Gamma_{22} = 0.571 \\ \tau_{i,21} &= \tau_{v,21} \frac{Z_{o1}}{Z_{o2}} = 0.571 \\ \tau_{i,12} &= \tau_{v,12} \frac{Z_{o2}}{Z_{o1}} = 1.143 . \end{aligned}$$

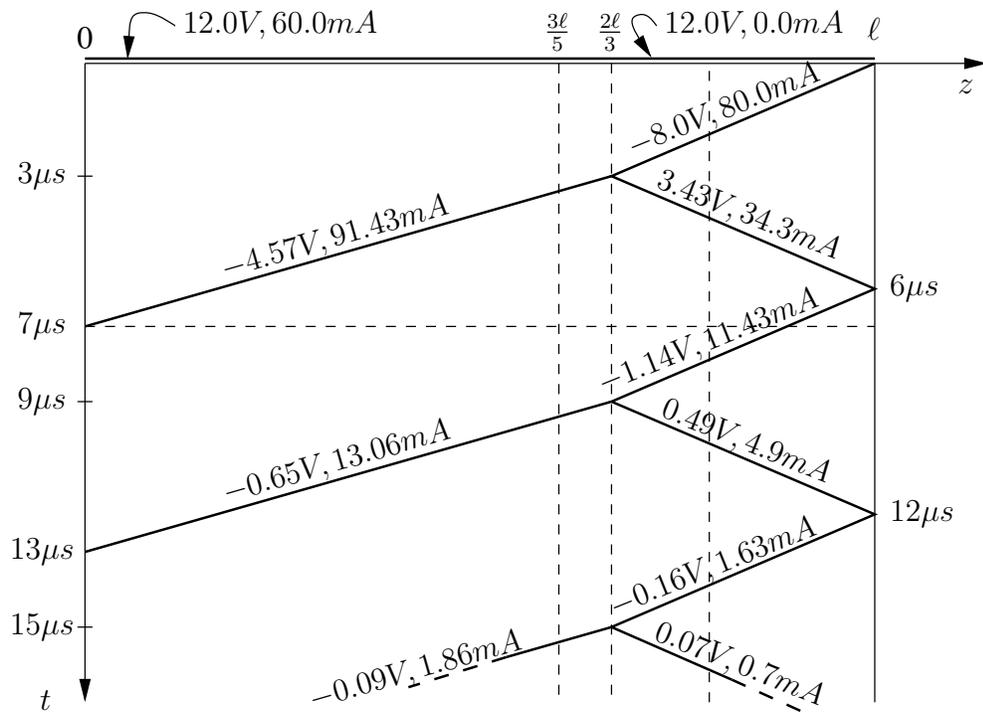


FIGURE 8.28 – Diagramme en Z de l'exemple avec point de jonction.

Puis, on trouve les conditions initiales en n'oubliant pas que l'interrupteur est ouvert pour  $t < 0$  et que les lignes n'ont aucune influence (l'indice indique le numéro de la ligne) :

$$\begin{aligned} v_{init,1} = v_{init,2} &= 15 \frac{200}{200 + 50} = 12 V \\ i_{init,1} &= \frac{15}{200 + 50} = 60 mA \\ i_{init,2} &= 0 mA \end{aligned}$$

L'avant-dernière étape avant le traçage du diagramme en  $Z$  consiste à simuler l'effet de l'interrupteur pour déduire les signaux de départ  $v_2^-$  et  $i_2^-$  qui partiront de la charge. D'abord, la tension aux bornes de l'interrupteur correspond à la tension initiale sur la ligne #2, d'où :

$$v_i(t) = 12u(t) V (+-) .$$

Finalement, la tension de départ équivaut à la tension aux bornes de la ligne #2. Elle est calculée en s'occupant uniquement de la charge, de la source qui assimile l'interrupteur et de la ligne #2 qu'on remplace par une impédance  $Z_{o2}$ . Le tout agit comme un diviseur tension entre  $Z_{o2}$  et  $R_c$  avec un signe négatif, car la polarité est inversée sur  $Z_{o2}$  ( $\mp$ ) :

$$v^o = v_2^- = -12 \frac{100}{100 + 50} = -8.0 V$$

$$i^o = i_2^- = -\frac{v_2^-}{Z_{o2}} = 80 mA .$$

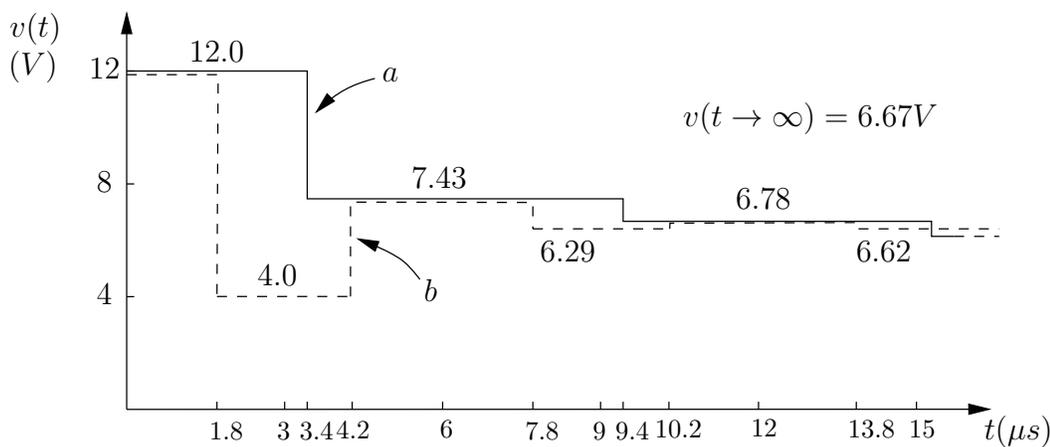


FIGURE 8.29 – Évolution de la tension à  $3\ell/5$  (a) et  $4\ell/5$  (b) avec point de jonction.

Le diagramme en  $Z$  de cet exemple est reproduit sur la figure 8.28 tandis que les résultats apparaissent aux figures 8.29, 8.30 et 8.31.

## 8.10 Impédance réactive

L'ajout d'une ou plusieurs impédances réactives – inductance/condensateur – à l'extrémité de la ligne ou à un point de jonction, rend l'analyse du système suffisamment complexe pour abandonner l'utilisation directe des diagrammes en  $Z$ . On peut se servir des diagrammes en  $Z$  mais uniquement pour comprendre le comportement approximatif. Si le nombre d'impédances réactives dépasse l'unité, seule une analyse mathématique complète parvient à la réponse. Avec une seule impédance réactive, on peut décomposer l'analyse en deux cas inter-reliés :

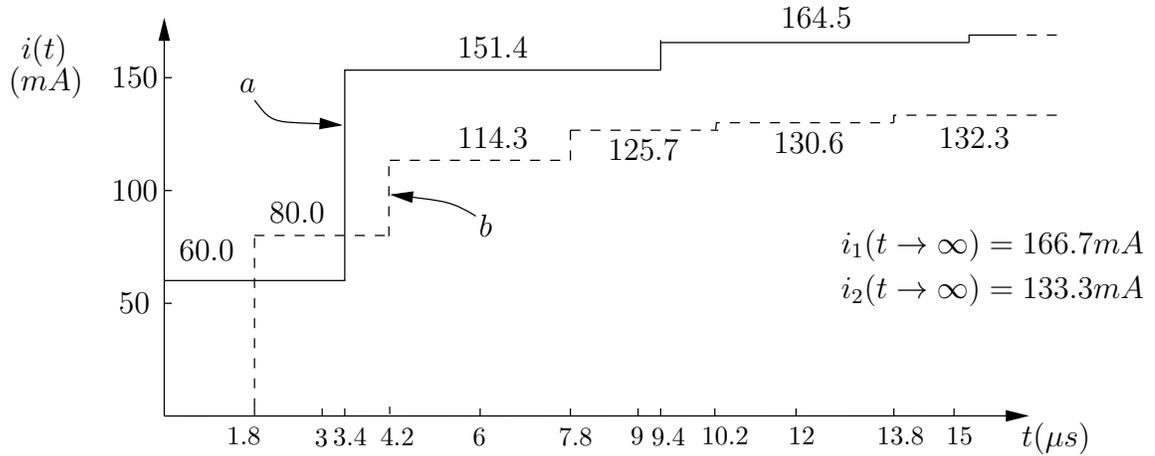


FIGURE 8.30 – Évolution du courant à  $3\ell/5$  (a) et  $4\ell/5$  (b) avec point de jonction.

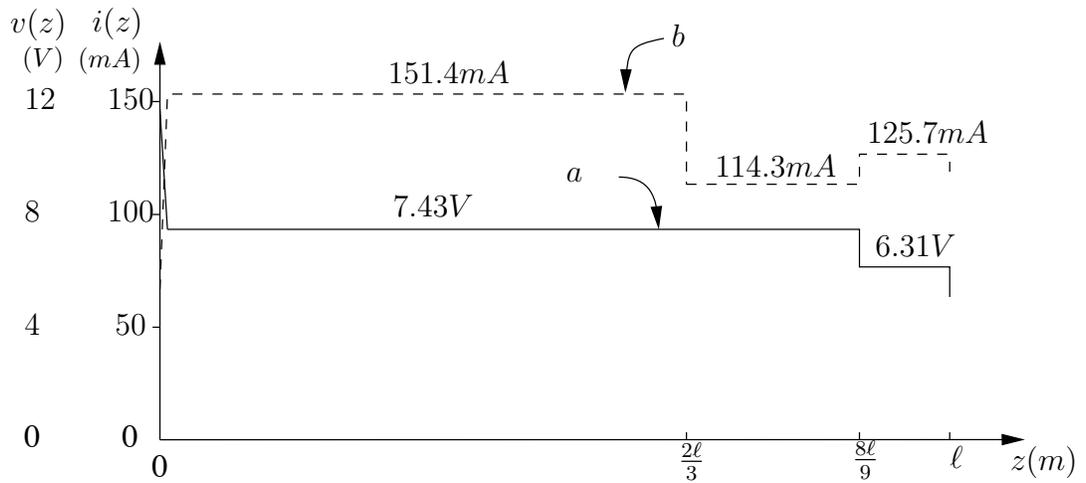


FIGURE 8.31 – Distribution de la tension (a) et du courant (b) à  $7\mu\text{s}$  avec point de jonction.

- conditions initiales nulles ;
- conditions initiales non-nulles.

Le deuxième cas englobe le premier mais oblige encore une fois un développement mathématique plus complet, alors que des conditions initiales nulles simplifient les expressions afin de permettre le passage par une analyse descriptive. Cette dernière fournit quelques points de repère du transitoire et les autres points de la courbe se déduisent par les connaissances acquises en circuit concernant la charge et la décharge.

En présence d'une impédance réactive, les coefficients de réflexion ou de transmission deviennent fonction de  $s$ .  $\Gamma(s)$  ou  $\tau(s)$  s'écrit comme le quotient de deux polynômes du premier ordre  $\frac{as+b}{cs+d}$  avec  $a, b, c$  et  $d$  des constantes. Ceci cause la principale difficulté, car la transformée de Laplace inverse de (8.25) ou (8.27) se réalise pratiquement pas.

### 8.10.1 Conditions initiales nulles

Avec des conditions initiales nulles, on contourne la difficulté en procédant par inspection. On regarde le comportement de l'impédance réactive aux deux extrémités soient aux temps initial et infini. Ce temps initial  $t_i$  correspond au temps de passage de l'impulsion (réponse impulsionnelle) ou du front montant (réponse à l'échelon) au niveau de l'impédance réactive.

Pour la réponse à l'échelon la réaction de l'impédance réactive est décrite ainsi :

- une inductance au repos réagit comme un circuit ouvert à  $t_i$  mais comme un court-circuit à  $t = \infty$  ;
- un condensateur au repos réagit comme un court-circuit à  $t_i$  et un circuit ouvert à  $t = \infty$  ;

Pour bien se souvenir des différentes possibilités, il suffit de se rappeler que la réactance d'une inductance vaut  $j\omega L$  et celle d'un condensateur  $1/j\omega C$ . Le front montant tout comme l'impulsion possède un contenu en fréquence très élevé  $f \rightarrow \infty$ , alors qu'un signal continu n'a qu'une composante à  $f = 0$ . L'inductance s'oppose au changement brusque de tension ; dans les mêmes circonstances, le condensateur accepte toute la charge disponible.

Ce raisonnement en fréquences est un peu un raccourci puisqu'en réfléchissant en fréquences, on a implicitement intégré sur tous les temps. Le résultat est cependant valide. Il est obtenu formellement en imposant un échelon sur la tension ou sur le courant et en utilisant  $V = L \frac{dI}{dt}$  ou  $I = C \frac{dV}{dt}$  pour déduire l'autre quantité. Il suffit ensuite de considérer les ratios  $V/I$  au moment de l'imposition de l'échelon et à  $t = \infty$ .

On peut déduire les deux points d'une évolution au temps  $t = t_i$  et  $t \rightarrow \infty$  en remplaçant l'impédance réactive par le court-circuit ou le circuit ouvert selon ce qui convient. Avant  $t = t_i$ , l'impédance réactive n'agissait pas et la courbe se trace sans en tenir compte, comme dans les sections précédentes. Entre les deux temps, on ajoute la charge ou la décharge de l'élément réactif du style  $e^{-t/\tau}$ . Plus généralement, on utilisera l'expression

$$(V_{fin} + (V_{init} - V_{fin})e^{-(t-t_i)/\tau}) u(t - t_i) \quad (8.64)$$

où  $V_{init}$  est la condition initiale,  $V_{fin}$ , celle finale. On reconnaît la réponse à un échelon d'une équation différentielle du premier ordre puisqu'il n'y a qu'un seul élément réactif (outre ceux distribués de la ligne de transmission responsables de l'effet non-instantané si la ligne est sans perte). Attention,  $\tau$  représente une constante de temps, non pas un coefficient de transmission :

- une inductance en série avec une résistance :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- un condensateur en série avec une résistance :

$$\tau = RC .$$

**Exemple 8.10**

Une inductance pure de  $0.1 \text{ mH}$  est placée comme charge à la fin d'une ligne de transmission d'impédance caractéristique de  $50 \Omega$ , de longueur  $100 \text{ m}$  et de vitesse de propagation  $v_p = 1 \times 10^8 \text{ m/s}$ . On applique un échelon de tension  $V_o u(t)$  avec  $V_o = 10 \text{ V}$  à l'autre extrémité grâce à une source de tension adaptée.

- Tracez l'évolution de la tension à la source et à la charge.

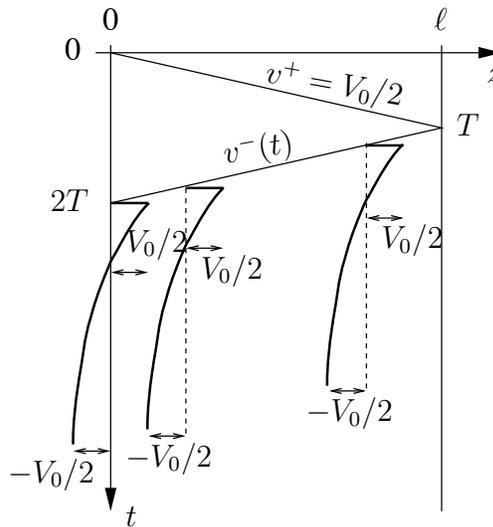


FIGURE 8.32 – Diagramme en Z équivalent avec charge inductive.

Le diagramme en Z qui serait produit avec une charge résistive quelconque ressemble à celui de la figure 8.32. On note que le coefficient de réflexion à la charge évolue dans le temps  $\Gamma(s, z = \ell)$  :

- $\Gamma(t = t_i = T = 1 \mu s, z = \ell) = 1$

- $\Gamma(t \rightarrow \infty) = -1$ .

Par contre, l'effet de la charge est vu à la source avec un retard de  $2\mu s$ , alors  $\Gamma(t = t_i, z = 0) = 1$  à  $t = t_i = 2T = 2\mu s$  !

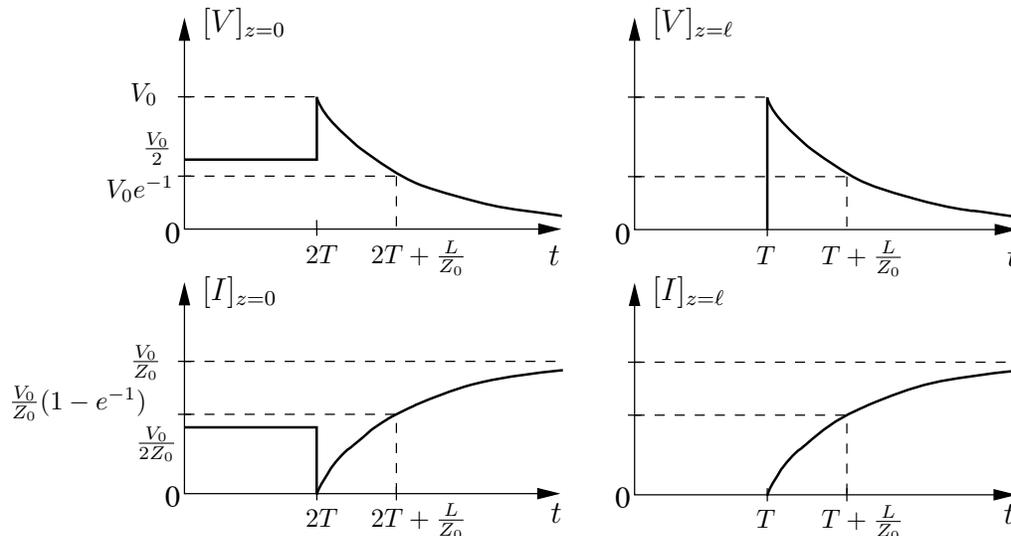


FIGURE 8.33 – Évolution de la tension et du courant à la source et à la charge avec charge inductive.

Le tracé de l'évolution de la tension quelque part sur la ligne se divise en trois parties menant au résultat de la figure 8.33 :

- pour  $0 < t < t_o = z_o/v_p$ , aucun signal n'est visible car  $v^o = v^+$  n'est pas encore arrivé ;
- pour  $t_o < t < t_i = 2T - t_o$ , il n'y a que

$$v^+ = \frac{Z_o}{Z_o + R_g} V_o = 5 u(t - z/v_p) \text{ V}$$

- pour  $t \geq t_i$ , le signal de retour  $v^-(t)$  se superpose :
  - à  $t = t_i$ , on a  $[v^-]_{t=t_i} = 5 \text{ V}$  ;
  - alors qu'à  $t \rightarrow \infty$ ,  $[v^-]_{t \rightarrow \infty} = -5 \text{ V}$
  - entre les deux,

$$v^-(t) = 10e^{-(t-2T+z/v_p)/\tau} u(t - 2T + z/v_p) - 5 \text{ V}$$

pour permettre de raccorder les deux points par une exponentielle.

Il reste à déterminer la constante de temps  $\tau$ . Il faut revenir au principe physique de l'analyse descriptive pour bien comprendre. L'inductance ne "voit" que la ligne de transmission au moment de sa réaction. Les autres résistances au loin (ici, celle de la source) affecterait la réponse via la réflexion de  $v^-$ . On

remplace la ligne telle que vue par l'inductance par son impédance caractéristique. La seule résistance entrant dans le calcul de  $\tau$  est donc  $Z_o$ , d'où :

$$\tau = \frac{L}{Z_o} = \frac{0.1 \times 10^{-3}}{50} = 2 \mu s .$$

Une constante de temps  $\tau$  après  $t_i$ , une exponentielle décroissante est rendue à 37% de la valeur initiale à  $t_i$ , à 14% après deux constantes de temps et finalement à 5% après trois constantes de temps.

**Exemple 8.11**

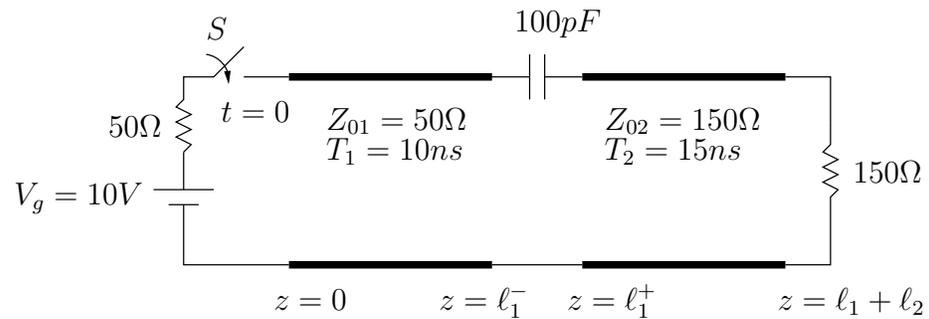


FIGURE 8.34 – Schéma du circuit avec lignes de transmission et discontinuité capacitive.

Soit un système constitué de deux lignes de transmission qui, à la jonction, possède une discontinuité capacitive comme sur la figure 8.34.

- Tracez l'évolution de la tension et du courant à  $z = 0$ .

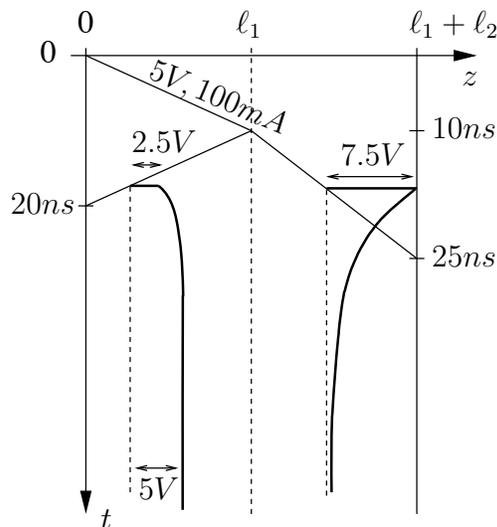


FIGURE 8.35 – Diagramme en Z équivalent avec discontinuité capacitive.

Quoique d'apparence plus compliquée que l'exemple précédent, la difficulté est du même ordre de grandeur. Le diagramme en  $Z$  équivalent apparaît sur la figure 8.35.

L'évolution de la tension ou du courant à  $z = 0$  se divise en deux parties :

- pour  $0 < t < t_i = 2T_1$  :

$$[v^+]_{z=0} = \frac{Z_{o1}}{Z_{o1} + R_g} 10 = 5 u(t) \text{ V}$$

$$[i^+]_{z=0} = \frac{1}{Z_{o1} + R_g} 10 = 100 u(t) \text{ mA}$$

- pour  $t \geq 2T_1$ , le signal de retour  $v^-(t)$  se superpose tel que :

- à  $t = t_i$ , le condensateur se comporte comme un court-circuit et  $[v^-]_{t=t_i} = 5 \frac{150-50}{150+50} = 2.5 \text{ V}$ ,  $[i^-]_{t=t_i} = 100(-0.5) = -50 \text{ mA}$  ;
- à  $t \rightarrow \infty$ , le condensateur est complètement chargé et agit comme un circuit ouvert :  $[v^-]_{t \rightarrow \infty} = 5(1) = 5 \text{ V}$ ,  $[i^-]_{t \rightarrow \infty} = 100(-1) = -100 \text{ mA}$ .
- entre les deux,

$$v^-(t) = 5 - 2.5e^{-(t-2T_1)/\tau} u(t - 2T_1) \text{ V} ,$$

$$i^-(t) = -100 + 50e^{-(t-2T_1)/\tau} u(t - 2T_1) \text{ mA} .$$

La constante de temps est déterminée en inspectant le schéma. Le condensateur ne “voit” que l'entrée des deux lignes de transmission. On remplace les lignes par leur impédance caractéristique respective pour démontrer que ces impédances résistives sont connectées en série d'où :

$$\tau = (Z_{o1} + Z_{o2})C = (50 + 150)(100 \times 10^{-12}) = 20 \text{ ns} .$$

On obtient finalement des courbes d'évolution de la figure 8.36.

### 8.10.2 Conditions initiales non-nulles

Lorsque les conditions initiales aux bornes de l'élément réactif sont non-nulles, on doit réécrire les équations selon les conditions aux limites. Impossible d'y aller par inspection car le comportement au temps  $t = t_i$  est indéterminé. Par exemple, au front montant de l'échelon de tension, la capacité ne réagit pas comme un court-circuit ayant déjà une certaine charge accumulée (donc une tension à ses bornes).

L'application des conditions aux limites se fait dans le domaine de *Laplace* sans oublier la condition initiale. Le coefficient de réflexion  $\Gamma(s)$  – et celui de transmission  $\tau(s)$  si nécessaire – est déduit en trouvant le rapport  $V^-(s)/V^+(s)$ . On peut donc exprimer  $v^-(t)$  et le superposer à  $v^+(t)$ . On continue le même procédé pour les réflexions supplémentaires  $v^{++}(t)$ ,  $v^{--}(t)$ , etc.

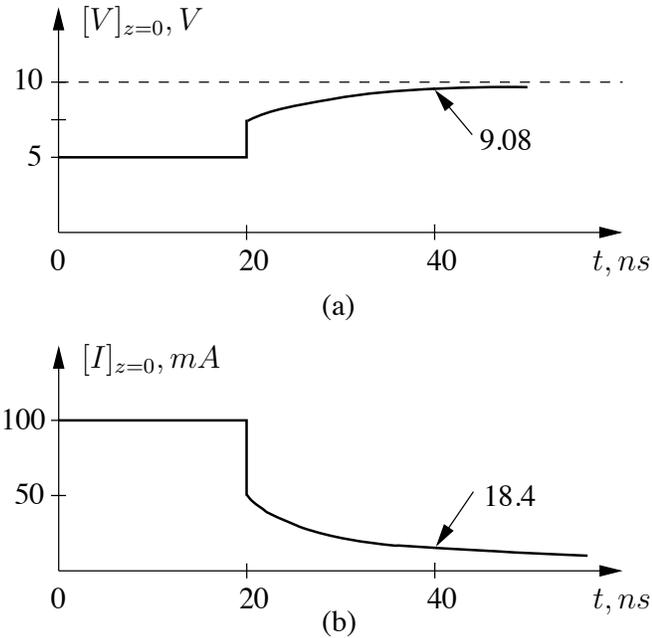


FIGURE 8.36 – Évolution de la tension et du courant à la source avec charge discontinuité capacitive.

**Exemple 8.12**

Soit la ligne terminée dans une inductance de l'exemple 8.10. Au temps  $t = T^-$ , le courant traversant l'inductance s'élevait à  $50 \text{ mA}$ .

► Réécrivez l'expression de  $v(z, t)$  sur la ligne.

Pour satisfaire la condition au niveau de la charge inductive pour  $t > T$  :

$$\frac{V_o}{2} + v^-(z = \ell, t) = L \frac{d}{dt} \left( \frac{V_o}{2Z_o} - \frac{v^-(z = \ell, t)}{Z_o} \right)$$

soit parce que la dérivée d'une constante est nulle :

$$\frac{L}{Z_o} \frac{d v^-(z = \ell, t)}{dt} + v^-(z = \ell, t) = -\frac{V_o}{2} .$$

La solution générale de l'équation différentielle est la suivante :

$$v^-(z = \ell, t) = A e^{-(t-T)/(L/Z_o)} u(t - T) - \frac{V_o}{2} u(t - T) .$$

On reconnaît la constante de temps  $L/Z_o$ , car l'inductance se charge via  $Z_o$ . Elle fait aussi apparaître une constante  $A$  qui est déterminée par la condition initiale à l'inductance :

$$\left[ \frac{V_o}{2Z_o} - \frac{v^-(z = \ell, t)}{Z_o} \right]_{t=T^-} = I_{init} = 50 \text{ mA} .$$

En y insérant les valeurs, on a :

$$0.1 - 0.02v^-(z = \ell, t = T) = 0.05$$

ou encore  $v^-(z = \ell, t = T) = 2.5 \text{ V}$ . En conséquence, la constante  $A$  vaut :

$$2.5 = Ae^0u(0) - 5u(0)$$

soit  $A = -7.5$ .

Comme il n'y aura plus aucune autre réflexion, l'évolution de la tension sur la ligne avec insertion de la relation spatio-temporelle s'écrit :

$$\begin{aligned} v(z, t) &= v^+(z, t) + v^-(z, t) \\ &= 5u(t - z/v_p) - 7.5e^{-(t-2T+z/v_p)/(L/Z_o)}u(t - 2T + z/v_p) \\ &\quad - 5u(t - 2T + z/v_p) \text{ V} \\ &= 5u(t - 10^{-8}z) - 7.5e^{-(t-2 \times 10^{-6} + 10^{-8}z)/2 \times 10^{-6}}u(t - 2 \times 10^{-6} + 10^{-8}z) \\ &\quad - 5u(t - 2 \times 10^{-6} + 10^{-8}z) \text{ V} . \end{aligned}$$

## 8.11 Paramètres S

Les paramètres S (de l'anglais "scattering parameters") sont bien connus des ingénieurs travaillant en électronique micro-ondes ou en hyperfréquence. Il y a une grande similitude entre les coefficients de réflexion et de transmission en tension à un point de jonction et les fameux paramètres S. Ces derniers ont été créés pour faciliter les mesures car celles-ci sont effectuées en adaptant la charge et la source d'un côté comme de l'autre du point de jonction pour l'estimation des paramètres S. Le principe peut ensuite être étendu pour une jonction ou un circuit ayant deux ou plusieurs ports d'accès.

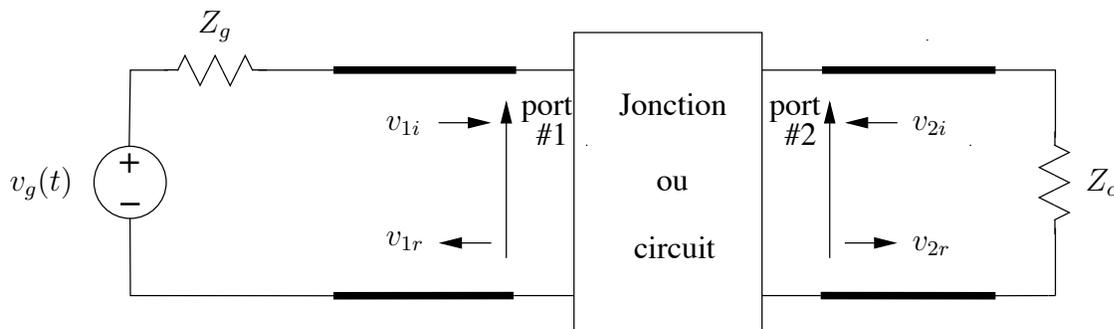


FIGURE 8.37 – Jonction à deux ports pour la définition des paramètres S.

On considère la jonction à deux ports de la figure 8.37 similaire à celle de la figure 8.22 outre le fait que des signaux incidents et réfléchis se présentent aussi sur le port du côté de la charge. Les notations utilisées sont  $v_{pe}$  où :

- “ $p$ ” représente le numéro du port ;
- “ $e$ ” peut prendre deux états :
  - “ $i$ ” pour le signal incident ;
  - “ $r$ ” pour le signal réfléchi.

Le rapport en tension du signal réfléchi au côté #1  $V_{1r}$  au signal incident provenant de la source  $V_{1i}$  lorsqu’une charge adaptée est connectée du côté #2 est le paramètre :

$$s_{11} = \frac{v_{1r}}{v_{1i}} \quad (\text{port \#2 adapté, } v_{2i} = 0) . \quad (8.65)$$

Interchangeant charge et source, le rapport en tension du signal du signal réfléchi du côté #2  $v_{2r}$  au signal incident  $v_{2i}$  lorsqu’il y a adaptation au port #1 est :

$$s_{22} = \frac{v_{2r}}{v_{2i}} \quad (\text{port \#1 adapté, } v_{1i} = 0) . \quad (8.66)$$

De plus, si le port #2 est connecté à une charge adaptée, la tension du signal transmis au port #2  $v_{2r}$  sur celle du signal incident au port #1  $v_{1i}$  est le paramètre :

$$s_{21} = \frac{v_{2r}}{v_{1i}} \quad (\text{port \#2 adapté, } v_{2i} = 0) . \quad (8.67)$$

Finalement, le paramètre  $s_{12}$  est défini comme :

$$s_{12} = \frac{v_{1r}}{v_{2i}} \quad (\text{port \#1 adapté, } v_{1i} = 0) . \quad (8.68)$$

Ces quatre paramètres sont regroupés dans une matrice dite de diffusion (en anglais “scattering matrix”) qui a la propriété d’être symétrique s’il existe une réciprocité entre les deux ports :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} . \quad (8.69)$$

Le concept s’étend aisément aux cas de circuits ayant un nombre  $n$  de ports donnant une matrice de diffusion ayant des dimensions de  $n \times n$  et dans laquelle se trouvent les coefficients de réflexion ( $s_{11}, s_{22}, \dots, s_{nn}$ ) et les divers coefficients de transmission d’un port # $q$  vers le port # $p$ ,  $s_{pq}$ . Il faut alors connecter une source adaptée successivement à chacun des ports, tous les autres étant terminés dans des charges adaptées.

### 8.11.1 Ports sans adaptation

Il est parfois très difficile d’avoir des circuits parfaitement adaptés à la ligne en entrée et en sortie. Dans ces conditions :

$$\begin{bmatrix} v_{1r} \\ v_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \end{bmatrix} \quad (8.70)$$

avec des coefficients de réflexion dus à la charge ou à l'impédance interne de la source :

$$\Gamma_c = \frac{v_{cr}}{v_{ci}} = \frac{v_{2i}}{v_{2r}} \quad (8.71)$$

$$\Gamma_g = \frac{v_{gr}}{v_{gi}} = \frac{v_{1i}}{v_{1r}} . \quad (8.72)$$

De ces équations (8.70) jusqu'à (8.72), on déduit que :

$$\Gamma_{11} = \frac{v_{1r}}{v_{1i}} = s_{11} + \frac{s_{12}s_{21}\Gamma_c}{1 - s_{22}\Gamma_c} \quad (8.73)$$

$$\tau_{v,21} = \frac{v_{2r}}{v_{1i}} = \frac{s_{21}}{1 - s_{22}\Gamma_c} \quad (8.74)$$

$$\Gamma_{22} = \frac{v_{2r}}{v_{2i}} = s_{22} + \frac{s_{12}s_{21}\Gamma_g}{1 - s_{11}\Gamma_g} \quad (8.75)$$

$$\tau_{v,12} = \frac{v_{1r}}{v_{2i}} = \frac{s_{12}}{1 - s_{11}\Gamma_g} . \quad (8.76)$$

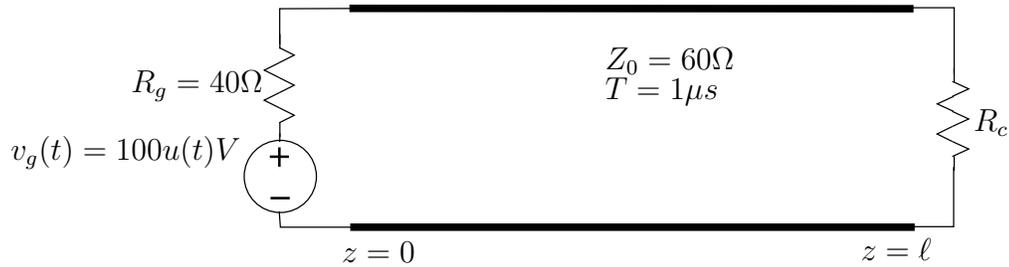
Quant au gain en tension  $G_v$ , on trouve que :

$$\begin{aligned} G_v &= \frac{v_{2i} + v_{2r}}{v_{1i} + v_{1r}} = \tau_{v,21} \frac{1 + \Gamma_c}{1 + \Gamma_{11}} \\ &= \frac{s_{21}(1 + \Gamma_c)}{1 + s_{11} + \Gamma_c(s_{12}s_{21} - s_{11}s_{22} - s_{22})} . \end{aligned} \quad (8.77)$$

Toutes ces équations sont très pertinentes en conception. Comme des appareils spécialisés existent pour les mesures des paramètres S, il faut être capable de pouvoir utiliser convenablement ces paramètres sachant leurs conditions d'obtention.

## Exercices

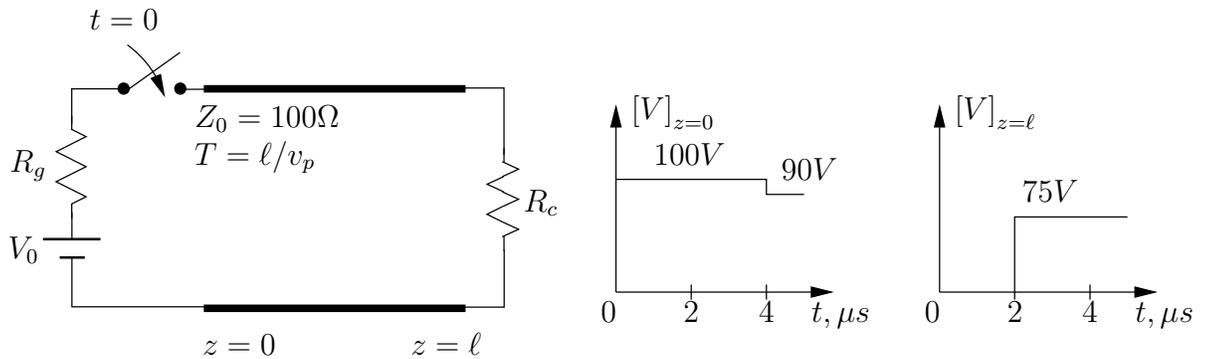
### Question 1



Soit le système montré sur la figure ci-dessus. Pour chacun des cas demandés, déterminez la valeur de  $R_c$  :

- a)  $v(0.5\ell, 1.7 \mu s) = 48 V$  ;
- b)  $v(0.6\ell, 2.8 \mu s) = 76 V$  ;
- c)  $i(0.3\ell, 4.4 \mu s) = 1 A$ .

### Question 2

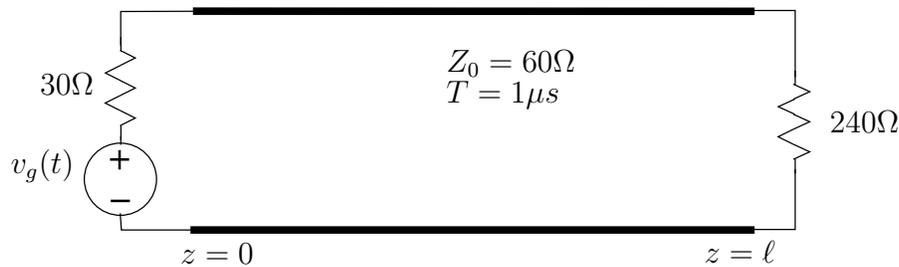


Soit le système montré sur la figure ci-dessus où l'interrupteur est ouvert depuis suffisamment longtemps pour que le système ait atteint un régime permanent. À  $t = 0$ , l'interrupteur se ferme et les évolutions de la tension pendant les  $5 \mu s$  suivantes sont observées aux positions  $z = 0$  et  $z = \ell$ . Déduisez les valeurs de  $V_0$ ,  $R_g$ ,  $R_c$  et  $T$ .

### Question 3

Une ligne de transmission d'une impédance caractéristique de  $75 \Omega$ , se termine dans une charge résistive  $R_c$ . À l'autre extrémité, on retrouve une source tension continue  $V_0$  en série avec son impédance réelle interne  $R_g$ . Lorsque le régime permanent est atteint, on note une tension de  $30 V$  et un courant de  $1.2 A$  sur la ligne. Déterminez la tension et le courant de l'onde positive et de l'onde négative en état permanent.

## Question 4



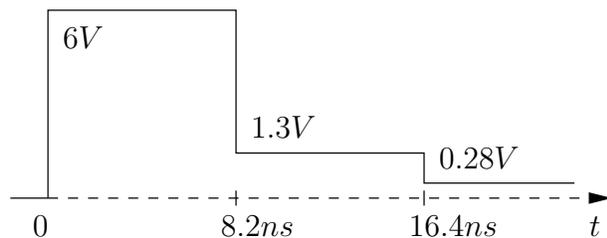
Si  $v_g(t) = 90 u(t) V$ , tracez :

- le diagramme en  $Z$  de la tension et du courant jusqu'à  $5.5 \mu s$ .
- l'évolution de la tension à  $z = 0$  et  $z = \ell$ ;
- la distribution du courant à  $t = 1.2 \mu s$  et  $t = 3.5 \mu s$ .

Si  $v_g(t)$  est une porte rectangulaire d'une amplitude de  $90 V$  et d'une durée de  $0.3 \mu s$ , tracez :

- la distribution du courant à  $t = 1.2 \mu s$  et  $t = 3.5 \mu s$ .

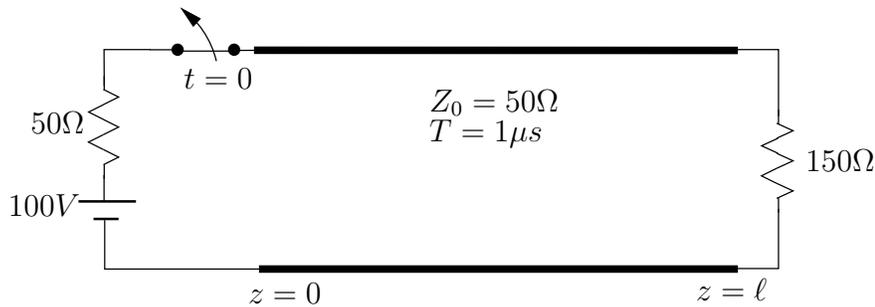
## Question 5



La forme de la tension, représentée sur la figure ci-dessus, est vue sur un réflectomètre du domaine temporel ( $R_g = 50 \Omega$ ) auquel on a branché un câble coaxial assumé sans perte, court-circuité et dont le diélectrique est du Teflon ( $\epsilon_r = 2.1$ ). Déduisez ;

- la longueur du câble ;
- l'impédance caractéristique du câble.

**Question 6**



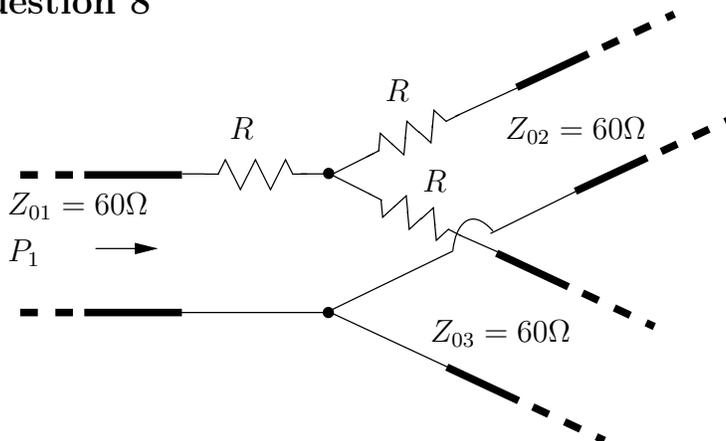
Le système ci-dessus est dans cet état depuis suffisamment longtemps pour être dans un régime permanent. Au temps  $t = 0$ , on ouvre l'interrupteur. Tracez le diagramme des réflexions multiples en tension et en courant et de là, l'évolution de la tension entre 0 et  $6 \mu s$  à la charge.

**Question 7**

Une onde incidente se propageant dans une ligne #1 d'impédance caractéristique  $Z_{o1}$  arrive à la jonction avec une ligne #2 d'impédance caractéristique  $Z_{o2}$  reliée directement. Déterminez le rapport  $Z_{o2}/Z_{o1}$  pour que :

- a) le voltage transmis soit  $\frac{1}{5}$  de celui incident ;
- b) le courant réfléchi soit  $\frac{1}{5}$  de celui transmis.

**Question 8**

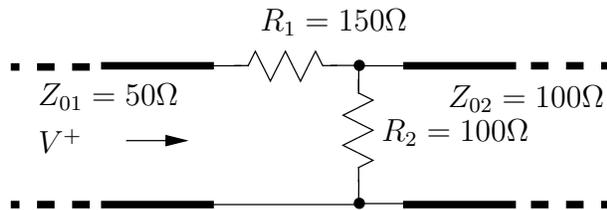


Une ligne de transmission #1 est ensuite reliée à deux autres via un point de discontinuité comme ci-dessus. Pour des signaux arrivant de cette ligne #1, déterminez :

- a) la valeur de  $R$  pour qu'aucune puissance ne soit réfléchié ;
- b) la puissance transmise dans chacune des autres lignes en fonction de la puissance incidente  $P_1$  si la valeur de  $R$  est celle obtenue précédemment ;

- c) la valeur du coefficient de transmission du courant  $\tau_{i21}$  de la ligne #1 vers #2 si  $R = 40 \Omega$ .

### Question 9



Soit la discontinuité montrée ci-dessus. Si un signal incident arrive du côté gauche (i.e. de la ligne #1), calculez la valeur des tensions et courants réfléchis et transmis en terme de  $V^+$ .

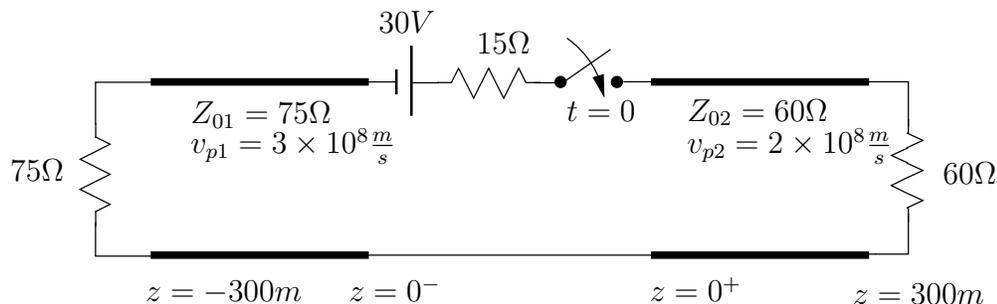
### Question 10

Une ligne coaxiale RG-58U ( $Z_o = 50 \Omega$ ,  $v_p = 0.667c$  où  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ) de  $30 \text{ m}$  est prolongée par une ligne bifilaire torsadée ( $Z_o \approx 110 \Omega$ ,  $v_p \approx c$ ) de  $40 \text{ m}$ . On branche :

- une source dont l'impédance interne est de  $50 \Omega$ , produisant un échelon  $5 u(t) \text{ V}$  à l'extrémité restante de la ligne coaxiale ;
- une charge résistive de  $50 \Omega$  à l'autre extrémité de la ligne bifilaire.

Tracez les diagrammes de la tension à la source et à la charge pour  $0 \leq t \leq 1.5 \mu\text{s}$ .

### Question 11

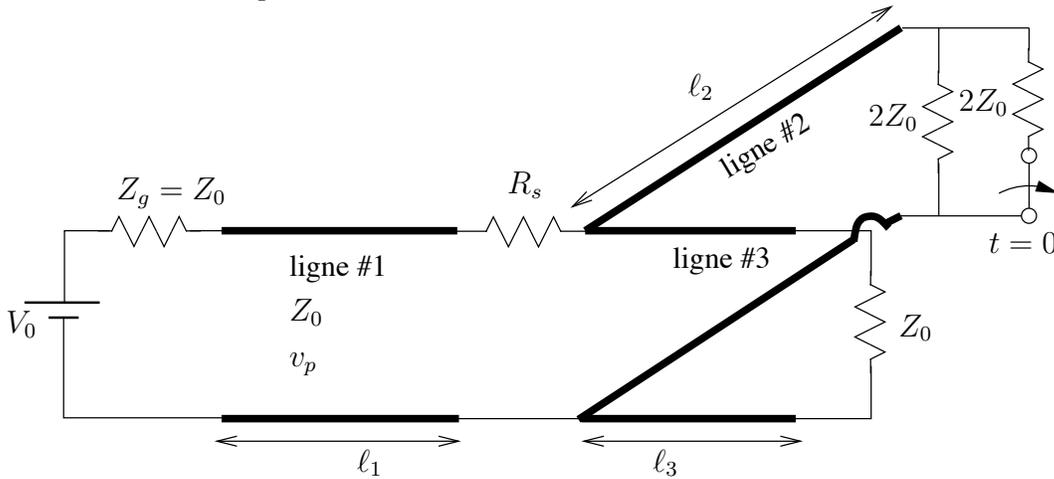


Le système ci-dessus est au repos au temps  $t = 0$  lorsque l'interrupteur est fermé. Tracez :

- la distribution de la tension au temps  $t = 0.5 \mu\text{s}$  ;
- l'évolution de la tension à  $z = 100 \text{ m}$  ;
- l'évolution du courant à  $z = -300 \text{ m}$ .

### Question 12

Soit le circuit de la figure ci-dessous constitué de trois lignes de transmission identiques ( $v_p$  et  $Z_o$ ). On suppose que le circuit est dans un régime permanent lorsqu'au temps  $t = 0$  on ouvre l'interrupteur.



- a) Trouvez la valeur de la résistance série au point de discontinuité  $R_s$  qui fait que  $\Gamma_{11} = 0$ ;

En prenant maintenant  $R_s = 0$  :

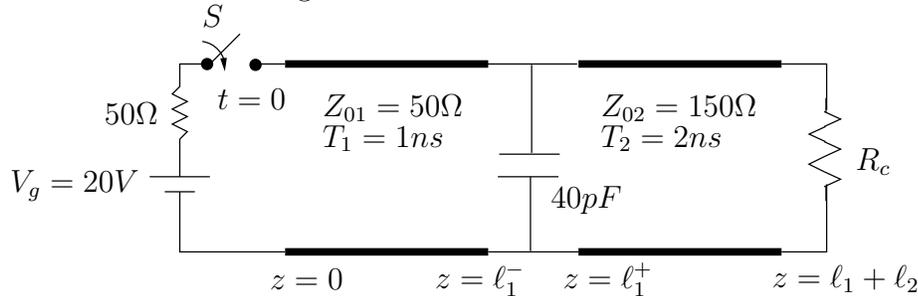
- b) Décrivez le comportement l'interrupteur en terme de circuit électrique ;  
 c) Décrivez le comportement la ligne de transmission #3 en terme de circuit électrique ;  
 d) Dites pourquoi  $\tau_{i_{21}} \neq 1 - \Gamma_{22}$  ;  
 e) Tracez le diagramme des réflexions multiples en tension et en courant le long des lignes de transmission #1 et #2.

### Question 13

Une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $Z_o = 50\Omega$  relie une source tension  $v_g(t) = 20u(t)$  V et  $R_g = Z_o$  à une inductance de  $0.1$  mH. Le temps de franchir la ligne est estimé à  $1 \mu s$ . Déterminez la valeur de la tension aux bornes de l'inductance au temps  $t = 2 \mu s$  si les conditions initiales sur la ligne étaient nulles.

### Question 14

Soit le circuit de la figure ci-dessous où le condensateur est initialement déchargé.

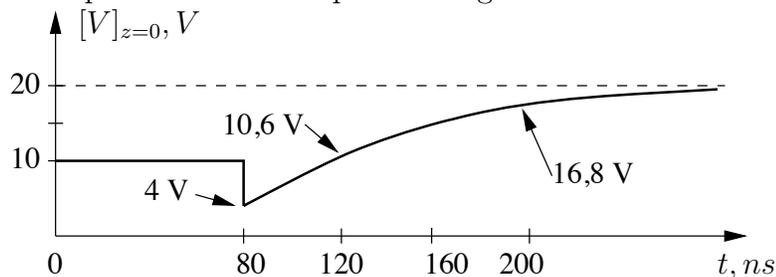


Déterminez la valeur de la tension à  $z = 0$  aux instants :  $t = 2^+ ns$ ,  $3 ns$  et  $\infty$  dans les deux cas suivants :

- $R_c = 150 \Omega$ ;
- $R_c = 50 \Omega$ .

### Question 15

Une charge inconnue est placée à l'une des extrémités d'une ligne de transmission à air et dont l'impédance caractéristique vaut  $50 \Omega$ . On injecte un échelon en tension de  $20 V$  à l'autre bout de la ligne et l'on observe l'évolution de la tension aux bornes de la source, sachant que celle-ci est adaptée à la ligne. Cette évolution est la suivante :



- Déduisez la valeur de la charge ;
- Calculez la longueur de la ligne.

### Question 16

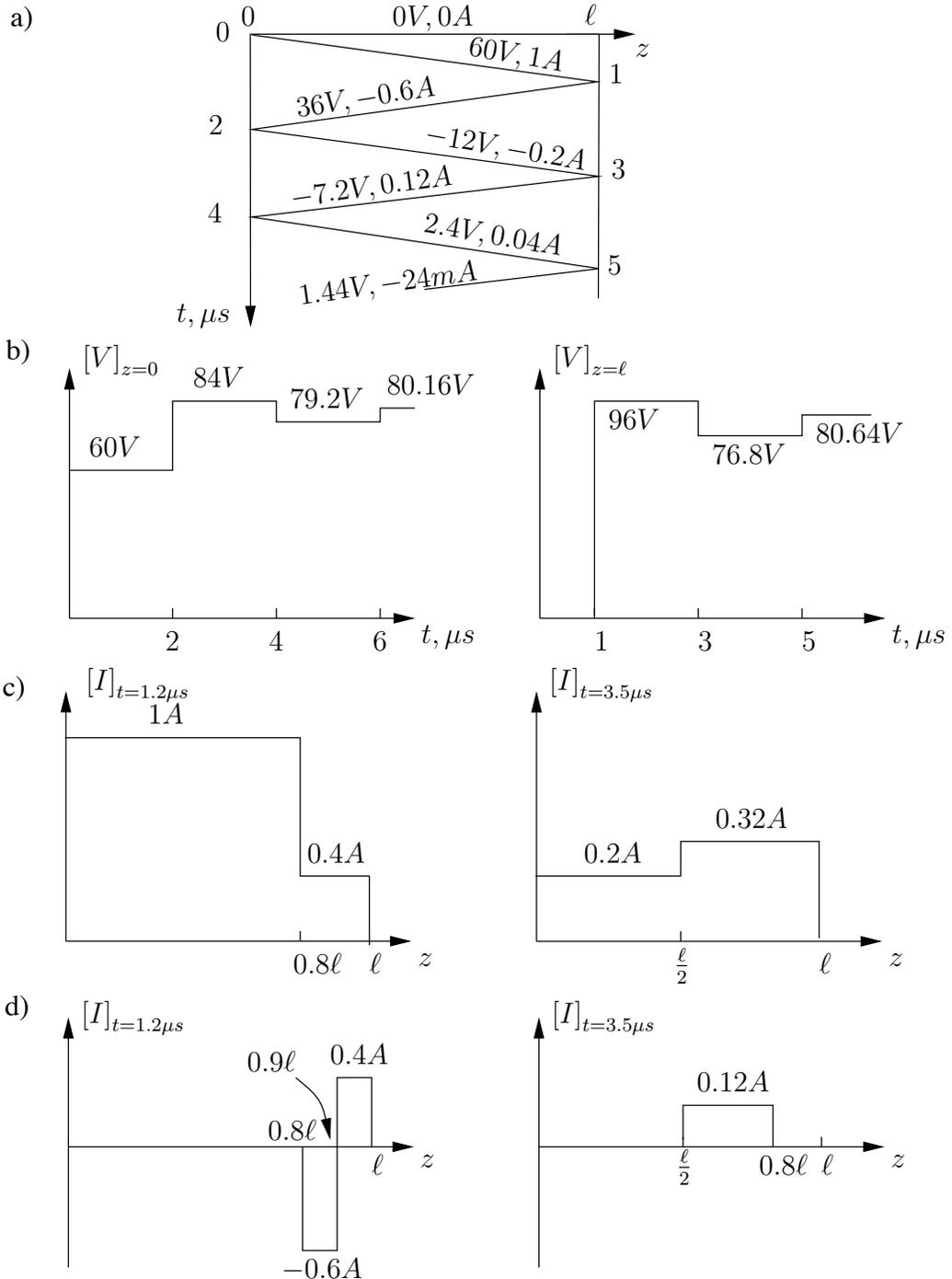
On place une inductance  $L$  en série telle une jonction à  $z = z_s$  sur une ligne de transmission de longueur  $\ell$  et d'impédance caractéristique  $Z_o$  terminée dans une charge  $R_c = Z_o$ . La source adaptée produit le signal  $v_g(t) = V_o u(t)$ .

Si les conditions initiales sont nulles, exprimez la tension en fonction du temps sur la ligne à la position  $z = z_s^+$ .

**Réponses :**

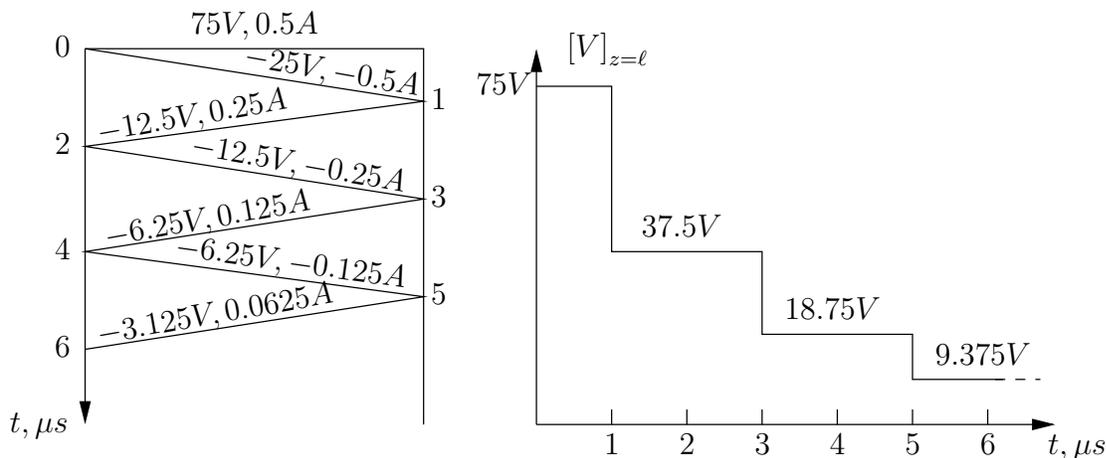
1. a)  $R_c = 40 \Omega$ ; b)  $R_c = 120 \Omega$ ; c)  $R_c = 60 \Omega$ .
2.  $V_o = 125 V$ ,  $R_g = 25 \Omega$ ,  $R_c = 60 \Omega$ ,  $T = 2 \mu s$ .
3.  $v_{ss}^+ = 60 V$ ,  $v_{ss}^- = -30 V$ ,  $i_{ss}^+ = 0.8 A$ ,  $i_{ss}^- = 0.4 A$ .

4.



5. a)  $l = 0.848 m$ ; b)  $Z_o = 77.66 \Omega$ .

6.

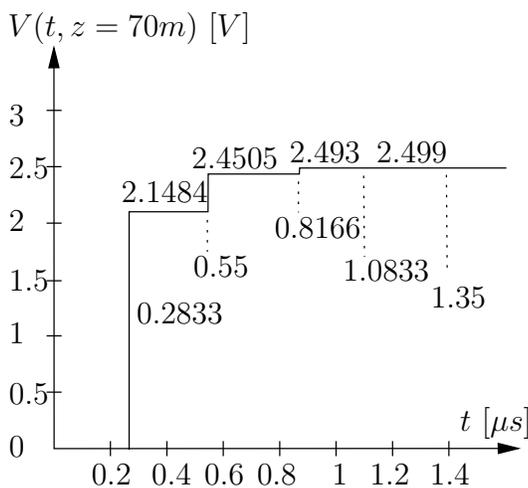
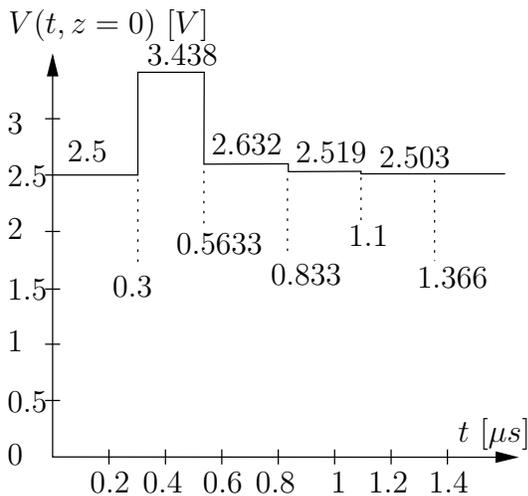


7. a)  $Z_{o2}/Z_{o1} = \frac{1}{9}$ ; b)  $Z_{o2}/Z_{o1} = \frac{3}{5}$ .

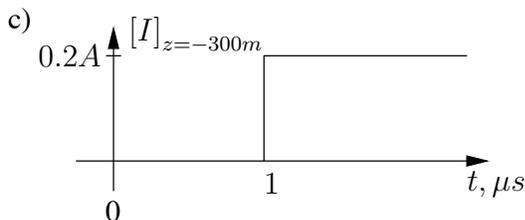
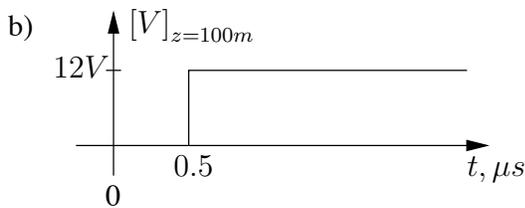
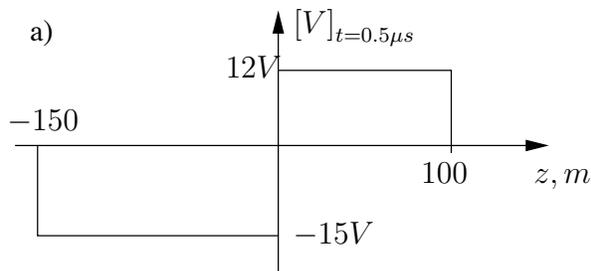
8. a)  $R = 20 \Omega$ ; b)  $P_2 = P_3 = \frac{1}{4}P_1$ ; c)  $\Gamma_{11} = 0.2$  donc  $\tau_{i21} = (0.8)(0.5) = 0.4$ .

9.  $V_1^- = 0.6V^+$ ,  $V_2^+ = 0.4V^+$ ,  $I_1^- = -0.012V^+$ ,  $I_2^+ = 0.004V^+$ .

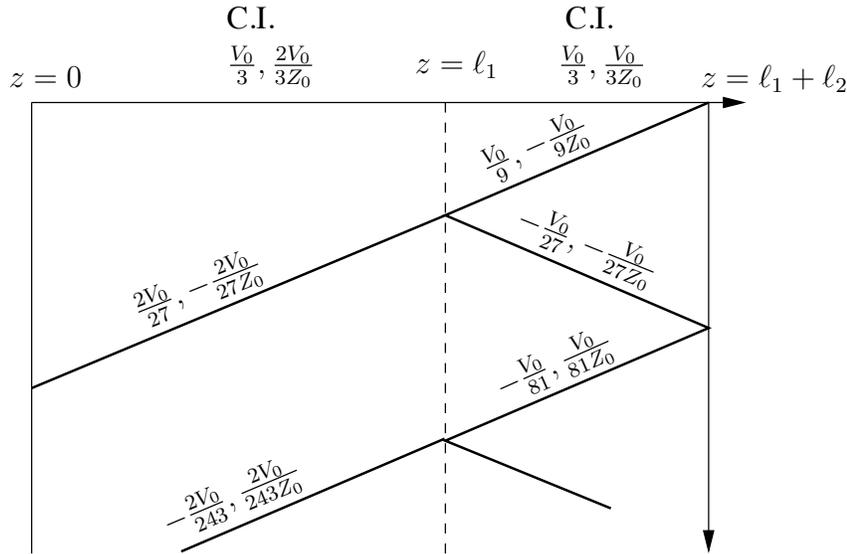
10.  $\Gamma_{11} = -\Gamma_{22} = 0.375$ ,  $\tau_{v21} = 1.375$ ,  $\tau_{v12} = 0.625$ .



11.  $V_1^- = -30 \frac{75}{60+15+75} = -15V$ ,  $V_2^+ = 30 \frac{60}{60+15+75} = 12V$ ,



12. a)  $R_s = Z_o/2$ ;  
 b) source courant  $i(t) = \frac{V_o}{6Z_o} u(t)$ ;  
 c) résistance parallèle au point de discontinuité égale à  $Z_o$ ;  
 d) une partie du courant va dans la ligne de transmission #3;  
 e)



13.  $v(z = \ell, t = 2 \mu s) = 12.13 \text{ V}$ .
14. a)  $v(z = 0, t = 2^+ ns) = 0 \text{ V}$ ,  $v(z = 0, t = 3 ns) = 7.3 \text{ V}$ ,  $v(z = 0, t = \infty) = 15 \text{ V}$   
 en fait  $v(z = 0, t) = 10u(t) + (5 + (-10 - 5)e^{-(t[ns]-2)/1.5}) u[t[ns] - 2]$   
 b)  $v(z = 0, t = 2^+ ns) = 0 \text{ V}$ , aucun écho en provenance de  $R_c$  à  $(z = 0, 7 = 3 ns)$  donc on a toujours  $v(z = 0, t = 3 ns) = 7.3 \text{ V}$ , après des réflexions multiples complexes au niveau du condensateur, ce dernier se comportera finalement comme un circuit ouvert d'où  $v(z = 0, t = \infty) = 10 \text{ V}$ .
15. a) RC série;  $R = 12.5 \Omega$  et  $C = 1.2 \text{ nF}$   
 b)  $\ell = 12 \text{ m}$ .
16.  $v(z = z_s^+, t > z_s/v_p) = \frac{V_o}{2} (1 - e^{-(2Z_o/L)(t-z_s/v_p)})$   
 alors que  $v(z = z_s^+, t < z_s/v_p) = 0$ .

# Chapitre 9

## Régime sinusoïdal permanent sur ligne

### 9.1 Introduction

Le régime transitoire discuté précédemment montrait qu'une fois le régime permanent établi, on continuait à dire que la tension ou le courant le long de la ligne était constitué de la superposition de deux signaux : l'un allant dans la direction positive et l'autre dans la direction négative. Ces deux signaux sont en réalité le résultat de sommes infinies des signaux réfléchis à chaque extrémité de la ligne. Cela reste toujours vrai, qu'importe la forme du signal produit par la source.

On peut donc poursuivre l'analyse du régime permanent en suivant la même démarche. Elle conduira inévitablement vers des séries mathématiques si on se fie aux expressions des  $v_{ss}^+$  ( $i_{ss}^+$ ) et  $v_{ss}^-$  ( $i_{ss}^-$ ). Ce n'est pas très commode d'autant plus que les charges étaient réelles – la présence d'une seule charge réactive accroît grandement la complexité du problème car le coefficient de réflexion d'une telle charge devient fonction du temps.

Et pourtant, le régime sinusoïdal permanent est si révélateur du comportement d'un circuit. On rappelle que la série de *Fourier* forme une base orthonormée permettant de représenter tout signal périodique comme une somme de signaux sinusoïdaux à différentes fréquences, relations de phase et amplitudes. En conséquence, le régime permanent pour toute forme de signal émis peut se retrouver à partir du comportement sinusoïdal.

Dans ce chapitre, on verra un utilitaire graphique encore largement employé aujourd'hui dès que l'effet des lignes de transmission doit être pris en compte : l'abaque de *Smith*. Mais avant, on reprend les notions des phaseurs pour déduire mathématiquement le résultat, en faire l'analyse dans le but de faciliter les correspondances avec l'abaque de *Smith*.

### 9.2 Tension et courant sur la ligne

On peut partir des équations en transformée de *Laplace* (8.7) et (8.8) en posant  $s = j\omega$  ; ou encore directement de (7.44) et (7.46). Elles sont ré-écrites ici pour une ligne sans

perte<sup>1</sup> :

$$\bar{V}(z) = \bar{V}^+ e^{-j\beta z} + \bar{V}^- e^{j\beta z} \quad (9.1)$$

$$\bar{I}(z) = \bar{I}^+ e^{-j\beta z} + \bar{I}^- e^{j\beta z} \quad (9.2)$$

$$= \frac{1}{Z_o} (\bar{V}^+ e^{-j\beta z} - \bar{V}^- e^{j\beta z}) \quad (9.3)$$

où  $\bar{V}^+ = V^+ e^{j\xi^+}$  et  $\bar{V}^- = V^- e^{j\xi^-}$  (de même pour  $\bar{I}^+$  et  $\bar{I}^-$ ).

Le développement des équations montre que la charge contribue seule à la relation vectorielle (module et argument) entre les signaux positifs et négatifs. Il convient donc de redéfinir les signaux avec un référentiel par rapport à la charge, soit :  $\bar{V}^+ = [\bar{V}^+]_{z=\ell}$ . Il suffit de faire un changement de variable et choisir  $d$ , la distance entre la charge et le point d'observation sur la ligne :

$$d = \ell - z . \quad (9.4)$$

L'onde positive reste toujours celle qui progresse en se rendant vers la charge et celle négative, vers la source. En terme de  $d$ , les solutions pour  $\bar{V}(d)$  et  $\bar{I}(d)$  sont données par :

$$\bar{V}(d) = \bar{V}^+ e^{+j\beta d} + \bar{V}^- e^{-j\beta d} \quad (9.5)$$

$$\bar{I}(d) = \frac{1}{Z_o} (\bar{V}^+ e^{+j\beta d} - \bar{V}^- e^{-j\beta d}) . \quad (9.6)$$

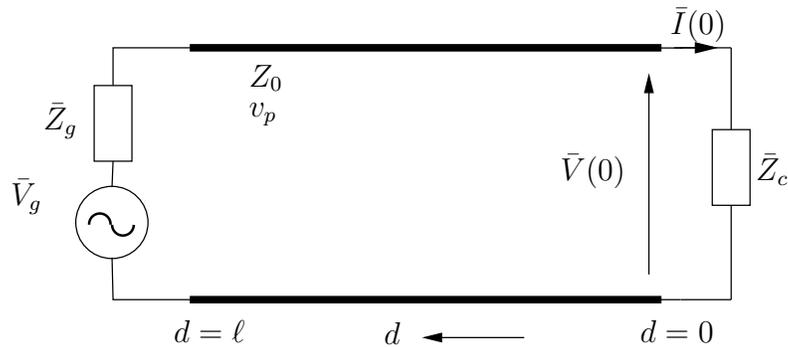


FIGURE 9.1 – Ligne de transmission terminée dans une charge complexe.

On considère maintenant, le cas où la ligne se termine dans une impédance complexe  $\bar{Z}_c$  (résistance et réactance série) comme sur la figure 9.1. On assume une source sinusoïdale placée à  $d = \ell$  depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint. Il faut respecter les conditions aux limites à  $d = 0$  :

$$\bar{V}(0) = \bar{Z}_c \bar{I}(0) . \quad (9.7)$$

De (9.5) et (9.6) avec  $d = 0$  et les conditions aux limites, on débouche sur :

$$\bar{V}^+ e^{j\beta(0)} + \bar{V}^- e^{-j\beta(0)} = \frac{\bar{Z}_c}{Z_o} (\bar{V}^+ e^{j\beta(0)} - \bar{V}^- e^{-j\beta(0)}) \quad (9.8)$$

$$\bar{V}^+ + \bar{V}^- = \frac{\bar{Z}_c}{Z_o} (\bar{V}^+ - \bar{V}^-) \quad (9.9)$$

<sup>1</sup>Les lignes avec pertes sont traitées en séparant les pertes ; on considère les pertes comme étant faibles ce qui fait que tous les paramètres autres que  $\alpha$  ( $Z_o$ ,  $v_p$  ou  $\beta$ ) sont pratiquement non modifiés.

puis, en isolant  $\bar{V}^-$  de  $\bar{V}^+$ , on obtient :

$$\bar{V}^- = \bar{V}^+ \underbrace{\frac{\bar{Z}_c - Z_o}{\bar{Z}_c + Z_o}}_{\bar{\Gamma}_c} . \tag{9.10}$$

Ainsi, comme on pouvait s'en douter, la condition aux limites à la charge implique un signal réfléchi dont la tension équivaut à celle du signal incident multipliée par le coefficient de réflexion de la charge. Donc :

$$\left[ \frac{\bar{V}^-}{\bar{V}^+} \right]_{d=0} = [\bar{\Gamma}_c]_{d=0}$$

ou plus simplement :

$$\frac{\bar{V}^-}{\bar{V}^+} = \bar{\Gamma}_c \tag{9.11}$$

car les définitions de chacune des variables ont été établies directement au niveau de la charge. Cette expression (9.11) devient invalide pour  $d \neq 0$  comme on le verra un peu plus tard.

Finalement, les solutions générales pour  $\bar{V}(d)$  et  $\bar{I}(d)$  s'écrivent ainsi :

$$\bar{V}(d) = \bar{V}^+ (e^{j\beta d} + \bar{\Gamma}_c e^{-j\beta d}) \tag{9.12}$$

$$\bar{I}(d) = \frac{\bar{V}^+}{Z_o} (e^{j\beta d} - \bar{\Gamma}_c e^{-j\beta d}) . \tag{9.13}$$

La valeur de  $\bar{V}^+$  dépend de ce qui se passe à la source, i.e. son impédance interne  $\bar{Z}_g$  et son signal *Thévenin*  $\bar{V}_g$ .

### 9.3 Court-circuit et circuit-ouvert

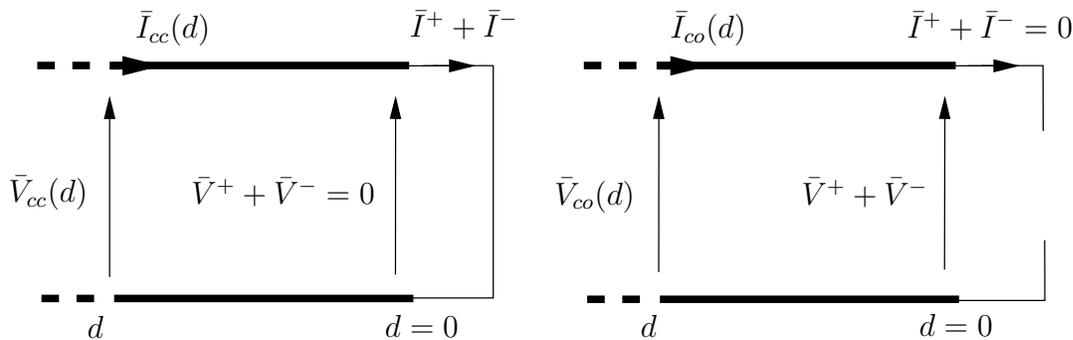


FIGURE 9.2 – Ligne de transmission terminée dans un court-circuit ou dans un circuit ouvert.

Le court-circuit et le circuit-ouvert constituent deux charges pathétiques qui sont traitées simultanément comme sur la figure 9.2. Les conditions aux limites à  $d = 0$  sont plus que simples :

- une tension  $[\bar{V}(d)]_{d=0}$  nulle avec le court-circuit ;
- un courant  $[\bar{I}(d)]_{d=0}$  nul avec le circuit-ouvert.

On obtient les coefficients de réflexion<sup>2</sup>. On peut maintenant exprimer la tension et le courant partout le long de la ligne lorsqu'elle est court-circuitée (indice inférieur *cc*) autant qu'en circuit-ouvert (indice inférieur *co*). Il suffit de prendre  $\bar{\Gamma}_c = \mp 1$  respectivement dans (9.12) et (9.13) :

$$\bar{V}_{cc}(d) = \bar{V}^+ e^{j\beta d} - \bar{V}^+ e^{-j\beta d} = 2j \bar{V}^+ \sin(\beta d) \quad (9.14)$$

$$\bar{I}_{cc}(d) = \frac{1}{Z_o} (\bar{V}^+ e^{j\beta d} + \bar{V}^+ e^{-j\beta d}) = 2 \frac{\bar{V}^+}{Z_o} \cos(\beta d) \quad (9.15)$$

et

$$\bar{V}_{co}(d) = \bar{V}^+ e^{j\beta d} + \bar{V}^+ e^{-j\beta d} = 2\bar{V}^+ \cos(\beta d) \quad (9.16)$$

$$\bar{I}_{co}(d) = \frac{1}{Z_o} (\bar{V}^+ e^{j\beta d} - \bar{V}^+ e^{-j\beta d}) = 2j \frac{\bar{V}^+}{Z_o} \sin(\beta d) . \quad (9.17)$$

Voici les mêmes expressions ramenées dans le domaine temporel :

$$v_{cc}(t, d) = 2V^+ \sin(\beta d) \cos(\omega t + \xi^+ + \pi/2)$$

$$i_{cc}(t, d) = 2 \frac{V^+}{Z_o} \cos(\beta d) \cos(\omega t + \xi^+)$$

$$v_{co}(t, d) = 2V^+ \cos(\beta d) \cos(\omega t + \xi^+)$$

$$i_{co}(t, d) = 2 \frac{V^+}{Z_o} \sin(\beta d) \cos(\omega t + \xi^+ + \pi/2) .$$

Ces résultats ont plusieurs conséquences importantes. Il convient de prendre le temps de les analyser en détails :

- Sauf à des positions bien spécifiques distancées d'une demi-longueur d'onde (c'est le cas à la charge)  $d = 0, \lambda/2, \lambda, \dots$ , la tension sur une ligne court-circuitée est non-nulle! Son amplitude atteint jusqu'à deux fois celle de  $\bar{V}^+$ .
- Même qu'à certains endroits (exactement au milieu de deux positions consécutives où la tension est nulle)  $d = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$ , le courant devient nul sur la même ligne court-circuitée!
- À l'inverse, le courant est non-nul partout sauf immédiatement au bout de la ligne et à tous les multiples  $\lambda/2$  d'un circuit ouvert  $d = 0, \lambda/2, \lambda, \dots$ ! Il possède une amplitude maximale correspondant à  $2V^+/Z_o$ .

<sup>2</sup>On vérifie aisément les conditions aux limites pour ces deux cas desquelles sont déduits les coefficients de réflexion :

$$\bar{V}_{cc}(0) = \bar{V}^+ e^{j\beta(0)} + \bar{V}^- e^{-j\beta(0)} = \bar{V}^+ + \Gamma_{c_{cc}} \bar{V}^+ = 0 \longrightarrow \Gamma_{c_{cc}} = -1$$

$$\bar{I}_{co}(0) = \frac{1}{Z_o} (\bar{V}^+ e^{j\beta(0)} - \bar{V}^- e^{-j\beta(0)}) = \frac{1}{Z_o} (\bar{V}^+ - \Gamma_{c_{co}} \bar{V}^+) = 0 \longrightarrow \Gamma_{c_{co}} = 1$$

- On rencontre une tension nulle à mi-chemin entre deux positions consécutives de courant nul, d'abord à  $\lambda/4$  du circuit-ouvert puis aux multiples de  $\lambda/2$  de cette position  $d = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4 \dots!$
- La tension et le courant sont déphasés de  $90^\circ$  en avance ou en retard (sauf aux points de tension ou courant nul évidemment); on reconnaît là un comportement lié à une charge purement réactive et pourtant, il s'agit d'un court-circuit ou d'un circuit-ouvert!
- Pire encore, le comportement, qui se répète à toutes les demi-longueurs, est identique tant pour l'un que pour l'autre à  $\lambda/4$  près; les deux charges sont donc similaires!

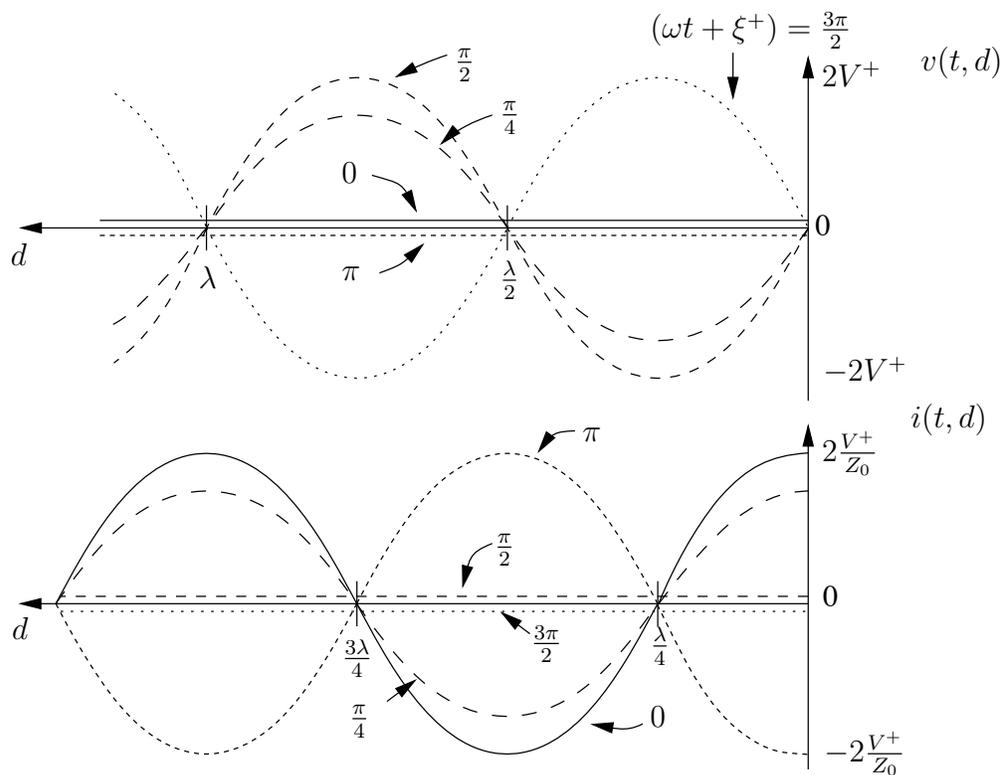


FIGURE 9.3 – Variation de la tension et du courant sur une ligne de transmission court-circuitée.

La figure 9.3 illustre comment varie la tension et le courant le long de la ligne court-circuitée en des temps bien spécifiques tels que  $(\omega t + \xi^+) = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$  et  $3\pi/2$ . Une comparaison peut être faite avec le battement des cordes frappées ou pincées d'un instrument de musique; surtout si une condition aux limites dure (du genre court-circuit ou circuit-ouvert) existe au niveau de la source pour entretenir le mouvement<sup>3</sup>.

On imagine sans peine que le rapport de la tension et du courant sur la ligne ne reste pas constant car il devient aussi une fonction de la distance. Ainsi, l'impédance équivalente présentée par la ligne terminée par une charge au niveau de la source  $\bar{Z}_{in}$ ,

<sup>3</sup>Voilà la solution au mouvement perpétuel, encore faut-il que la ligne soit sans perte...

diffère de l'impédance de charge ; elle correspond à :

$$\bar{Z}_{in} = \frac{\bar{V}(\ell)}{\bar{I}(\ell)} . \tag{9.18}$$

Pour le court-circuit et le circuit-ouvert, on obtient à  $d = \ell$  :

$$\bar{Z}_{in_{cc}} = \frac{2j \bar{V}^+ \sin(\beta\ell)}{2 \frac{\bar{V}^+}{Z_o} \cos(\beta\ell)} = j Z_o \tan(\beta\ell) \tag{9.19}$$

$$\bar{Z}_{in_{co}} = \frac{2 \bar{V}^+ \cos(\beta\ell)}{2j \frac{\bar{V}^+}{Z_o} \sin(\beta\ell)} = -j Z_o \cot(\beta\ell) . \tag{9.20}$$

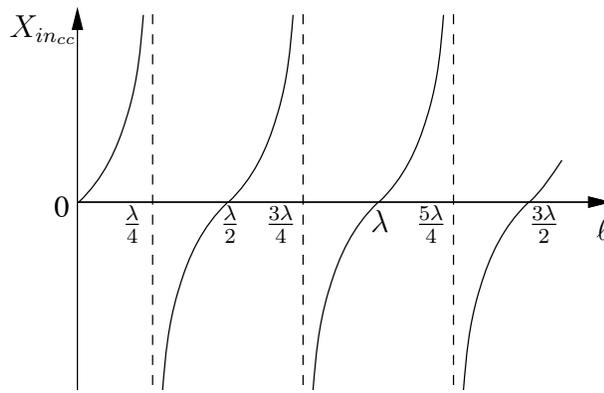


FIGURE 9.4 – Impédance équivalente d’une ligne avec un court-circuit selon la longueur de la ligne.

On remarque bien le comportement réactif de ces charges qui se répète à tous les  $\lambda/2$ , et leur équivalence (la tangente et la cotangente ont un graphe identique mais déphasé de  $90^\circ$ ). L’impédance équivalente présentée par une ligne court-circuitée est dessinée sur la figure 9.4 en faisant varier la longueur de la ligne. Le court-circuit redevient un court-circuit si la ligne a une longueur multiple de  $\lambda/2$ . Par contre avec une longueur de  $\lambda/4$  et aussi incroyable que cela puisse paraître, la source “voit” un circuit-ouvert ; le courant mesuré à la sortie de la source est nul !

**Exemple 9.1**

Un court-circuit agit comme une réactance pure, inductive autant que capacitive, à l’entrée d’une ligne. Soit  $X_o$  la valeur de cette réactance pure obtenue avec une longueur de ligne  $\ell_o$ .

- Démontrez qu’une réactance pure  $X_o$  devient un court-circuit à une distance égale à  $\lambda/2 - \ell_o$ .

De (9.19), on réarrange pour exprimer  $\ell_o$  en terme de  $X_o$  :

$$\ell_o = \frac{1}{\beta} \underbrace{\arctan\left(\frac{X_o}{Z_o}\right)}_{\kappa} .$$

Si la tension tombe à zéro lorsque  $\ell = \lambda/2 - \ell_o$  (donc  $\beta\ell = \pi - \beta\ell_o = \pi - \kappa$ ), la démonstration est suffisante car seul un court-circuit force une tension nulle. Avant de procéder, on recherche d'abord la seule inconnue nécessaire manquante soit  $\bar{\Gamma}_c$ . De (8.22) avec  $s = j\omega$ , ou de (9.10), on tire :

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_c &= \frac{jX_o - Z_o}{jX_o + Z_o} \\ &= \frac{\sqrt{Z_o^2 + X_o^2} \angle(\pi - \arctan(X_o/Z_o))}{\sqrt{Z_o^2 + X_o^2} \angle(\arctan(X_o/Z_o))} = \underset{\uparrow}{1} \angle(\pi - 2\kappa) = -e^{-2j\kappa}.\end{aligned}$$

Donc, dans (9.12) :

$$\begin{aligned}\bar{V}\left(\frac{\lambda}{2} - \ell_o\right) &= \bar{V}^+ \left( \underbrace{e^{j\pi - j\beta\ell_o}}_{-e^{-j\kappa}} + (-e^{-2j\kappa}) \underbrace{e^{-j\pi + j\beta\ell_o}}_{-e^{j\kappa}} \right) \\ &= \bar{V}^+ (-e^{-j\kappa} + e^{-j\kappa}) = 0.\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

On peut aussi voir le problème sous un aspect plus physique sans vraiment utiliser des expressions mathématiques. Il suffit de remplacer la réactance  $X_o$  par son équivalent, i.e un bout de ligne de transmission d'une longueur  $\ell_o$  terminé par un court-circuit. Ainsi, le système revient en une ligne d'une longueur totale de  $(\lambda/2 - \ell_o) + \ell_o = \lambda/2$  court-circuitée. Or, le court-circuit se répétant à tous les multiples de  $\lambda/2$ , c'est donc un court-circuit qui est effectivement vu à l'entrée de la ligne.

### Exemple 9.2

Un court-circuit se produit quelque part sur une ligne avec diélectrique à air. On alimente la ligne avec une source sinusoïdale à fréquence variable (mais d'amplitude uniforme sur toute la gamme à vide). L'amplitude de la tension lue à l'entrée de la ligne, devient maximale à 3.3 MHz et minimale (même nulle) à 3.6 MHz si on balaie la gamme en augmentant graduellement la fréquence.

- Déterminez à quelle distance de l'entrée se trouve le court-circuit.

Une manière de voir le problème consiste à analyser ce qui se produit afin d'établir une équation générale. D'abord, l'amplitude de la tension est maximale lorsque l'impédance équivalente présentée à l'entrée de la ligne possède le module le plus élevé. Ici, cette impédance équivalente correspond à un circuit-ouvert. L'amplitude minimale de la tension survient lorsque le court-circuit réapparaît à l'entrée. Sous forme d'équations, cela se traduit :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{2\pi f_{cc}\ell}{v_p}\right) &= 0 \\ \tan\left(\frac{2\pi f_{co}\ell}{v_p}\right) &\rightarrow \infty.\end{aligned}$$

La fonction tangente passe par “0” puis par  $\pm\infty$  à chaque interval de  $90^\circ$ . On peut donc dériver une équation qui donne la longueur, étant donnée la séparation en fréquence entre les faits où le court-circuit et le circuit-ouvert sont présentés à l’entrée :

$$\left| \frac{2\pi f_{cc}\ell}{v_p} - \frac{2\pi f_{co}\ell}{v_p} \right| = \pi/2$$

d’où finalement :

$$\ell = \frac{v_p}{4|f_{cc} - f_{co}|} . \tag{9.21}$$

Il faut voir qu’à chaque fois que la fréquence augmente d’une valeur de  $|f_{cc} - f_{co}|$ , l’impédance vue passe de court-circuit à circuit-ouvert ou vice-versa. En fait, à  $f = 0$ ,  $\bar{Z}_{in} = 0$  alors qu’à  $f = 0.3 \text{ MHz}$ , elle équivaut maintenant au circuit-ouvert ; elle redevient un court-circuit à  $f = 0.6 \text{ MHz}$  et ainsi de suite. En remplaçant les quantités par leur valeur, on aboutit à :

$$\ell = \frac{3 \times 10^8}{4(0.3 \times 10^6)} = 250 \text{ m} .$$

Une autre remarque, celle-là reliée au chapitre sur le comportement quasi-statique. On revient sur la section spéciale 4.8 qui exprimait l’impédance à l’entrée de deux structures. Il s’avère que la structure assimilée à l’inductance ressemble à celle d’une ligne à plaques parallèles (largeur  $w$  et hauteur  $d$  pour une impédance caractéristique  $Z_o = \eta \frac{d}{w}$  selon le tableau 7.1) de longueur  $\ell$  terminée dans un court-circuit. On voit d’ailleurs la ressemblance complète entre l’impédance équivalente  $\bar{Z}_{incc}$  de (9.19) et l’impédance vue telle qu’indiquée par (4.67). La même conclusion s’applique pour la structure capacitive qui est en fait une ligne à plaques parallèles en circuit-ouvert d’où la ressemblance entre (9.20) et (4.75).

### 9.3.1 Puissance instantanée et moyenne

Pour exprimer la puissance instantanée, on multiplie simplement la tension par le courant. Pour le court-circuit par exemple, cela donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{cc}(t, d) &= v(t, d)i(t, d) \\ &= 4 \frac{(V^+)^2}{Z_o} \sin(\beta d) \cos(\beta d) \cos(\omega t + \xi^+ + \pi/2) \cos(\omega t + \xi^+) \\ &= - \frac{(V^+)^2}{Z_o} \sin(2\beta d) \sin(2\omega t + 2\xi^+) . \end{aligned} \tag{9.22}$$

Il apparaît clairement que la puissance instantanée oscille deux fois plus vite que la tension ou le courant en temps autant qu’en espace. L’explication est simple : la tension et le courant sont déphasés de  $90^\circ$  dans le temps comme dans l’espace. Lorsque l’un est maximal (en valeur absolue), l’autre est nul ce qui équivaut à une puissance instantanée nulle à une cadence deux fois plus élevée dans chacun des domaines.

- Que ce soit avec le court-circuit ou avec le circuit-ouvert, toute la puissance incidente est retournée car la charge n'absorbe aucune puissance. De plus, puisque la ligne est sans perte, il faut absolument que le bilan de puissance en tout point sur la ligne soit nul :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}(d) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t, d) dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \frac{(V^+)^2}{Z_o} \sin(2\beta d) \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega} \sin(2(\omega t + \xi^+)) dt}_0 = 0. \end{aligned} \quad (9.23)$$

- Évidemment, avec une ligne à pertes, le bilan de puissance augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la charge puisque la puissance de l'onde positive croît en fonction de  $d$  et inversement pour celle de l'onde négative. Cette affirmation demeure vraie pour toutes les charges, exception faite de la charge adaptée qui ne retourne aucune puissance.
- Pour une charge ayant une partie résistive non-nulle, on rajoute la puissance active absorbée par la résistance au bilan de puissance produit par la ligne (à pertes). Si la ligne est sans perte, le bilan de puissance est le même partout sur la ligne ; il indique la puissance active transférée à la charge.

## 9.4 Paramètres du régime sinusoïdal permanent

L'analyse avec le court-circuit et le circuit-ouvert a fait ressortir l'impact d'une ligne de transmission plus longue que la longueur d'onde d'un signal sinusoïdal. Plusieurs paramètres vont être définis afin d'approfondir cette vision de la propagation guidée dès que la longueur de la ligne dépasse une fraction de la longueur d'onde.

### 9.4.1 Coefficient de réflexion généralisé

On a défini l'impédance équivalente présentée par une ligne  $\bar{Z}_{in}$  ; on a même exprimé celle produite par un court-circuit ou d'un circuit-ouvert. On pourrait généraliser le concept en parlant de l'impédance vue sur la ligne à une distance  $d$  de la charge, notée  $\bar{Z}_c(d)$  :

$$\bar{Z}_c(d) = \frac{\bar{V}(d)}{\bar{I}(d)}. \quad (9.24)$$

Il est toutefois très difficile d'exprimer l'impédance vue à partir de la charge  $\bar{Z}_c$  et de la distance  $d$ . Le plus simple consiste à passer par le coefficient de réflexion généralisé de la charge  $\bar{\Gamma}_c(d)$  qui représente :

- le rapport de la tension du signal réfléchi sur celle du signal incident à la position  $d$
- le coefficient de réflexion de l'impédance vue à la position  $d$ .

De (9.12), on déduit rapidement :

$$\bar{\Gamma}_c(d) = \frac{\bar{\Gamma}_c \bar{V}^+ e^{-j\beta d}}{\bar{V}^+ e^{j\beta d}} = \bar{\Gamma}_c e^{-j2\beta d} . \quad (9.25)$$

Le module du coefficient de réflexion généralisé demeure constant et équivaut à celui de la charge parce que la ligne est sans perte. Par contre, l'argument décroît à raison de  $360^\circ$  par demi-longueur d'onde. Ces propriétés sont résumées dans les deux équations ci-dessous :

$$\Gamma_c(d) = \Gamma_c \quad (9.26)$$

$$\angle \bar{\Gamma}_c(d) = \underbrace{\angle \bar{\Gamma}_c}_{\xi_c} - 2\beta d . \quad (9.27)$$

Pour obtenir l'impédance vue  $\bar{Z}_c(d)$ , l'idée repose sur l'unicité de la solution inverse : chaque charge possédant un coefficient de réflexion unique, à chaque coefficient de réflexion correspond une et une seule charge étant donnée l'impédance caractéristique de la ligne. Donc :

$$\bar{Z}_c(d) \Leftrightarrow \bar{\Gamma}_c(d)$$

avec

$$\bar{\Gamma}_c(d) = \frac{\bar{Z}_c(d) - Z_o}{\bar{Z}_c(d) + Z_o} \quad (9.28)$$

$$\bar{Z}_c(d) = \frac{\bar{V}(d)}{\bar{I}(d)} = Z_o \frac{1 + \bar{\Gamma}_c(d)}{1 - \bar{\Gamma}_c(d)} . \quad (9.29)$$

### 9.4.2 Diagramme d'onde stationnaire

La présence d'une onde stationnaire sur la ligne est un phénomène marquant. L'amplitude du signal change en fonction de la distance séparant le point d'observation et la charge. Pour le court-circuit, l'amplitude de la tension ou du courant peut être nulle ou valoir le double de celle avec une charge adaptée  $V^+$  :

$$V_{cc}(d) = 2 V^+ |\sin(\beta d)| \quad (9.30)$$

$$I_{cc}(d) = 2 \frac{V^+}{Z_o} |\cos(\beta d)| . \quad (9.31)$$

Les tracés de ces quantités selon  $d$  sont connus sous le nom de diagrammes d'onde stationnaire. Le mot stationnaire est employé parce que les tracés sont invariants temporellement. Ceux produits par le court-circuit sont dessinés sur la figure 9.5. Les variations temporelles de la tension à certains points le long de la ligne apparaissent en encarts sur la figure. On remarque que l'amplitude des oscillations sinusoïdales – qui ont toutes la même fréquence, celle du signal émis – change ; sa valeur correspond à celle indiquée sur le diagramme d'onde stationnaire à la position où se fait l'observation. Pour comparaison, les diagrammes d'onde stationnaire du circuit-ouvert ressemblent à ceux sur la figure mais avec un décalage de  $\lambda/4$ .

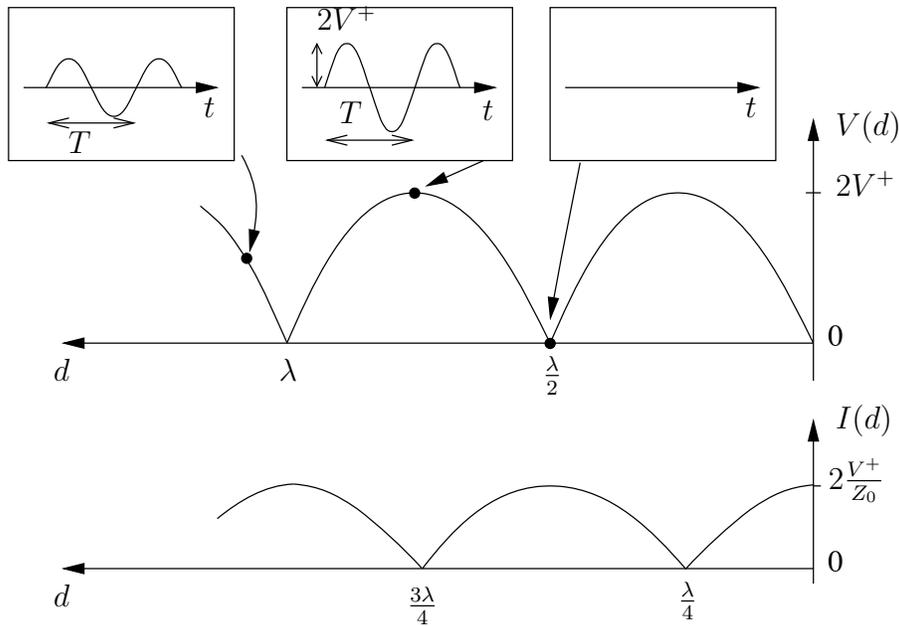


FIGURE 9.5 – Diagrammes d’onde stationnaire de la tension et du courant sur une ligne de transmission court-circuitée.

Pour une charge quelconque, un diagramme d’onde stationnaire est également présent, avec des caractéristiques similaires, mais il sera en général moins prononcé que pour un court-circuit ou un circuit-ouvert<sup>4</sup> tel qu’il apparaît sur la figure 9.6.

- L’amplitude maximale  $V_{max}$  ( $I_{max}$ ) ne vaut pas le double de  $V^+$  ( $I^+ = V^+/Z_o$ ) et l’amplitude minimale  $V_{min}$  ou  $I_{min}$  est différente de zéro :

$$0 \leq V_{min} \leq V^+ \quad 0 \leq I_{min} \leq I^+$$

$$V^+ \leq V_{max} \leq 2V^+ \quad I^+ \leq I_{max} \leq 2I^+ .$$

- Le maximum de tension ou de courant ne se situe pas nécessairement à la charge mais quelque part entre la charge et  $\lambda/2$ . La même remarque s’applique pour le minimum qui se trouve toujours en plein milieu entre deux maxima consécutifs.
- Les diagrammes de la tension et du courant demeurent toujours similaires outre le décalage de  $\lambda/4$  avec une échelle des amplitudes différente à cause de la division par  $Z_o$ .
- Le tracé ne représente pas une sinusoïde car les creux sont plus étroits que les sommets; à la limite comme avec le court-circuit et le circuit-ouvert, l’allure sera celle d’un sinus redressé.

Pour mieux comprendre l’évolution de l’onde stationnaire, on se réfère au plan complexe du coefficient de réflexion généralisé. Il faut bien voir que le signal observé sur la

<sup>4</sup>En fait, toutes les charges qui ont une partie résistive nulle créent un diagramme d’onde stationnaire identique à celui du court-circuit mais seulement décalé.

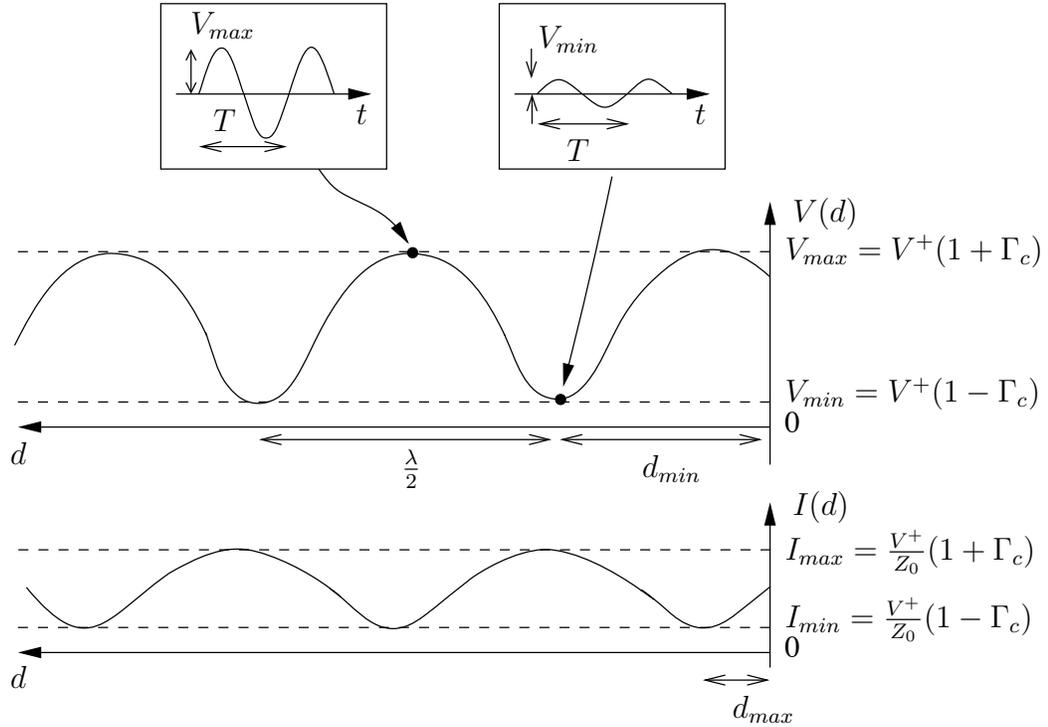


FIGURE 9.6 – Diagrammes d’onde stationnaire de la tension et du courant sur une ligne de transmission terminée dans une charge complexe.

ligne est le résultat de l’interférence entre, d’une part, le signal incident et d’autre part, le signal réfléchi. À certains endroits, les signaux sont en phase – ce qui produit un sommet – mais à d’autres, ils deviennent hors-phase – produisant les creux. Si l’amplitude de la réflexion est identique à celle de l’incidente alors la combinaison des deux entraîne des variations maximales<sup>5</sup> qui vont de zéro à deux fois l’amplitude du signal incidente. Dans le plan complexe, on additionne vectoriellement les deux phaseurs en considérant le déphasage entre eux. Ce déphasage correspond à celui du coefficient de réflexion généralisé car :

$$\bar{V}(d) = \bar{V}^+ e^{j\beta d} (1 + \bar{\Gamma}_c e^{-j2\beta d}) \tag{9.32}$$

$$= \bar{V}^+ e^{j\beta d} (1 + \bar{\Gamma}_c(d)) \tag{9.33}$$

$$\bar{I}(d) = \frac{\bar{V}^+}{Z_o} e^{j\beta d} (1 - \bar{\Gamma}_c(d)) . \tag{9.34}$$

Or, on s’intéresse uniquement au module d’où :

$$V(d) = V^+ |1 + \bar{\Gamma}_c(d)| \tag{9.35}$$

$$I(d) = \frac{V^+}{Z_o} |1 - \bar{\Gamma}_c(d)| . \tag{9.36}$$

Pour tracer le diagramme d’onde stationnaire, il est suffisant de considérer les quantités  $|1 \pm \bar{\Gamma}_c(d)|$  puisque  $V^+$  et  $Z_o$  représentent des constantes.

<sup>5</sup>On convient que la réflexion a toujours une amplitude plus faible, à la limite égale à celle de l’incidente.

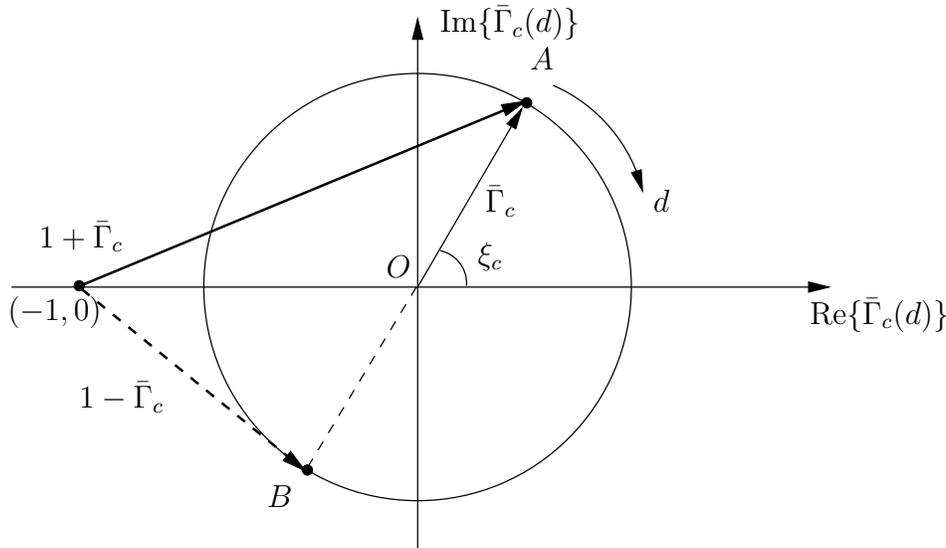


FIGURE 9.7 – Sommes vectorielles dans le plan complexe de  $\bar{\Gamma}_c(d)$  pour dessiner les diagrammes d'onde stationnaire.

Ainsi la tension observée devient proportionnelle à la longueur du vecteur résultant de la somme du vecteur  $(1 + j0)$  et de  $\bar{\Gamma}(d)$  dans le plan complexe tel qu'il apparaît sur la figure 9.7. On déphase le coefficient de réflexion généralisé de  $180^\circ$  avant de le sommer avec le vecteur  $(1 + 0j)$  pour le courant. À  $d = 0$ , le coefficient de réflexion généralisé est égal à celui de la charge (le point  $A$  sur la figure qui devient le point  $B$  lorsqu'inversé). Au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la charge, le point  $A$  se déplace sur le cercle à cause du module constant de  $\bar{\Gamma}_c(d)$ . Le vecteur du coefficient de réflexion généralisé pivote donc dans le sens horaire à raison d'une rotation par demi-longueur d'onde à cause la variation de son argument suivant  $(-2\beta d)$ .

- À certains endroits, lorsque le point  $A$  croise l'axe des réels positifs i.e. lorsque :

$$(\xi_c - 2\beta d_{max}) = 0, -2\pi, -4\pi, \dots \tag{9.37}$$

la tension observée atteint sa plus grande amplitude  $V(d_{max}) = V_{max}$  ; le point  $B$  croise aussi l'axe des réels mais du côté négatif de sorte que le courant a alors une amplitude minimale  $I_{min}$ .

- Et vice-versa aux endroits où le point  $A$  croise l'axe des réels négatifs où :

$$(\xi_c - 2\beta d_{min}) = -\pi, -3\pi, -5\pi, \dots \tag{9.38}$$

l'amplitude de la tension devient minimale  $V(d_{min}) = V_{min}$  et celle du courant, maximale  $I_{max}$ .

- La tension et le courant sont en phase qu'aux endroits des extrema, et nullement ailleurs.

Ces valeurs limites de tension et de courant valent donc :

$$V_{min} = V^+(1 - \Gamma_c) \tag{9.39}$$

$$V_{max} = V^+(1 + \Gamma_c) \tag{9.40}$$

$$I_{min} = \frac{V^+}{Z_o}(1 - \Gamma_c) \tag{9.41}$$

$$I_{max} = \frac{V^+}{Z_o}(1 + \Gamma_c) . \tag{9.42}$$

**Exemple 9.3**

Soit une ligne de transmission ayant  $Z_o = 50\Omega$  connectée à une source sinusoïdale d'impédance interne  $\bar{Z}_g = 80\Omega$ . La source débite à vide un signal de  $3V_{cr\hat{e}te}$  d'une fréquence telle que la ligne a une longueur électrique de  $0.8\lambda$ . Le coefficient de réflexion généralisé de la charge à l'entrée de la ligne vaut  $0.6\angle 130^\circ$ .

- Déterminez la valeur de la charge et celle vue à l'entrée de la ligne.

Il vaut mieux commencer par trouver  $\bar{Z}_c(0.8\lambda)$  car on connaît le coefficient de réflexion à cet endroit. De (9.29) :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_c(0.8\lambda) &= 50 \frac{1 + 0.6\angle 130^\circ}{1 - \underbrace{0.6\angle 130^\circ}_{-0.386+j0.460}} = 50 \frac{0.614 + j0.460}{1.386 - j0.460} \\ &= 50 \frac{0.767\angle 36.8^\circ}{\underbrace{1.460\angle -18.35^\circ}_{0.525\angle 55.15^\circ}} = (15 + j21.6)\Omega \end{aligned}$$

Pour calculer  $\bar{Z}_c$ , on détermine d'abord le coefficient de réflexion à la charge (attention aux angles exprimés en degrés et en radians) :

$$\bar{\Gamma}_c = \bar{\Gamma}_c(0.8\lambda) e^{j2\beta(0.8\lambda)} = 0.6 e^{j2.27+j(4\pi)(0.8)} = 0.6\angle 12.322 \text{ soit } 346^\circ .$$

On refait comme précédemment de (9.29) :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_c &= 50 \frac{1 + 0.6\angle 346^\circ}{1 - \underbrace{0.6\angle 346^\circ}_{0.582-j0.145}} = 50 \frac{1.589\angle -5.24^\circ}{0.442\angle 19.16^\circ} \\ &= 50 (3.59\angle -24.4^\circ) = (163.5 - j74.2)\Omega \end{aligned}$$

- De la réponse sur  $\bar{Z}_c$ , déduisez la plus petite distance (en termes de longueur d'onde) de la charge à laquelle l'amplitude de la tension devient minimale et la valeur de cette amplitude.

L'amplitude de la tension atteint son minimum lorsque les signaux  $\bar{V}^+$  et  $\bar{V}^-$  sont en opposition de phase. Selon (9.38), la plus petite distance où cette situation se produit, est  $\xi_c = \arg\{\bar{\Gamma}_c\}$ , lequel vaut  $12.322 \text{ rad}$  (ou  $-0.244 \text{ rad}$ ) :

$$(-0.244) - 2\beta \min\{d_{min}\} = -\pi$$

donc :

$$\min\{d_{min}\} = 0.231\lambda .$$

Quant à la valeur de cette amplitude, elle est donnée par (9.39). La connaissance de  $V^+$  est requise. Il faut obéir à la condition frontière à la sortie de la source i.e. à  $d = \ell$  :

$$\bar{V}_g - \bar{Z}_g \bar{I}(\ell) = \bar{V}(\ell) .$$

On suppose  $\bar{V}_g = 3\angle 0 = 3$  et on prend (9.33) et (9.34) :

$$\begin{aligned} 3 - 80 \left( \frac{\bar{V}^+}{50} e^{j\beta\ell} (1 - \bar{\Gamma}_c e^{-j2\beta\ell}) \right) &= \bar{V}^+ e^{j\beta\ell} (1 + \bar{\Gamma}_c e^{-j2\beta\ell}) \\ 3 &= \bar{V}^+ e^{j\beta\ell} (2.6 - \underbrace{0.6 \bar{\Gamma}_c e^{-j2\beta\ell}}_{0.6\angle 130^\circ}) \end{aligned}$$

d'où :

$$V^+ = \frac{3}{|2.6 - 0.36\angle 130^\circ|} = \frac{3}{|2.83 - j0.28|} = 1.055 \text{ V} .$$

Finalement dans (9.39) :

$$V_{min} = 1.055(1 - 0.6) = 0.422 \text{ V} .$$

On remarque que  $V^+$  (n'oubliez pas qu'il faut sous-entendre  $V_{ss}^+$  car on traite de régime sinusoïdal permanent dans ce chapitre) ne correspond pas à  $V^o$ , le signal de départ en régime transitoire. Sans adaptation du côté de la source,  $V^+$  et  $V^o$  sont différents car il y a d'autres réflexions à la source. On démontre même que  $V^+$  varie selon la fréquence.

### 9.4.3 Rapport d'onde stationnaire

Selon la charge, le signal maximum et le signal minimum sur la ligne peut varier. Le rapport d'onde stationnaire, en abrégiation *SWR* (en français, *ROS*), définit précisément le rapport entre ces signaux. De (9.39) et (9.40) :

$$SWR = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{V^+ (1 + \Gamma_c)}{V^+ (1 - \Gamma_c)} \quad (9.43)$$

$$= \frac{1 + \Gamma_c}{1 - \Gamma_c} . \quad (9.44)$$

*Attention*, le terme  $\Gamma_c$  représente bien le *module* du coefficient de réflexion :  $\Gamma_c = |\bar{\Gamma}_c|$ .

Évidemment, il faut que  $SWR$  soit toujours plus grand ou égal à l'unité sinon  $V_{max}$  est plus petit que  $V_{min}$  (même chose pour le courant)! Expérimentalement, il est un paramètre facile à mesurer en plus d'indiquer l'importance de la mésadaptation et la surtension.

Deux cas méritent l'attention :

- Le court-circuit, le circuit ouvert et toutes charges purement réactive ont un coefficient de réflexion dont  $\Gamma_{c_x} = 1$ . Ainsi,  $SWR \rightarrow \infty$  car le signal minimum est nul. L'interférence de la réflexion est complète et cela peut causer de graves problèmes notamment sur des lignes de transport d'électricité.
- La charge adaptée présente un coefficient de réflexion  $\Gamma_{c_a} = 0$  donc un  $SWR = 1$ , puisque seul le signal incident est présent le long de la ligne; le signal réfléchi nul n'interfère pas. C'est le cas idéal où toute la puissance délivrée par la source est absorbée pour ne pas revenir vers la source et l'endommager.

### 9.4.4 Particularités sur les impédances vues

On se rend bien compte que l'impédance vue à une certaine distance de la charge diffère de celle de la charge. Elle prend cependant un éventail de valeurs parmi l'ensemble des possibilités – ce qu'on appelle le lieu des impédances vues étant donnée l'impédance de charge. Une charge réelle – une résistance pure – présente une partie réactive autant capacitive qu'inductive; une charge complexe peut même devenir purement réelle à certains endroits.

Pour chaque charge, il existe des impédances vues particulières.

- Impédance réelle maximale  $R_{max}$

On a mentionné qu'à certaines distances, l'amplitude de la tension devenait maximale alors que celle du courant atteignait sa valeur minimale. Le rapport entre les deux grandeurs – lequel correspond à l'impédance vue – est donc maximal. Or, dans cette condition, on remarque aussi que la tension et le courant tombent en phase. L'impédance vue devient à la fois maximale et réelle, notée  $R_{max}$ , aux endroits  $d_{max}$  satisfaisant (9.37) soit :

$$R_{max} = \max \left\{ \left| \frac{\bar{V}(d)}{\bar{I}(d)} \right| \right\} = \frac{\bar{V}(d_{max})}{\bar{I}(d_{max})} = \frac{V_{max}}{I_{min}}. \quad (9.45)$$

Cette résistance vaut :

$$R_{max} = Z_o \frac{1 + \Gamma_c}{1 - \Gamma_c} = Z_o SWR. \quad (9.46)$$

- Impédance réelle minimale  $R_{min}$

À l'opposé, aux endroits d'amplitude minimale de la tension et d'amplitude maximale du courant, le rapport entre les deux grandeurs tend vers sa plus petite valeur.

Encore une fois, tension et courant sont en phase de sorte que l'impédance vue aux endroits  $d_{min}$  selon (9.38), devient à la fois minimale et réelle soit :

$$R_{min} = \min \left\{ \left| \frac{\bar{V}(d)}{\bar{I}(d)} \right| \right\} = \frac{\bar{V}(d_{min})}{\bar{I}(d_{min})} = \frac{V_{min}}{I_{max}} \quad (9.47)$$

$$= Z_o \frac{1 - \Gamma_c}{1 + \Gamma_c} = \frac{Z_o}{SWR}. \quad (9.48)$$

- Impédance inverse du transformateur

On démontre qu'un bout de ligne de longueur  $\lambda/4$  agit comme un transformateur d'impédance via son impédance caractéristique. Le produit de la valeurs de deux impédances vues espacées de  $\lambda/4$  donne :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_c(d)\bar{Z}_c(d \pm \frac{\lambda}{4}) &= \left( Z_o \frac{1 + \bar{\Gamma}_c(d)}{1 - \bar{\Gamma}_c(d)} \right) \left( Z_o \frac{1 + \bar{\Gamma}_c(d \pm \frac{\lambda}{4})}{1 - \bar{\Gamma}_c(d \pm \frac{\lambda}{4})} \right) \\ &= Z_o^2 \left( \frac{1 + \bar{\Gamma}_c(d)}{1 - \bar{\Gamma}_c(d)} \right) \left( \frac{1 + \bar{\Gamma}_c(d)e^{\mp j2\beta(\frac{\lambda}{4})}}{1 - \bar{\Gamma}_c(d)\underbrace{e^{\mp j2\beta(\frac{\lambda}{4})}}_{-1}} \right) \\ &= Z_o^2 \left( \frac{1 + \bar{\Gamma}_c(d)}{1 - \bar{\Gamma}_c(d)} \right) \left( \frac{1 - \bar{\Gamma}_c(d)}{1 + \bar{\Gamma}_c(d)} \right) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\bar{Z}_c(d)\bar{Z}_c(d \pm \frac{\lambda}{4}) = Z_o^2 \quad (9.49)$$

$$\bar{Y}_c(d)\bar{Y}_c(d \pm \frac{\lambda}{4}) = Y_o^2 \quad (9.50)$$

Dans toutes les équations, on s'aperçoit que l'impédance vue fait référence à l'impédance caractéristique d'une manière ou d'une autre. Le rôle que joue l'impédance de la ligne de transmission a beaucoup plus d'importance qu'on serait porté à le croire. L'impédance normalisée  $\bar{z}_c(d)$  – le symbole en minuscule identifie la normalisation – simplifie les calculs en éliminant les termes  $Z_o$  (un peu comme la fréquence au détriment de la pulsation qui évite l'emploi du  $2\pi$ ). Ainsi, on a :

$$\bar{z}_c(d) = \frac{\bar{Z}_c(d)}{Z_o} = \frac{1 + \bar{\Gamma}_c(d)}{1 - \bar{\Gamma}_c(d)} \quad (9.51)$$

$$\bar{\Gamma}_c(d) = \frac{\bar{z}_c(d) - 1}{\bar{z}_c(d) + 1}. \quad (9.52)$$

Au niveau de l'admittance normalisée  $\bar{y}_c(d)$ , on a :

$$\bar{y}_c(d) = \frac{\bar{Y}_c(d)}{Y_o} = \frac{1 - \bar{\Gamma}_c(d)}{1 + \bar{\Gamma}_c(d)} \quad (9.53)$$

$$\bar{\Gamma}_c(d) = \frac{1 - \bar{y}_c(d)}{1 + \bar{y}_c(d)}. \quad (9.54)$$

Quelques propriétés des charges ainsi normalisées sont fascinantes. Elles sont exploitées largement dans l'abaque de *Smith* :

- impédances résistives normalisées

$$r_{max} = SWR \tag{9.55}$$

$$r_{min} = 1/SWR; \tag{9.56}$$

On note au passage que  $r_{max}$  équivaut à la conductance minimale  $g_{min} = 1/r_{max}$  et vice-versa.

- impédance et admittance par déplacement

$$\left(\bar{z}_c(d)\bar{z}_c(d \pm \frac{\lambda}{4}) = 1\right) \implies \left(\bar{z}_c(d \pm \frac{\lambda}{4}) = y_c(d)\right) \tag{9.57}$$

- coefficient de réflexion impédance-admittance

$$(\bar{z}_a = \bar{y}_b) \implies (\bar{\Gamma}_a = -\bar{\Gamma}_b) \tag{9.58}$$

Cette implication se vérifie facilement à partir des équations (9.51) à (9.54) ; on la retrouve aussi de 9.57) sachant qu'un déplacement de  $\pm\lambda/4$  équivaut à une rotation de  $180^\circ$  du coefficient de réflexion généralisé. Elle montre que le passage d'une impédance à son admittance se fait simplement en trouvant la charge qui présente un coefficient de réflexion de signe opposé.

**Exemple 9.4**

Soit les charges suivantes :

$$\bar{Z}_a = (15 - j20)\Omega$$

$$\bar{Z}_b = (50 + j50)\Omega$$

$$\bar{Z}_c \Leftrightarrow \bar{\Gamma}_c(0.1\lambda) = 0.6\angle 130^\circ.$$

- Pour chacune, indiquez le  $SWR$  sur la ligne de transmission ayant une impédance caractéristique  $Z_o = 50\Omega$ .

Selon (9.44), on commence par déterminer le module du coefficient de réflexion :

$$\bar{\Gamma}_a = \frac{(15 - j20) - 50}{(15 - j20) + 50} = 0.593\angle -133.2^\circ$$

$$\Gamma_a = 0.593$$

$$\bar{\Gamma}_b = \frac{(50 + j50) - 50}{(50 + j50) + 50} = 0.447\angle 63.4^\circ$$

$$\Gamma_b = 0.447$$

$$\Gamma_c = 0.6 .$$

Dans le dernier cas, on se souvient que le module du coefficient de réflexion généralisé demeure constant si la ligne est sans perte.

On termine avec les valeurs de  $\Gamma_{a,b,c}$  :

$$\begin{aligned} SWR_a &= \frac{1 + 0.593}{1 - 0.593} = 3.911 \\ SWR_b &= \frac{1 + 0.447}{1 - 0.447} = 2.618 \\ SWR_c &= \frac{1 + 0.6}{1 - 0.6} = 4.0 . \end{aligned}$$

### Exemple 9.5

Soit une charge placée au bout d'une ligne de transmission. À une certaine distance  $d_a$  de la charge, le module de l'impédance vue  $Z_c(d_a)$  est maximal et vaut  $200\Omega$ . Par contre, à la distance  $d_b$  telle que  $d_b = d_a + 10 \text{ m}$ , le module de l'impédance vue devient cette fois minimal avec  $Z_c(d_b) = 50\Omega$

- Déduisez l'impédance caractéristique de la ligne et le rapport d'onde stationnaire sur la ligne produit par la charge.

Les équations (9.46) et (9.48) suffisent. Le produit  $R_{max}R_{min}$  donne  $Z_o^2$ , car ces deux impédances vues se rencontrent en alternance à intervalle de  $\lambda/4$ , ce qui respecte (9.49). Donc :

$$Z_o = \sqrt{(200)(50)} = 100\Omega .$$

Le rapport  $R_{max}/R_{min}$ , toujours selon (9.46) et (9.48), fournit  $SWR^2$  :

$$SWR = \sqrt{\frac{200}{50}} = 2 .$$

- Si l'impédance vue à une troisième distance  $d_c$  équivaut à  $(100 + j70.7)\Omega$ , déterminez l'impédance vue à la distance  $d_c + 10 \text{ m}$ .

On a dit que la distance entre la rencontre de  $R_{max}$  et celle de  $R_{min}$  vaut  $\lambda/4$ , laquelle est de  $10 \text{ m}$  selon la donnée du problème. Ainsi, de (9.49) :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_c(d_c + 10 \text{ m}) &= \frac{Z_o^2}{\bar{Z}_c(d_c)} \\ &= \frac{10^4}{100 + j70.7} = \frac{10^4 \angle 0}{122.47 \angle 35.3^\circ} = 81.65 \angle -35.3^\circ \\ &= (66.7 - j47.1)\Omega . \end{aligned}$$

## 9.5 Abaque de Smith

Sans doute l'outil le plus utilisé même de nos jours, l'abaque de *Smith* a été introduit par *Phillip Hagar Smith*<sup>6</sup> pour visualiser les charges vues sur une ligne de transmission, alors que naissaient les micro-ondes... et les problèmes du modèle de *Kirchoff*. Il s'agit d'une transformation conforme du plan complexe des impédances normalisées (ou admittances normalisées, car les unes correspondent aux autres par un décalage de  $\lambda/4$ ) dans le plan complexe des coefficients de réflexion généralisés. Donc

$$\text{lieu}\{\bar{z}_c(d)\} \Leftrightarrow \text{lieu}\{\bar{\Gamma}_c(d)\} .$$

### 9.5.1 Construction de l'abaque

L'idée consiste à tracer les lieux des impédances (admittances) ayant une même résistance  $r = \text{cte}$  (conductance  $g = \text{cte}$ ) ou ayant une même réactance  $x = \text{cte}$  (susceptance  $b = \text{cte}$ ). Pour arriver à décrire ces lieux dans le plan complexe des coefficients de réflexion, *Smith* a du faire une certaine gymnastique mathématique qui est présentée ici dans un but de démystification.

Soit  $\bar{z}_c(d) = r + jx$ , alors son coefficient de réflexion généralisé qui s'écrit sous forme cartésienne :

$$\bar{\Gamma}_c(d) = u + jv , \tag{9.59}$$

est relié à la charge normalisée vue comme suit :

$$u + jv = \frac{(r + jx) - 1}{(r + jx) + 1} = \frac{(r - 1) + jx}{(r + 1) + jx} . \tag{9.60}$$

On doit maintenant chercher à exprimer chacune des composantes – partie réelle  $r$  et partie imaginaire  $x$  – de la charge normalisée vue en terme des composantes du coefficient de réflexion généralisé.

#### 9.5.1.1 $r$ et $x$ versus $u$ et $v$

De (9.60) remanié, on a :

$$(u + jv)((r + 1) + jx) = (r - 1) + jx$$

$$(ur + u - vx) + j(ux + vr + v) = (r - 1) + jx$$

d'où découle, en séparant les parties réelles et imaginaires, deux égalités :

$$r(u - 1) - xv = -(u + 1) \tag{9.61}$$

$$rv + x(u - 1) = -v \tag{9.62}$$

Des deux équations, on cherche à isoler  $r$  et  $x$  suivant les étapes ci-dessous.

- Éliminer  $x$  pour avoir une relation entre  $r$  et les composantes  $u$  et  $v$ .

<sup>6</sup>P.H. Smith, "Transmission-Line Calculator", *Electronics*, Jan. 1939, pp. 29–31.

$r$	centre	rayon
0	(0,0)	1
0.2	(0.167,0)	0.833
0.5	(0.333,0)	0.667
1	(0.5,0)	0.5
2	(0.667,0)	0.333
$\infty$	(1,0)	0

TABLE 9.1 – Paramètres des cercles dans le plan  $u - v$  selon les valeurs de  $r$ .

- multiplication de (9.61) par  $(u - 1)$
- multiplication de (9.62) par  $(v)$
- addition à gauche et à droite des deux équations résultantes :

$$\begin{array}{rcl}
 r(u-1)^2 - xv(u-1) & = & 1 - u^2 \\
 + \quad rv^2 + xv(u-1) & = & -v^2 \\
 \hline
 (ru^2 - 2ru + r) + rv^2 & = & 1 - u^2 - v^2
 \end{array}$$

donc, en complétant les carrés :

$$\begin{aligned}
 u^2(1+r) - 2ru + v^2(1+r) &= 1 - r \\
 \left(u^2 - \frac{2ru}{1+r}\right) + v^2 &= \frac{1-r}{1+r} \\
 \left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 &= \left(\frac{1}{1+r}\right)^2. \tag{9.63}
 \end{aligned}$$

La dernière relation (9.63) est celle d'un cercle dans le plan  $u - v$  centré à  $(\frac{r}{1+r}, 0)$  de rayon  $\frac{1}{1+r}$ . Le tableau 9.1 dresse quelques exemples pour différentes valeurs de  $r$ .

- Faire la même chose pour l'élimination de  $r$  et avoir une relation entre  $x$ ,  $u$  et  $v$ .
  - multiplication de (9.61) par  $(-v)$
  - multiplication de (9.62) par  $(u - 1)$
  - addition à gauche et à droite des deux équations résultantes :

$$\begin{array}{rcl}
 -rv(u-1) - xv^2 & = & v(u+1) \\
 + \quad rv(u-1) + x(u-1)^2 & = & -v(u-1) \\
 \hline
 xv^2 + (xu^2 - 2xu + x) & = & 2v
 \end{array}$$

$x$	centre	rayon
0	$(1, \infty)$	$\infty$
$\pm 0.2$	$(1, \pm 5)$	5
$\pm 0.5$	$(1, \pm 2)$	2
$\pm 1$	$(1, \pm 1)$	1
$\pm 2$	$(1, \pm 0.5)$	0.5
$\pm \infty$	$(1, 0)$	0

TABLE 9.2 – Paramètres des cercles dans le plan  $u - v$  selon les valeurs de  $x$ .

donc

$$\begin{aligned}
 (u^2 - 2u + 1)x + v^2x - 2v &= 0 \\
 (u^2 - 2u + 1) + (v^2 - \frac{2v}{x}) &= 0 \\
 (u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 &= \left(\frac{1}{x}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{9.64}$$

Encore ici, la relation (9.64) est celle d'un cercle dans le plan  $u - v$  mais centré à  $(1, \frac{1}{x})$  de rayon  $|\frac{1}{x}|$ . Le tableau 9.2 dresse quelques exemples pour différentes valeurs de  $x$ . On n'oublie pas que  $x$  peut être positif ou négatif.

### 9.5.1.2 Superposition des lieux $r = \text{cte}$ et $x = \text{cte}$

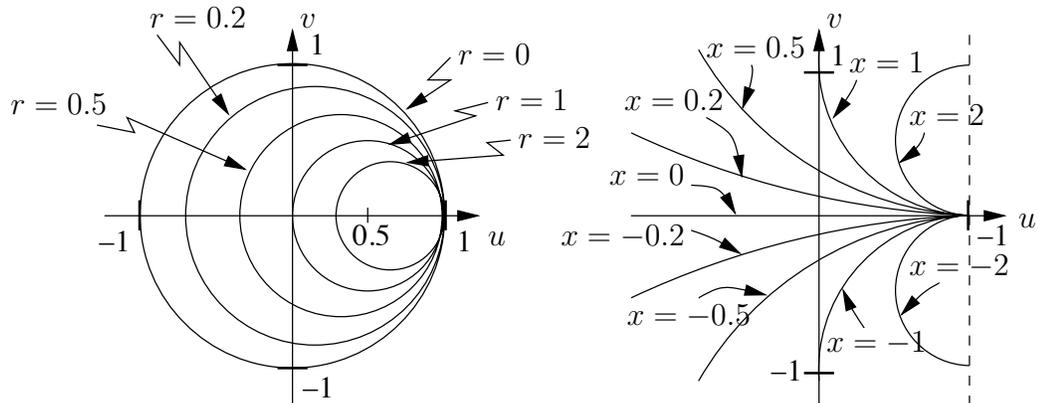


FIGURE 9.8 – Lieux de  $r = \text{cte}$  et  $x = \text{cte}$  dans le plan complexe de  $\bar{\Gamma}_c$ .

On connaît maintenant la forme du lieu du coefficient de réflexion d'une charge normalisée dont :

- la partie réelle est connue i.e.  $r = \text{cte}$  (cercle centré à  $(\frac{r}{1+r}, 0)$  de rayon  $\frac{1}{1+r}$ );
- la partie imaginaire est connue i.e.  $x = \text{cte}$  (cercle centré à  $1, (\frac{1}{x})$  de rayon  $\text{abs}\{\frac{1}{x}\}$ ).

Les lieux pour différentes valeurs de  $r$  et de  $x$  (qui sont les mêmes que celles retrouvées dans les tableaux 9.1 et 9.2 respectivement) sont tracés sur les figures 9.8 de gauche et de droite.

### 9.5.1.3 Finalisation de l'abaque

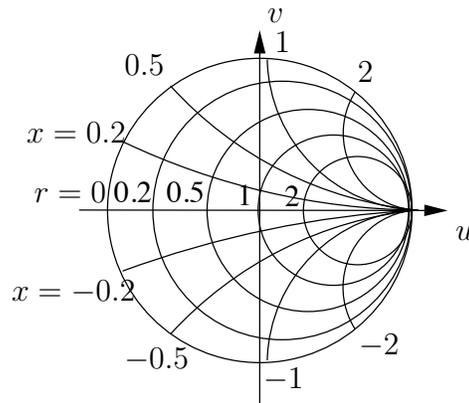


FIGURE 9.9 – Construction d'un abaque de *Smith* simple.

L'abaque de *Smith* est simplement constitué de la superposition de ces lieux pour une grande quantité de valeurs de  $r$  et de  $x$ . La figure 9.9 montre un abaque de *Smith* simple, alors que celle 9.11 dévoile la forme de l'abaque que l'on se sert presque universellement.

L'intersection du lieu  $r = r_o$  avec celui de  $x = x_o$ , donne un point qui indique la valeur du coefficient de réflexion de la charge normalisée  $\bar{z}_c = r_o + jx_o$ . Il ne peut y avoir qu'un seul point d'intersection car, on le rappelle, la relation est biunivoque entre la charge et son coefficient de réflexion.

#### Exemple 9.6

Une charge d'impédance  $\bar{Z}_c = 15 - j20 \Omega$  connectée à une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $Z_o = 50 \Omega$ .

- Indiquez le vecteur du coefficient de réflexion dans le plan complexe à l'aide de l'abaque de *Smith*.

Le centre de l'abaque de *smith* représente le centre du système de coordonnées  $u-v$  du plan complexe. Il suffit de localiser la charge normalisée :

$$\bar{z}_c = \frac{\bar{Z}_c}{Z_o} = 0.3 - j0.4 .$$

Sur la figure 9.10, la charge se trouve donc à l'intersection du lieu  $r = 0.3$  représenté par le cercle d'un trait continu centré sur l'axe horizontal, avec le lieu  $x = -0.4$  représenté par l'arc de cercle en pointillés.

Le vecteur partant du centre de l'abaque de *Smith* et se rendant au point d'intersection est donc le vecteur du coefficient de réflexion dans le plan complexe.

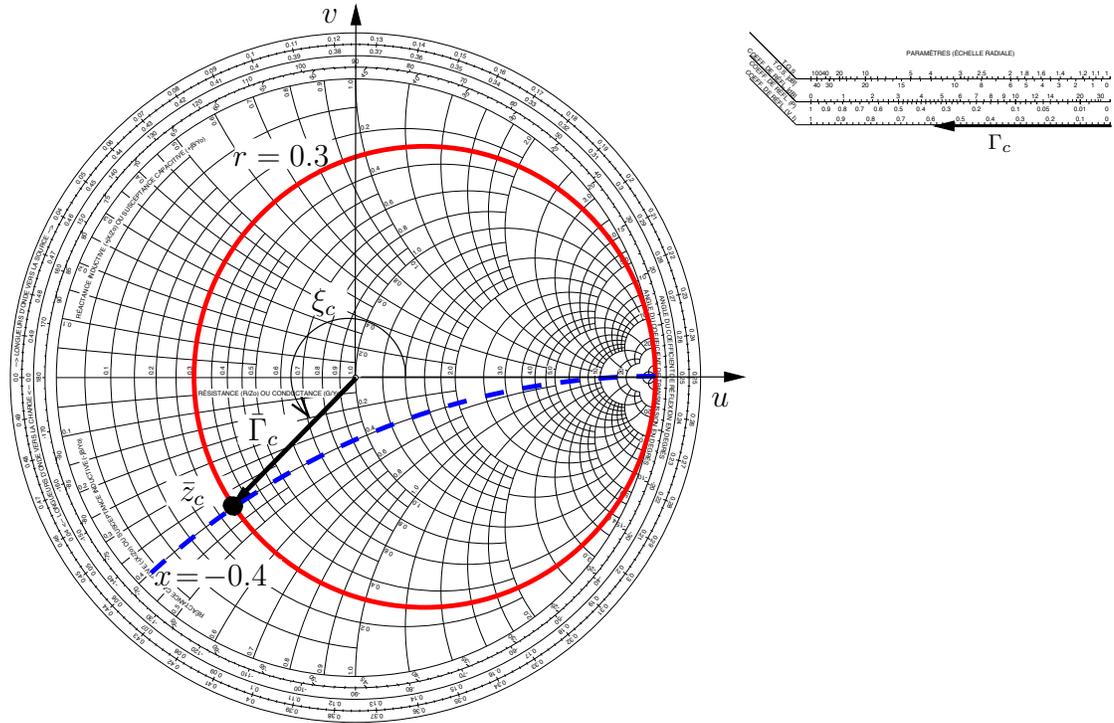


FIGURE 9.10 – Localisation d’une charge dans le plan complexe du coefficient de réflexion sur l’abaque de *Smith*.

Son module peut se calculer en mesurant sa longueur sachant que le rayon de l’abaque vaut 1. Son argument peut se mesurer à l’aide d’un rapporteur d’angle comme sur la figure.

### 9.5.2 Paramètres mesurables sur l’abaque

Comme l’abaque représente une transformation conforme dans le plan du coefficient de réflexion généralisé, on ne se surprend pas si le paramètre obtenu le plus simplement du monde est justement le coefficient de réflexion de la charge vue.

- Le pourtour de l’abaque correspond aux charges dont le module du coefficient de réflexion est maximal et unitaire  $\Gamma_c(d) = 1$ . Ces charges peuvent être un circuit ouvert  $\bar{\Gamma}_c = 1$ , un court-circuit  $\bar{\Gamma}_c = -1$  ou une charge purement réactive.
- Le centre de l’abaque correspond à la charge adaptée dont le coefficient de réflexion est nul.
- L’axe des réels entre  $-1$  et  $1$  correspond à des charges résistives pures puisque leur coefficient de réflexion est aussi un nombre réel ; la partie imaginaire vaut zéro, ce qui explique pourquoi on se retrouve directement sur l’axe.

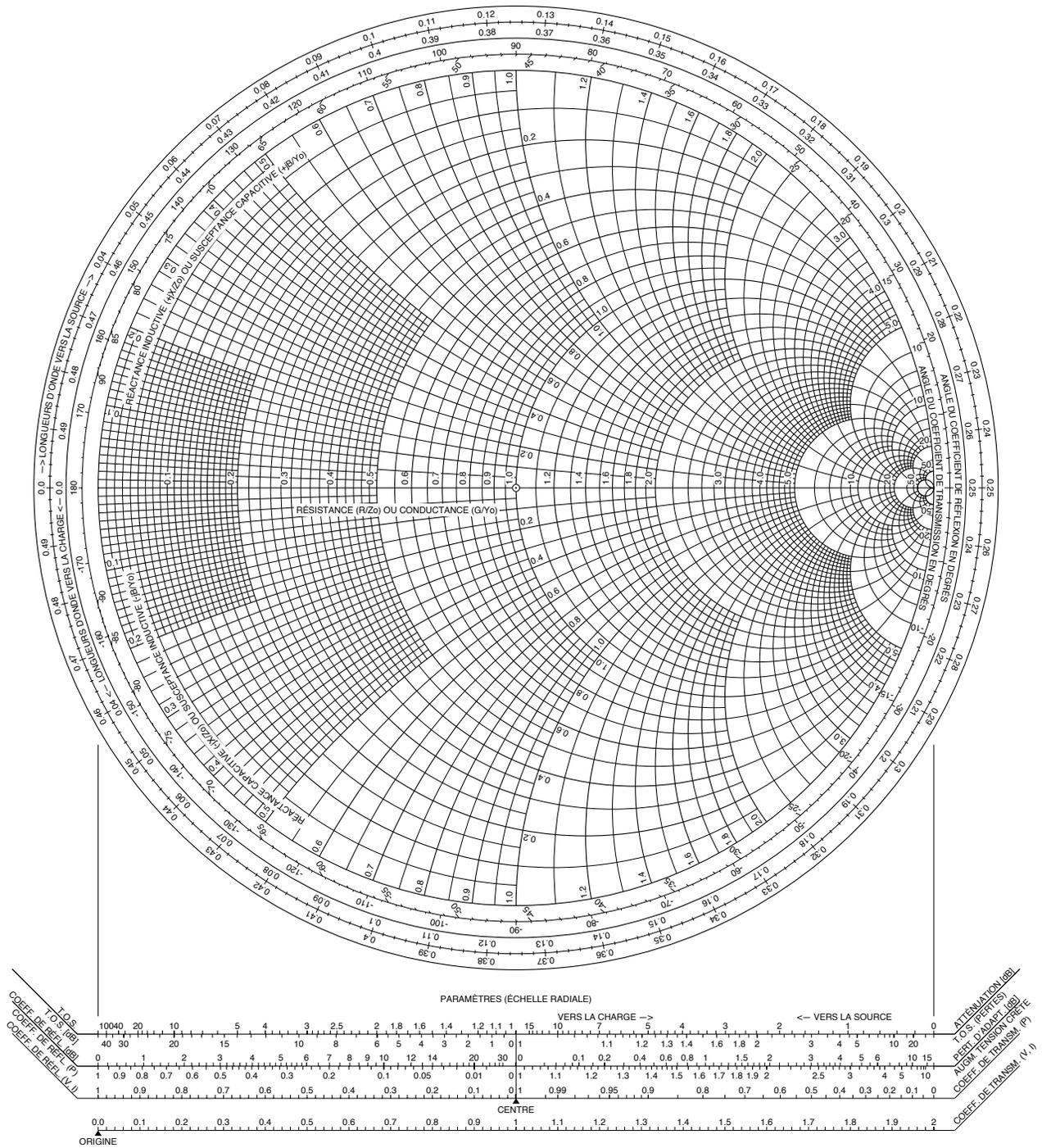


FIGURE 9.11 – Abaque de *Smith*.

- Comme aucune charge passive ne peut avoir un coefficient de réflexion dont le module excède l'unité, on devrait retrouver toutes les charges à l'intérieur du cercle de rayon unité dans le plan du coefficient de réflexion. Seules les charges actives et les charges de résistance négative qui retournent un signal plus fort, d'où  $\Gamma_c > 1$ , se retrouvent à l'extérieur ; leur étude déborde du cadre présent.
- Partout dans l'abaque, le module du coefficient de réflexion est évalué par une règle de trois en notant la distance du centre  $O$  au point de charge  $P$  (longueur du vecteur  $\overrightarrow{OP}$  partant du centre et allant vers le point de charge) et en considérant que la distance entre le centre et le pourtour vaut l'unité. On peut aussi se servir d'une des échelles radiales dessinées au bas de l'abaque, identifiée par **COEFF. DE RÉFL. (V, I)**, sur laquelle on reporte la distance notée précédemment. L'échelle radiale **COEF. DE RÉFL. [dB]** permet de lire directement le module du coefficient de réflexion en décibels.
- L'angle mesuré entre l'axe des réels et le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  donne l'argument du coefficient de réflexion. On peut l'obtenir en allongeant le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  jusqu'à ce qu'il atteigne la deuxième échelle circulaire bien identifiée pour cet usage. Attention de ne pas prendre la première échelle circulaire autrement que pour l'usage auquel elle est destinée (coefficient de transmission en tension).

**Exemple 9.7**

Soient les charges complexes normalisées suivantes :  $\bar{z}_a = 0.3 - j0.4$ ,  $\bar{z}_b = 1 + j$  et  $\bar{z}_c = 0.2$ .

- À l'aide de l'abaque de *Smith*, évaluez avec toute la précision possible, leur coefficient de réflexion.

---

Résultats :

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_a &= 0.593 \angle -133.2^\circ \\ \bar{\Gamma}_b &= 0.447 \angle 63.4^\circ \\ \bar{\Gamma}_c &= 0.667 \angle 180.0^\circ \end{aligned}$$


---

En se déplaçant sur la ligne, le coefficient de réflexion de la charge vue garde le même module ; seul l'argument varie selon la distance  $d$  suivant  $-2\beta d$ . En s'éloignant de la charge, le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  pivote sur l'origine  $O$  dans le sens horaire en faisant un tour complet par demi-longueur d'onde. Au contraire, connaissant  $\bar{\Gamma}_c(d)$ , on doit faire tourner le vecteur dans le sens antihoraire d'un angle  $+2\beta d$ , pour déduire  $\bar{\Gamma}_c$ . Par extension, comme indiqué sur les 3e et 4e échelles circulaires de l'abaque, on tourne dans le sens horaire le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  d'un angle  $-2\beta(d_2 - d_1)$  pour déterminer  $\bar{\Gamma}_c(d_2)$  de  $\bar{\Gamma}_c(d_1)$  si  $d_2$  est plus grand

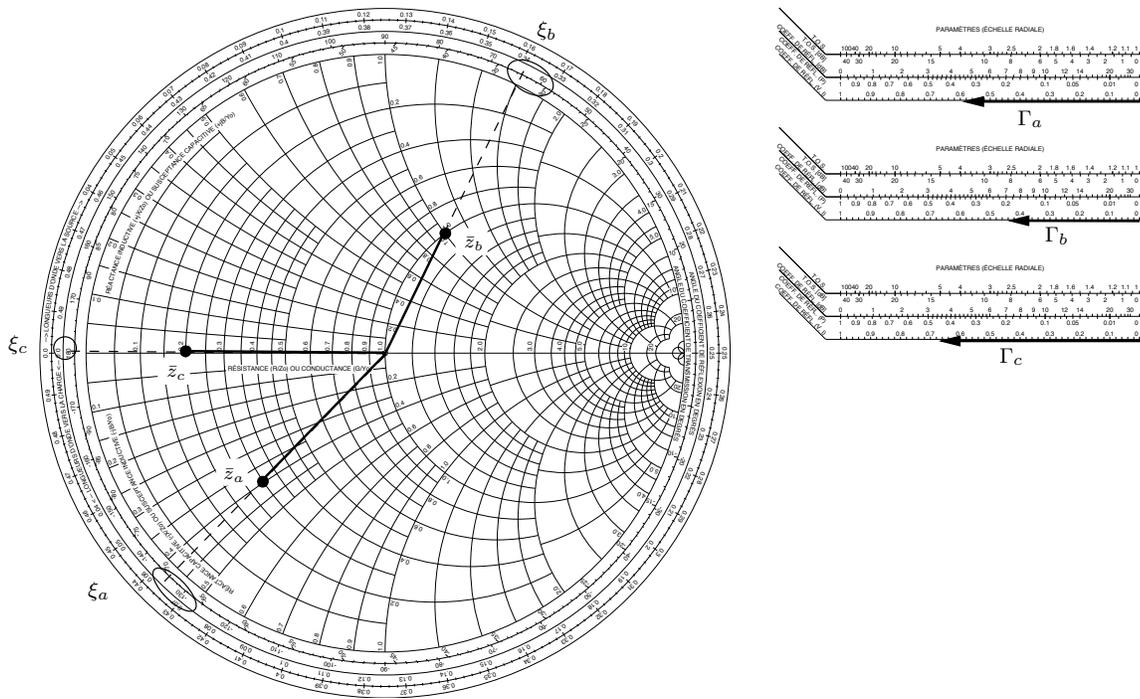


FIGURE 9.12 – Exemples d’obtention du coefficient de réflexion de certaines charges sur l’abaque de *Smith*.

que  $d_1$  (on s’éloigne de plus en plus). Le sens est opposé si  $d_2$  est plus petit que  $d_1$  (on se rapproche de la charge).

On trouve plus commode de travailler avec des distances exprimées en terme de longueurs d’onde du type  $d = k\lambda$  où  $k$  est un nombre réel. Ainsi, le produit  $2\beta d$  se résume à  $4\pi k$  ou encore, en degrés, à  $720k$  [°]. On franchit bien  $360^\circ$  lorsque  $k = 0.5$  i.e. une distance d’une demi-longueur d’onde. Ceci explique la graduation des 3e et 4e échelles circulaires allant de 0 à 0.5 dans chacun des sens. Ces échelles sont donc employées pour les déplacements de position d’observation qui modifient le coefficient de réflexion de la charge vue.

**Exemple 9.8**

À une distance de  $0.8\lambda$ , une charge présente un coefficient de réflexion suivant  $\bar{\Gamma}_c(0.8\lambda) = 0.6 \angle 130^\circ$ .

- ▶ À l’aide de l’abaque de *Smith*, déterminez la charge normalisée vue à cette distance, celle vue à  $0.1\lambda$  et la charge normalisée.

Résultats :

$$\begin{aligned} \bar{z}_c(0.8\lambda) &= 0.3 + j0.43 \\ \bar{z}_c(0.1\lambda) &= 0.5 - j0.94 \\ \bar{z}_c &= 3.26 - j1.49 \end{aligned}$$

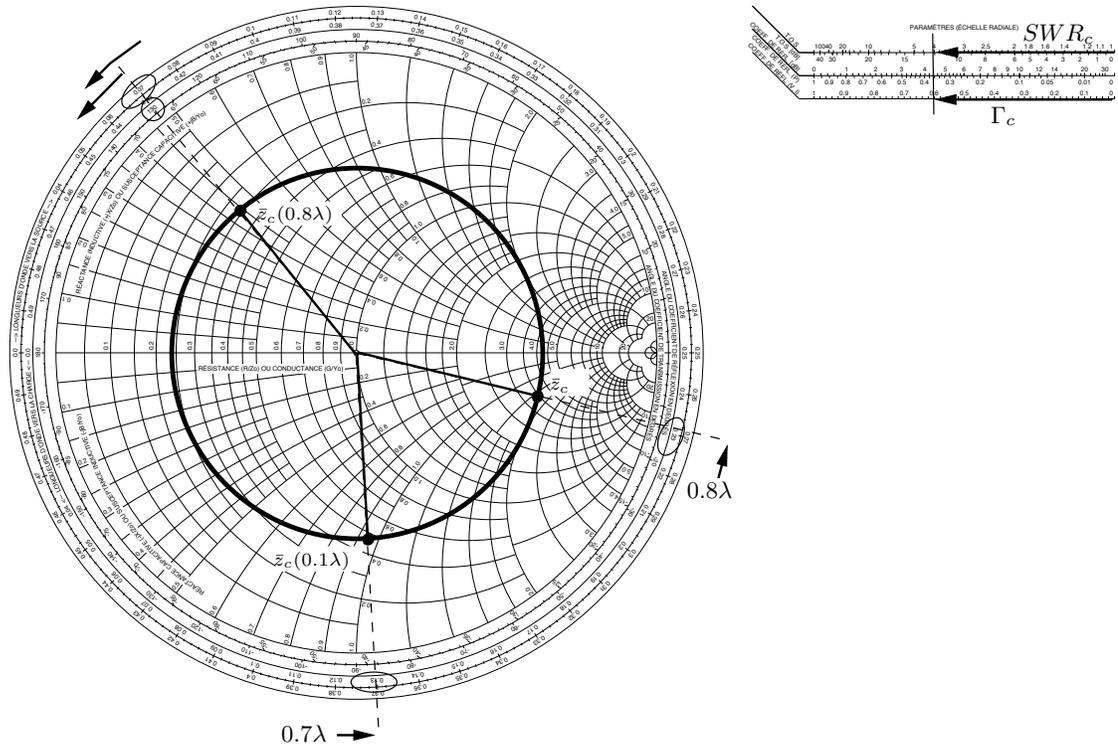


FIGURE 9.13 – Exemples de détermination de charges normalisée vues sur l’abaque de *Smith*.

L’exemple précédent témoigne de la facilité avec laquelle l’abaque de *Smith* résout les problèmes associés avec les impédances vues sur une ligne de transmission. La vérification à l’aide des équations prend un temps nettement plus long (à moins d’avoir un logiciel mathématique qui traite aisément les nombres complexes), sans compter qu’il offre une sensation visuelle.

Lorsqu’on fait pivoter le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  sur un tour complet, le point  $P$  décrit un cercle centré sur  $O$  qui représente le lieu des impédances normalisées vues pour une charge donnée bien sûr. Chaque point sur ce cercle identifie une impédance vue possible à rencontrer sur la ligne. On l’appelle aussi le cercle de rapport d’onde stationnaire constant, car toutes ces charges présentent des coefficients de réflexion qui ont un même module<sup>7</sup>. Ce cercle coupe l’axe des réels à deux endroits :

- côté négatif de l’axe des réels à la valeur de  $r_{min}$  ;
- côté positif, à la valeur de  $r_{max} = 1/r_{min}$ .

Il s’avère que l’impédance normalisée réelle maximale équivaut au rapport d’onde stationnaire. Ceci suggère une manière de lire le  $SWR$  sur l’abaque de *Smith* : intersection du cercle de  $SWR$  constant avec l’axe positif des réels, la valeur  $r$  lue est  $r_{max} = SWR$ . Il est toutefois possible de reporter la longueur de  $\overrightarrow{OP}$  sur l’échelle radiale identifiée T.O.S. ou encore T.O.S. [dB] pour une lecture en décibels.

Les distances  $d_{min}$  et  $d_{max}$  sont rapidement déterminées en terme de longueurs d’onde, grâce aux repères sur les 3e et 4e échelles circonférencielles. On regarde de quelle distance

<sup>7</sup>Le  $SWR$  n’est affecté que par le module du coefficient de réflexion.

il faut tourner le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  pointant sur la charge même  $\bar{z}_c$  afin qu'il croise l'axe négatif des réels pour obtenir  $d_{min}$  (le point  $P$  donne  $r_{min}$ ) et l'axe positif des réels pour  $d_{max}$  (le point  $P$  donne alors  $r_{max}$ ).

On avait aussi fait remarquer que l'admittance normalisée vue à un certain endroit équivaut à l'impédance normalisée vue à  $\pm\lambda/4$  de cet endroit. Sur l'abaque de *Smith* cela se traduit ainsi : l'admittance normalisée est diamétralement opposée par rapport à l'origine à l'impédance normalisée. En effet, de (9.52) et (9.54), on tire :

$$\bar{\Gamma}_{z_c}(d) = -\bar{\Gamma}_{y_c}(d) . \tag{9.65}$$

Rien de plus simple. On ajoute ainsi un nouvel usage à l'abaque valide dans tout circuit.

**Exemple 9.9**

On place trois charges différentes sur une ligne de transmission ayant une impédance caractéristique de  $50\Omega$  et une vitesse de propagation de 67%. À la fréquence d'opération de  $400\text{ MHz}$ , ces charges présentent des impédances de  $(15 - j20)\Omega$ ,  $(50 + j50)\Omega$  et  $10\Omega$ .

- Pour chacune des charges, déterminez avec l'aide de l'abaque de *Smith* le rapport d'onde stationnaire sur la ligne, l'admittance de ces charges, la distance en  $m$  à laquelle la tension devient minimale.

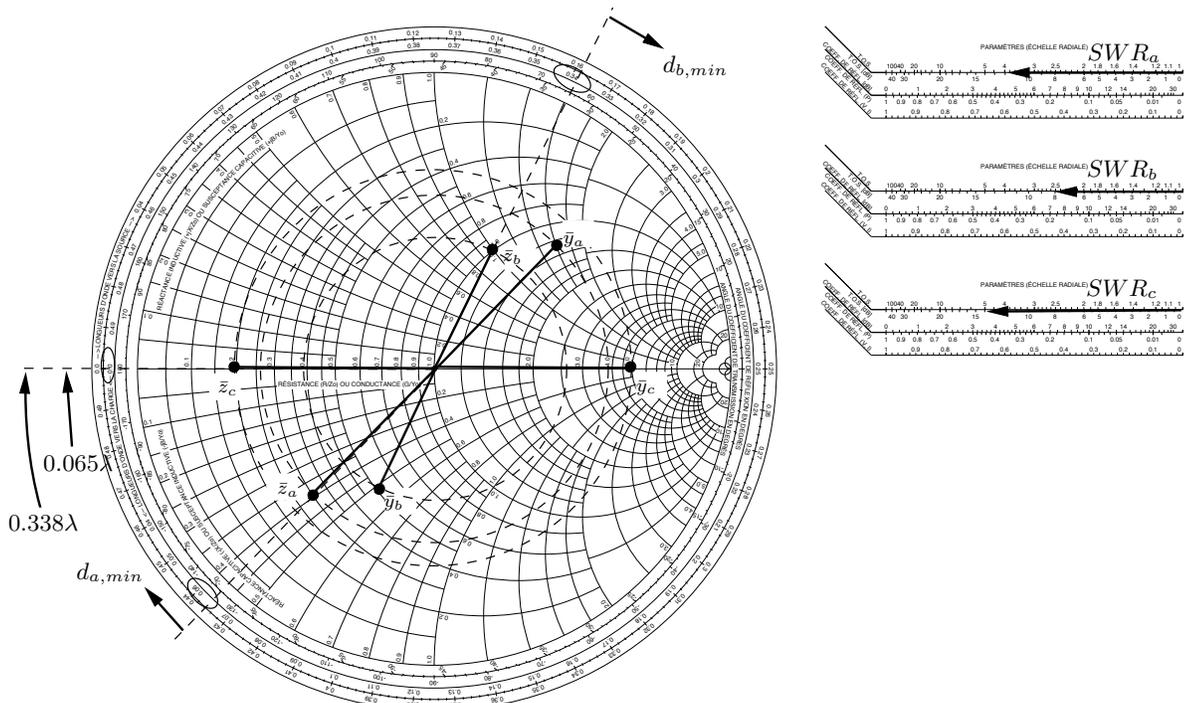


FIGURE 9.14 – Exemples de détermination  $SWR$ , admittance  $\bar{Y}_c$  et  $d_{min}$  sur l'abaque de *Smith*.

Certaines petites conversions restent à effectuer pour répondre adéquatement aux demandes. Entre autre, la distance en  $m$  est déduite de celle en terme de

longueurs d'onde en multipliant par la longueur d'onde en  $m$ . Or :

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{2 \times 10^8}{400 \times 10^6} = 0.5 \text{ m} .$$

De plus, l'admittance normalisée est divisée par  $Z_o$  pour fournir l'admittance non-normalisée.

Résultats :

$\bar{Z}_c (\Omega)$	$SWR$	$\bar{Y}_c (S)$	$d_{min} (m)$
$15 - j20$	3.91	$(24 + j32) \times 10^{-3}$	0.0325
$50 + j50$	2.62	$(10 - j10) \times 10^{-3}$	0.169
10	5	0.1	0

**Exemple 9.10**

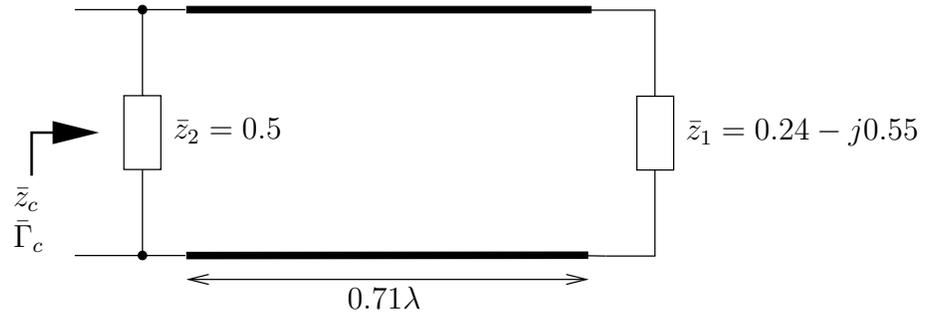


FIGURE 9.15 – Charge équivalente issue d'une combinaison de deux impédances complexes.

Une impédance normalisée  $\bar{z}_1 = (0.24 - j0.55)$  termine une ligne de transmission. À  $0.71\lambda$  de cette impédance est placée une seconde impédance  $\bar{z}_2 = 0.5$  en parallèle sur la ligne.

- Considérant cet assemblage comme une charge au bout d'une ligne, déterminez sa valeur et son coefficient de réflexion.

Comme  $\bar{z}_2$  est en parallèle, il convient de travailler avec les admittances car les admittances en parallèle s'additionnent (les impédances en série s'additionnent). Sur l'abaque, on voit que :

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= 0.666 + j1.53 \\ \bar{y}_1(0.71\lambda) &= 0.344 - j0.914 \end{aligned}$$

avec un  $SRW = 5.485$ .

On additionne simplement la seconde admittance normalisée  $\bar{y}_2 = 2$  à celle de la première vue au niveau de la seconde  $\bar{y}_1(0.71\lambda)$  pour aboutir à l'admittance de la charge équivalente :

$$\bar{y}_c = (2) + (0.344 - j0.914) = 2.344 - j0.914 .$$

De là les résultats attendus, et toujours avec l'aide de l'abaque :

$$\begin{aligned}\bar{z}_c &= 0.370 + j0.144 \\ \bar{\Gamma}_c &= 0.469 \angle 161.1^\circ .\end{aligned}$$

## 9.6 Estimation de charge

Inversement au calcul des paramètres du signal sur une ligne de transmission produit par une charge, l'estimation de charge consiste à déterminer la valeur de la charge étant donnés les paramètres mesurés. Une application pratique et concrète est l'estimation de l'impédance d'entrée d'une antenne<sup>8</sup>. L'abaque de *Smith* ou les expressions mathématiques conviennent sans avantage pour l'un comme pour l'autre dans ce cas.

### 9.6.1 Principes théoriques de calcul de charge

Pour parvenir à déterminer la valeur de la charge, la connaissance du coefficient de réflexion suffit ; la relation étant, on se répète, biunivoque selon :

$$\bar{Z}_c = Z_o \frac{1 + \bar{\Gamma}_c}{1 - \bar{\Gamma}_c} . \quad (9.66)$$

La définition complète du coefficient de réflexion à la charge, qui est un nombre complexe, nécessite la connaissance de son module et de son argument. Or, ces deux grandeurs s'obtiennent de par :

- le rapport d'onde stationnaire

Le *SWR* dépend uniquement du module du coefficient de réflexion selon (9.44) ou vive-versa :

$$\Gamma_c = \frac{SWR - 1}{SWR + 1} . \quad (9.67)$$

- la distance du premier maximum ou minimum de tension ou de courant

Les premiers  $d_{min}$  ou  $d_{max}$  ( $d_{max} = d_{min} \pm \frac{\lambda}{4}$ ) sont reliées à l'argument du coefficient de réflexion selon (9.38) et (9.37) respectivement. En effet, le coefficient de réflexion généralisé croise alors l'axe des réels donc  $\angle \bar{\Gamma}_c(d_{min}) = \pi$  (ou  $\angle \bar{\Gamma}_c(d_{max}) = 0$ ) avec

$$\xi_c = \angle \bar{\Gamma}_c = \frac{4\pi}{\lambda} d_{min} - \pi . \quad (9.68)$$

<sup>8</sup>L'antenne peut être assimilée à une simple impédance i.e. un élément de circuit qui retire une partie (ou la totalité si la l'antenne est adaptée) de la puissance active incidente ; cette puissance est ensuite rayonnée dans l'espace.

**Exemple 9.11**

Une charge inconnue termine une ligne de transmission ayant  $Z_o = 50\Omega$ . On observe sur la ligne un  $V_{min}$  de  $0.5V$  à  $0.355\lambda$  de la charge, et un  $V_{max}$  de  $1.5V$ .

► Estimez la valeur de la charge inconnue non-normalisée.

On commence par le module de  $\bar{\Gamma}_c$  de (9.67) sachant que :

$$SWR = \frac{V_{max}}{V_{min}} = 3 .$$

On trouve :

$$\Gamma_c = \frac{3 - 1}{3 + 1} = 0.5 .$$

On recherche maintenant l'argument de  $\bar{\Gamma}_c$  de (9.68) :

$$\xi_c = \frac{4\pi}{\lambda} (0.355\lambda) - \pi = 1.32 \text{ rad} .$$

Donc :

$$\bar{\Gamma}_c = 0.5e^{j1.32} .$$

Finalement, en prenant (9.66), on calcule la valeur de l'impédance de la charge inconnue :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_c &= 50 \frac{1 + 0.5 e^{j1.32}}{1 - 0.5 \underbrace{e^{j1.32}}_{0.2487 + j0.9686}} \\ &= 50 \frac{1.1243 + j0.4843}{0.8757 - j0.4843} \\ &= 50 \frac{1.2242 \angle 23.3^\circ}{1.0007 \angle -28.95^\circ} = 61.17 \angle 52.25^\circ \\ &= (37.45 + j48.37)\Omega . \end{aligned}$$

### 9.6.2 Estimation expérimentale de charge

La prise de mesures expérimentales en vue d'obtenir le module et l'argument du coefficient de réflexion, entraîne certaines contraintes. Il faut d'abord créer un dispositif qui permet de récupérer  $SWR$  et  $d_{min,max}$ . Il s'agit d'une ligne fendue telle qu'on la retrouve sur la figure 9.16.

On doit d'abord se rendre compte que le  $SWR$  s'obtient plus facilement par le biais de la tension. Il faut donc prélever  $V_{max}$  et  $V_{min}$  qui sont à des distances inconnues. C'est pourquoi la ligne est fendue longitudinalement sur plus d'une demi-longueur d'onde autant que possible, et est constituée d'un diélectrique à air pour pouvoir déplacer la

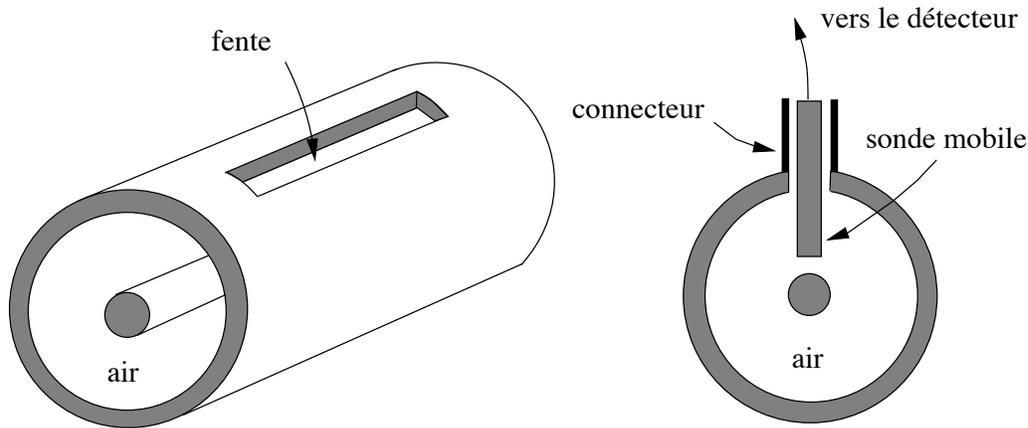


FIGURE 9.16 – Schéma d'une ligne fendue avec sonde.

sonde. Elle doit aussi avoir la même impédance que celle de transmission. La fente est supposée suffisamment étroite pour que la distribution des champs soit affectée de manière négligeable. Une sonde insérée par la fente échantillonne le champ électrique ; ainsi la tension développée entre la sonde et le conducteur externe est proportionnelle à la tension sur la ligne à l'endroit où se situe la sonde. Un détecteur indique l'amplitude du signal lu. La constante de proportionnalité ne joue aucun rôle important puisque qu'elle disparaît dans un rapport entre deux mesures comme c'est le cas avec le *SWR* ; aucune calibration n'est nécessaire. Autrement dit, une lecture d'une valeur absolue complique la réalisation de l'appareillage sans procurer un quelconque avantage.

On peut aussi choisir entre  $d_{min}$  et  $d_{max}$  mais la mesure de la distance du premier maximum est moins précise à cause de la seconde dérivée (courbure) de  $V(d)$  plus faible autour de  $d_{max}$  comparativement à  $d_{min}$ .

On remarque que la connaissance de  $\lambda$  est aussi requise. Par chance, la longueur d'onde est facilement extraite au moment des mesures de *SWR*, car la distance entre un maximum et un minimum de tension vaut  $\lambda/4$ . Pour améliorer la précision, on préfère noter la distance entre deux minima consécutifs qui est de  $\lambda/2$ . Si  $d_{min}$  est exprimée en terme de longueurs d'onde ( $k\lambda$ ) et que l'on désire  $\xi_c$  en degrés (et non en radians), alors la formulation devient :

$$\xi_c[^\circ] = 720k - 180 .$$

Tout irait bien dans le meilleur des mondes mais voilà, la ligne fendue de mesure cache deux désavantages.

- La vitesse de propagation diffère dans la ligne fendue (la vitesse de la lumière dans le vide, le diélectrique étant l'air) de celle de la ligne de transmission. Les calculs devront donc se faire avec la longueur d'onde dans la ligne fendue  $\lambda_f$ .
- La ligne fendue n'est pas nécessairement placée juste avant la charge pour toutes sortes de raisons. De toute manière, la graduation sur la ligne est souvent telle que les distances sont relatives ; il n'y a pas de "0". Il faut alors fixer un plan de référence qui agira comme origine. Au plan de référence, la charge vue équivaut à la charge

elle-même de sorte que le plan se situe à un multiple de demi-longueur d'onde de la charge. La localisation du plan de référence se réalise à l'aide d'un court-circuit qui remplace momentanément la charge à estimer. Avec le court-circuit, un diagramme d'onde stationnaire s'établit avec des creux très fins, espacés d'une demi-longueur d'onde à partir du court-circuit ; les positions des creux sont d'autant de possibilités pour les plans de référence. On choisit un plan se situant quelque part sur la ligne fendue comme celui de la figure 9.17.

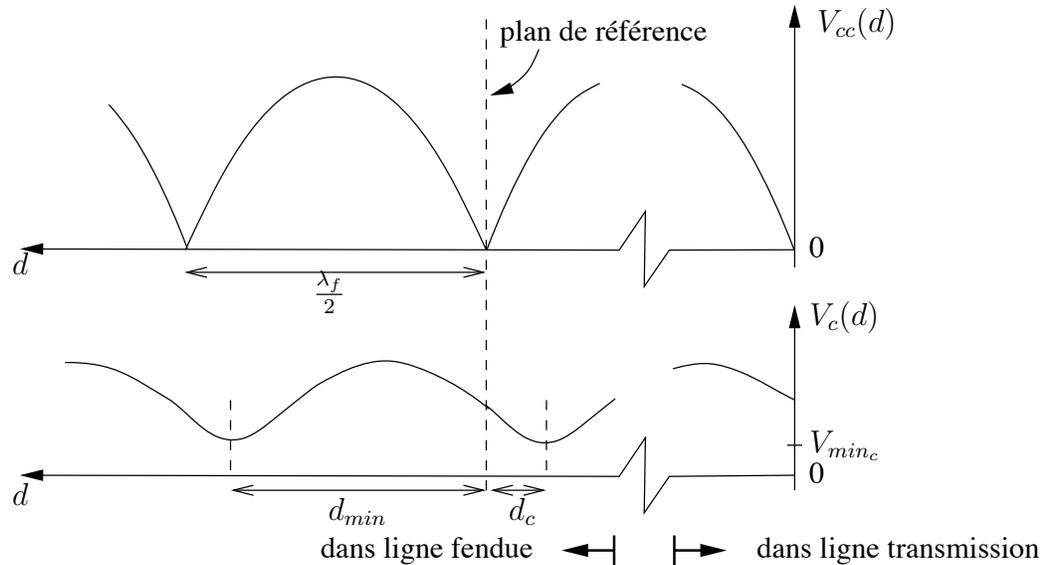


FIGURE 9.17 – Procédure pour déterminer  $d_{min}$  avec une ligne fendue et un plan de référence obtenu avec un court-circuit.

Lorsque la charge est remise, on mesure le décalage  $d_s$  entre plan de référence et le minimum le plus proche du plan de référence en s'éloignant de la charge (côté source). De cette manière, on obtient directement  $d_{min}$ . Si on décide de mesurer le décalage  $d_c$  en prenant le minimum le plus proche mais du côté de la charge, alors  $d_{min} = \lambda_f/2 - d_c$ . Le processus se comprend bien à partir de la figure 9.17.

**Exemple 9.12**

Soit une ligne de transmission RG-58 (impédance caractéristique de  $50\Omega$  et vitesse de propagation de 66%) qui se termine dans une charge inconnue. On insère une ligne fendue à air de même impédance quelque part sur la ligne principale. En court-circuitant la ligne au niveau de la charge, les minima consécutifs sont espacés de 30 cm. Avec un des minima marqué comme plan de référence, le court-circuit est ensuite retiré (la charge inconnue est remplacée). Un  $V_{min}$  est observé à 8.70 cm du plan de référence en s'en allant vers la charge.

- Déterminez l'argument du coefficient de réflexion de la charge inconnue.

Pour obtenir  $\xi_c = \angle \bar{\Gamma}_c$ , il faut d'abord trouver  $d_{min}$  car la distance mentionnée n'est pas  $d_{min}$  mais plutôt  $d_c$ . En se référant à la figure 9.17, on tire :

$$\begin{aligned}\lambda_f &= 2(30) \text{ cm} = 60 \text{ cm} \\ d_{min} &= (30 - 8.70) \text{ cm} = 21.3 \text{ cm} .\end{aligned}$$

Cette fois, on trouve de (9.68) :

$$\xi_c = \frac{4\pi}{60} (21.3) - \pi = 1.32 \text{ rad} .$$

► Déterminez la fréquence d'opération

---

La longueur d'onde mesurée dans la ligne fendue  $\lambda_f$  ne dépend que de la fréquence d'opération  $f_o$  et de la vitesse de propagation dans la ligne fendue  $v_{pf}$  selon  $\lambda_f = v_{pf}/f_o$ . Or, on a  $v_{pf} = c$  puisque le diélectrique est à air, d'où :

$$f_o = \frac{v_{pf}}{\lambda_f} = \frac{c}{\lambda_f} = \frac{3 \times 10^8}{0.6} = 500 \text{ MHz} .$$


---

## 9.7 Adaptation

Dès qu'une charge présente une impédance différente de l'impédance caractéristique, un rapport d'onde stationnaire s'établit. Cette situation peut devenir embarrassante :

- L'impédance vue à l'entrée de la ligne, au niveau de la source, varie selon plusieurs paramètres dont la longueur de la ligne et la fréquence d'opération selon  $\bar{\Gamma}_c e^{-j2\beta\ell}$  (longueur électrique de la ligne).
- La tension ou le courant peut devenir plus grand que celui prévu et dépasser les valeurs nominales de par le  $SWR$ .
- Une partie de la puissance fournie revient vers la source.

On imagine facilement que les divers abonnés d'un secteur à un cablo-distributeur viennent tous se raccorder en parallèles. L'impédance d'entrée de leur téléviseur respectif se trouve en parallèle avec ceux des autres abonnés après avoir parcouru une distance variable. L'impédance vue du secteur devient difficilement déterminable et change selon la fréquence du signal (entre 30 et 300 MHz habituellement pour les cablo-distributeurs). Certaines bandes seront avantagées alors que d'autre, au contraire, seront désavantagés. Il en va de même pour un réseau d'ordinateurs par exemple. Hydro-Québec, à cause de la longueur de son réseau de distribution, connaît aussi son lot de problèmes de même origine. Des surcharges importantes (de l'ordre de 10% par rapport à la valeur nominale,

entraînent l'ouverture des disjoncteurs et affectent des milliers d'abonnés. Les centrales de la Baie-James et Montréal sont séparés par un quart de longueur d'onde à 60 Hz. Sans compensation, dans les périodes de fortes consommation par les montréalais (charge tendant vers un court-circuit), le courant à la sortie des génératrices deviendrait nul, conséquences d'un circuit-ouvert. Il faut ré-équilibrer la charge à l'aide de compensateurs réactifs ajustables à mesure que la puissance active change.

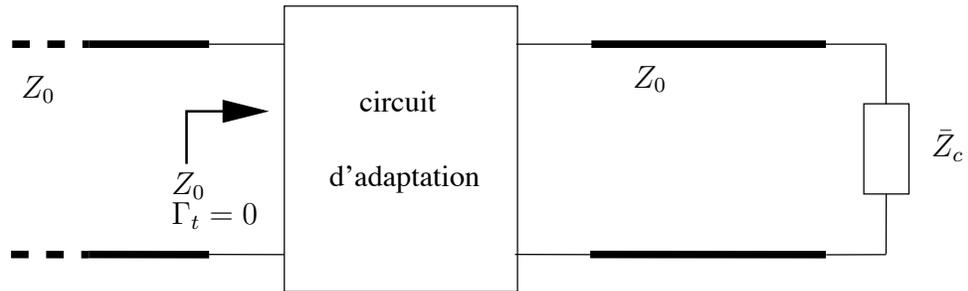


FIGURE 9.18 – Dispositif d'adaptation sur une ligne de transmission.

Ces quelques exemples démontrent l'importance de maintenir une charge équivalente qui élimine l'onde stationnaire en ne retournant aucune réflexion. On dit alors que la charge est adaptée (sous-entendu, à la ligne de transmission). Pour y arriver, on conçoit un dispositif d'adaptation dont le rôle est de transformer l'impédance (admittance) vue en une impédance (admittance) adaptée i.e. égale à l'impédance (admittance) caractéristique de la ligne. Normalement, ce dispositif représenté par la boîte sur la figure 9.18 :

- est placé le plus près possible de la charge ;
- ne contient aucun élément actif susceptible d'absorber une partie de la puissance incidente.

Il faut comprendre que cette notion d'adaptation diffère de celle en circuit qui permet un transfert maximal de la puissance en présentant à la source une impédance conjuguée-complexe de l'impédance interne de la source.

Pour adapter une charge à la ligne, on doit ajuster les deux composantes de l'impédance :

- la partie réelle doit passer de  $R_c$  à  $Z_o$  ;
- la partie imaginaire  $X_c$  doit devenir nulle.

Les techniques d'adaptation se doivent d'avoir deux paramètres d'ajustement pour parvenir à une adaptation complète. Si un seul paramètre est disponible, on combine des techniques d'optimisation pour s'approcher le plus possible de la solution idéale. La solution optimale procure le rapport d'onde stationnaire le plus faible.

Il existe beaucoup de techniques d'adaptation micro-onde. Celles présentées ont été choisies car elles servent de modèles ou de base pour les autres. On peut même imaginer des combinaisons de celles-ci.

### 9.7.1 Transformateur quart-d'onde

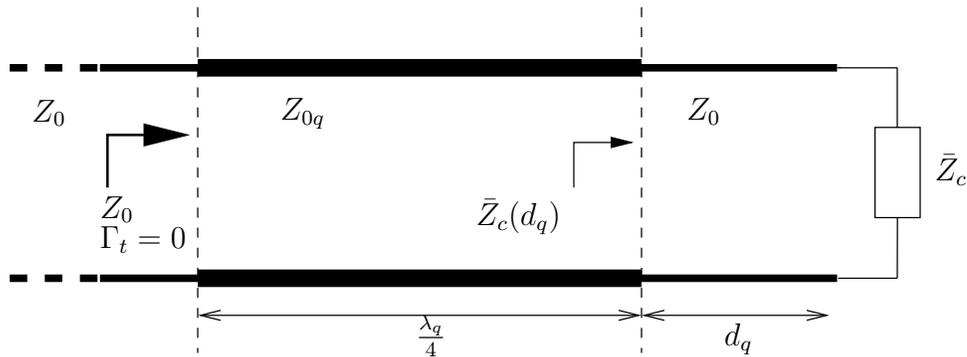


FIGURE 9.19 – Principe du transformateur  $\lambda/4$  pour adaptation.

Le transformateur quart-d'onde ou QWT (“Quarter-Wave Transfo”) s’appuie sur la propriété dictée en (9.49). Pour utiliser la propriété, on modifie l’impédance caractéristique d’un bout de ligne – le transformateur – sur une longueur de  $\lambda_q/4$  à un certain endroit, comme sur la figure 9.19. Les deux paramètres d’ajustement sont :

- l’impédance du transformateur  $Z_{oq}$  ;
- la distance du transformateur de la charge  $d_q$ .

L’équation (9.49), modifiée pour tenir compte du transformateur, s’écrit maintenant :

$$\bar{Z}_c(d_q) \underbrace{\bar{Z}_c(d_q + \frac{\lambda_q}{4})}_{Z_o} = Z_{oq}^2 . \tag{9.69}$$

Il est clair que pour accomplir l’adaptation selon (9.69),  $\bar{Z}_c(d_q)$  doit être réel car tous les autres termes de l’équation,  $Z_{oq}$  et  $Z_o$  sont réels. Il s’adonne que toute charge présente à certains endroits sur la ligne une impédance vue purement réelle qui prend la valeur de  $R_{min}$  ou  $R_{max}$ . Deux solutions en découlent mais le choix revient au concepteur car elles sont équivalentes en théorie. On pourra préférer l’une à l’autre parce qu’elle offre une distance plus courte entre la charge et le dispositif, ou encore une impédance caractéristique du transfo plus facile à réaliser.

- $\bar{Z}_c(d_q) = R_{min}$

Avec ce choix, on rappelle que la tension est aussi minimale (et le courant maximal). Donc, de (9.38) sous la contrainte de la plus courte distance, on a :

$$d_q^{(1)} = \min\{d_{min}\} = \frac{\lambda}{4\pi} (\xi_c + \pi) . \tag{9.70}$$

L’indice supérieur (1) réfère à la solution #1 et l’argument de  $\xi_c$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ . Quant à l’impédance du transformateur, on obtient de (9.69) sachant que  $R_{min} = Z_o/SWR$  selon (9.48) :

$$Z_{oq}^{(1)} = \frac{Z_o}{\sqrt{SWR}} . \tag{9.71}$$

- $\bar{Z}_c(d_q) = R_{max}$

Le développement suit le même parcours que dans la première solution ; on change les  $R_{min}$  par  $R_{max}$ ,  $d_{min}$  par  $d_{max}$  et l'indice (2). De (9.37) et (9.46), on a :

$$d_q^{(2)} = \min\{d_{max}\} = \frac{\lambda}{4\pi} \xi_c \tag{9.72}$$

$$Z_{oq}^{(2)} = Z_o \sqrt{SWR} . \tag{9.73}$$

Attention, ici, l'argument de  $\xi_c$  est compris entre 0 et  $+2\pi$ .

**Exemple 9.13**

Une charge  $\bar{Z}_c = (100 + j50)\Omega$  termine une ligne de transmission de  $50\Omega$ . On désire adapter cette charge à l'aide d'un transformateur quart-d'onde.

- Trouvez les valeurs des paramètres d'ajustement qui permettront l'adaptation en ayant le dispositif le plus près possible de la charge.

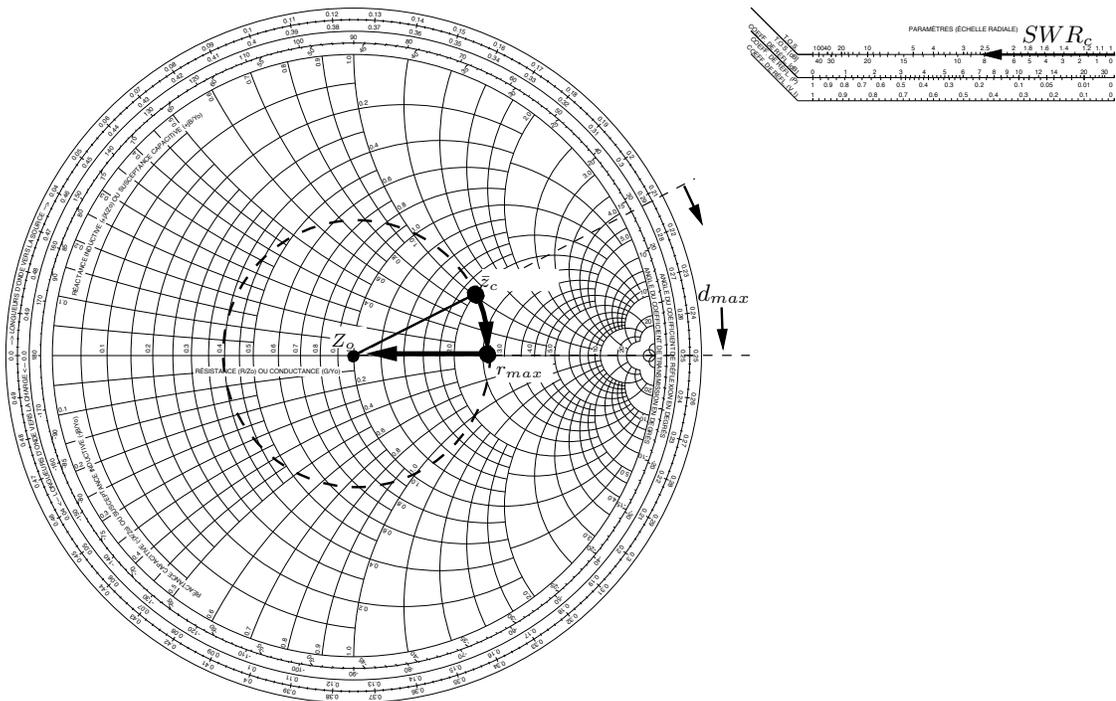


FIGURE 9.20 – Adaptation par QWT sur l’abaque de *Smith*.

En utilisant l’abaque de *Smith* de la figure 9.20, on trouve plus rapidement que :

$$\begin{aligned} d_{min} &= 0.287\lambda \\ d_{max} &= 0.037\lambda \\ SWR &= 2.618 \end{aligned}$$

Par calculs, on arrive à la même chose, puisque  $\bar{\Gamma}_c = 0.4472 \angle 26.6^\circ$  ( $0.464 \text{ rad}$ ).  
En effet, de (9.70) et (9.72), on tire :

$$d_q^{(1)} = \frac{\lambda}{4\pi} (0.464 + \pi) = 0.287\lambda = d_q^{(2)} + 0.25\lambda$$

et de (9.44) :

$$SWR = \frac{1 + 0.4472}{1 - 0.4472} = 2.618 .$$

La solution #2 procure la distance la plus courte comme souhaitée. Les paramètres d'ajustement valent donc :

$$\begin{aligned} d_q &= 0.037\lambda \\ Z_{oq} &= 50\sqrt{2.618} = 80.9\Omega . \end{aligned}$$

### 9.7.2 Réactance localisée simple

L'idée ici est d'utiliser une composante purement réactive localisée comme point de jonction à une position précise sur la ligne. Tout dépendant si la jonction est en série ou en parallèle, on travaillera en impédance ou en admittance respectivement. Les deux paramètres d'ajustement deviennent la valeur de cette réactance (série)  $X_s$  ou susceptance (parallèle)  $B_s$  et la distance entre la charge et la jonction  $d_s$ .

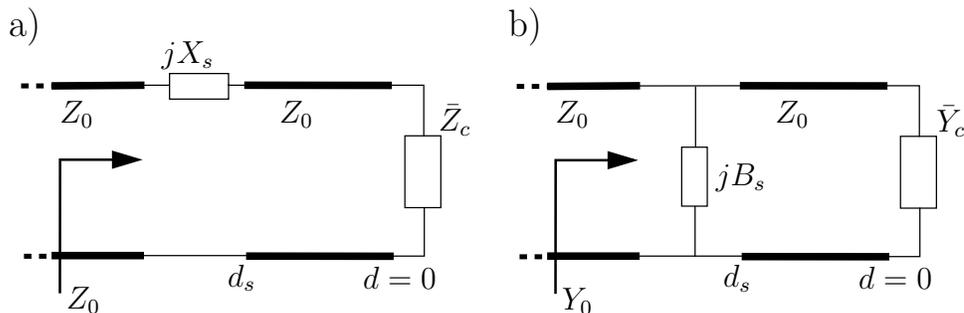


FIGURE 9.21 – Adaptation avec réactance localisée simple a) en série; b) en parallèle.

Dans le reste de la sous-section, on assume que la composante localisée est mise en série comme sur la figure 9.21 de gauche. Sinon, en parallèle (figure 9.21 de droite), on interchange les mots “impédance↔admittance”, “résistance↔conductance” et “réactance↔susceptance”.

Cette jonction purement réactive ne modifie que la réactance de l'impédance vue. Il faut donc que la partie réelle de l'impédance vue soit égale à l'impédance caractéristique  $Z_o$  ( $Y_o = 1/Z_o$ ) de la ligne de transmission. L'adaptation avec réactance localisée simple consiste à mettre une composante localisée à l'endroit précis où la partie réelle de l'impédance normalisée vue vaut l'unité. Sur l'abaque, aux endroits possibles, le cercle de  $SWR$  constant rencontre le cercle de résistance unitaire. La figure 9.22 montre un cercle de

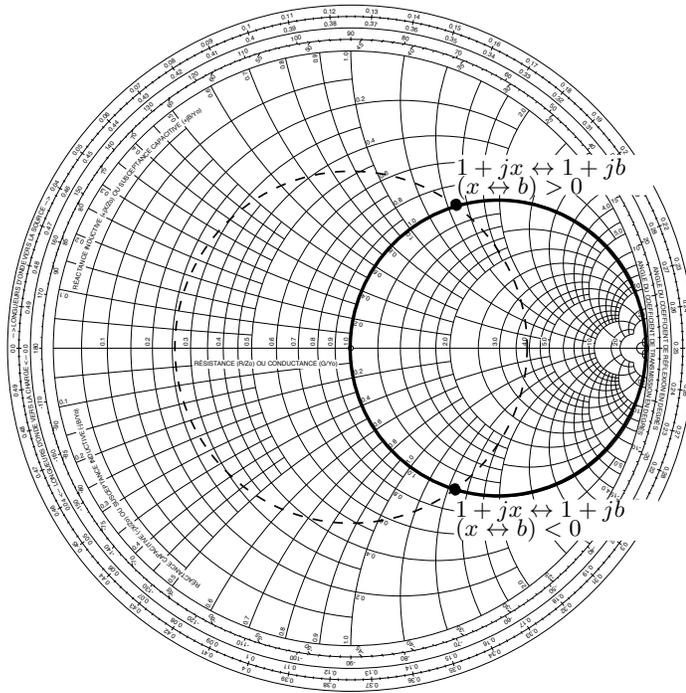


FIGURE 9.22 – Cercle de  $SWR$  constant et cercle de résistance↔conductance unitaire sur l’abaque de *Smith*.

$SWR$  constant sur lequel se trouve forcément la charge, et le cercle de résistance unitaire. Il y a deux intersections : le choix de l’une ou l’autre se fait en choisissant le plus proche de la charge. La jonction élimine la partie imaginaire en présentant une réactance égale mais de signe opposé. Les impédances et, par conséquent, les réactances en série s’additionnent (ce sont les admittances qui s’additionnent en parallèle). En résumé<sup>9</sup> :

- Partant de la charge, on se déplace sur la ligne de transmission jusqu’à ce que  $r_c(d) = 1$  ; cette distance correspond à  $d_s$ , la distance à partir de la charge où est mis la jonction série.
- On a que  $\bar{z}_c(d_s) = 1 + jx_c(d_s)$  ou encore  $\bar{Z}_c(d_s) = Z_o + jX_c(d_s)$ . La jonction série annule la réactance en présentant elle-même une réactance  $X_s = -X_c(d_s)$ .
- L’insertion de la jonction  $\bar{Z}_s = jX_s$  à la position  $d_s$  amène l’impédance vue à :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t &= \bar{Z}_s + \bar{Z}_c(d_s) \\ &= (-jX_c(d_s)) + (Z_o + jX_c(d_s)) = Z_o \end{aligned}$$

soit au centre de l’abaque tel que désiré.

<sup>9</sup>La notation est la suivante :  $\bar{z}_c(d) = r_c(d) + jx_c(d)$ , et pour ceux qui ont oublié les notions d’admittance en circuit :  $\bar{y}_c(d) = g_c(d) + jb_c(d)$ .

**Exemple 9.14**

La charge de l'exercice précédent  $\bar{Z}_c = (100 + j50)\Omega$  doit être adaptée à la même ligne ( $Z_o = 50\Omega$ ) par la technique d'une réactance localisée *en série*. Cette réactance doit être placée le plus près possible de la charge.

- Trouvez les valeurs des paramètres d'ajustement de la réactance localisée qui permettront l'adaptation.

Ces paramètres sont  $X_s$  et  $d_s$ .

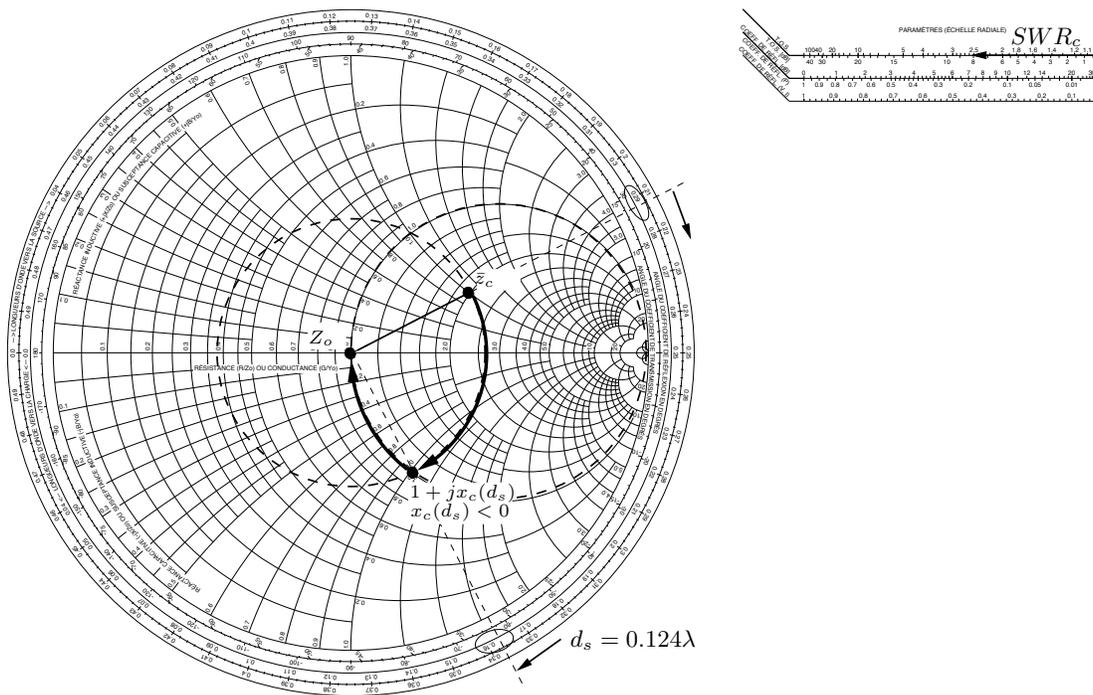


FIGURE 9.23 – Adaptation de  $\bar{Z}_c = (100 + j50)\Omega$  avec une réactance série sur l'abaque de *Smith*.

Sur l'abaque de la figure 9.23, on part de l'impédance normalisée  $\bar{z}_c = 2 + j1$ . En s'éloignant de la charge, le point de charge tourne suivant le cercle de  $SWR$  constant et rencontre le cercle de résistance unitaire la première fois au point  $\bar{z}_c(d_s) = 1 - j1.0$  après un déplacement de  $d_s = (0.287 - 0.163)\lambda = 0.124\lambda$ .

Il faut maintenant annuler la réactance vue  $x_c(d_s) = -1.0$  par la réactance du point de jonction.

Les paramètres d'ajustement valent :

$$d_s = 0.124\lambda$$

$$X_s = +1.0Z_o = +50\Omega .$$

**Exemple 9.15**

Une charge dont l'admittance vaut  $\bar{Y}_c = 0.008 + j0.024 S$  doit être adaptée à une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $Z_o = 50 \Omega$  avec la technique d'une réactance localisée *en parallèle*.

- Trouvez les valeurs des paramètres d'ajustement de la réactance localisée qui permettront l'adaptation.

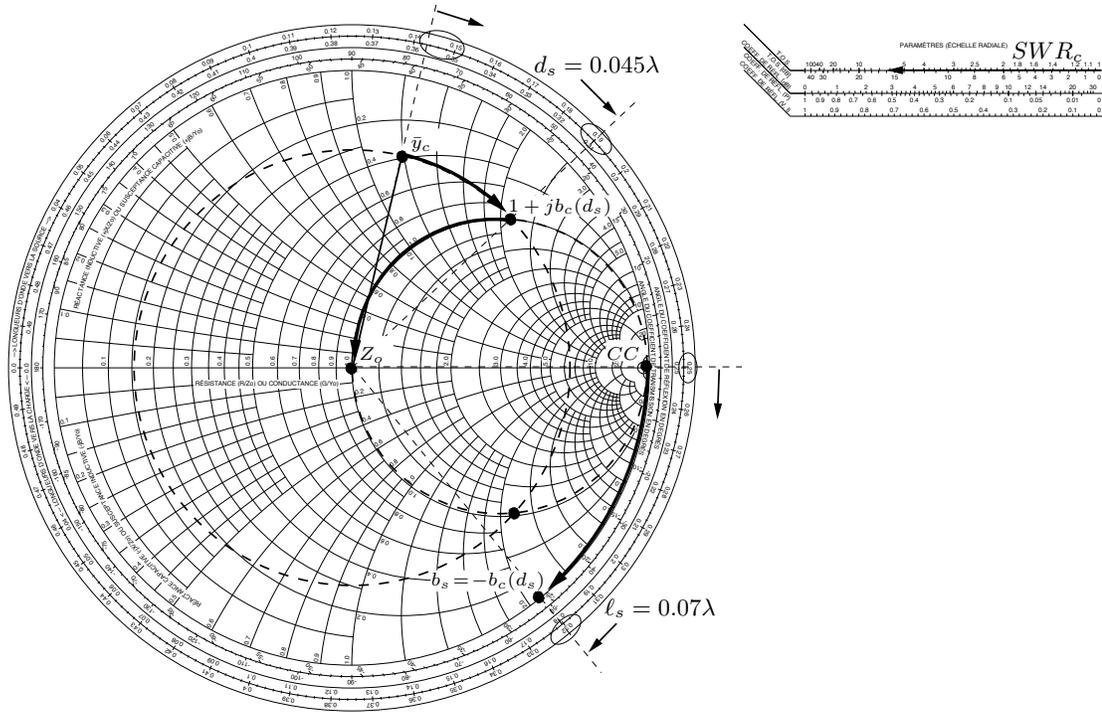


FIGURE 9.24 – Adaptation de  $\bar{Y}_c = 0.008 + j0.024 S$  ( $\bar{y}_c = 0.4 + j1.2$ ) avec une réactance parallèle et avec stub CC en parallèle sur l'abaque de *Smith*.

Encore une fois, il faut trouver  $d_s$  et  $B_s$ .

Comme la réactance est placée en parallèle, il vaut mieux travailler en admittance normalisée avec l'abaque de *Smith*.

L'intersection du cercle de  $SWR$  constant avec le cercle de conductance unitaire se réalise aux points de charge  $\bar{y}_c(0.045\lambda) = 1 + j2.12$  et  $\bar{y}_c(0.166\lambda) = 1 - j2.12$  sur la figure 9.24. Tout dépendant du choix, le point de jonction présentera une susceptance de  $b_s = \pm 2.12$ . Pour répondre adéquatement au critère d'une adaptation la plus proche possible de la charge, on choisit la solution  $\bar{y}_c(d_s) = 1 + j2.12$  et ainsi  $b_s = -2.12$ .

Les paramètres d'ajustement valent (notez que  $X_s/Z_o = x_s = -1/b_s$ ) :

$$d_s = 0.045\lambda$$

$$B_s = -2.12Y_o = \frac{-2.12}{50} S \implies X_s = +23.6 \Omega.$$

### 9.7.3 Stub simple

Avant d'expliquer l'adaptation avec stub simple, il convient de définir le stub au préalable. Le stub (il n'existe pas de mot français équivalent) est :

- une courte ligne de transmission de longueur électrique appropriée  $\ell_s/\lambda_s$  ;
- d'impédance quelconque  $Z_{os}$  – quoique parfois égale à celle de la ligne de transmission principale ;
- qui se termine dans un court-circuit ou dans un circuit-ouvert ;
- que l'on place en parallèle (parfois mais rarement en série) à une distance  $d_s$  avec la ligne de transmission principale.

Le stub présente à son entrée une impédance réactive pure ; il peut donc remplacer aisément la réactance du point de jonction pour l'adaptation avec réactance/susceptance localisée. Selon (9.19), cette impédance ou admittance a une valeur de :

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{s_{cc}} &= jX_s = jZ_{os} \tan(\beta_s \ell_s) \\ \bar{Y}_{s_{cc}} &= jB_s = -jY_{os} \cot(\beta_s \ell_s)\end{aligned}\quad (9.74)$$

pour un stub en court-circuit. Avec un stub en circuit-ouvert, on se sert de (9.20) :

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{s_{co}} &= jX_s = -jZ_{os} \cot(\beta_s \ell_s) \\ \bar{Y}_{s_{co}} &= jB_s = jY_{os} \tan(\beta_s \ell_s) .\end{aligned}\quad (9.75)$$

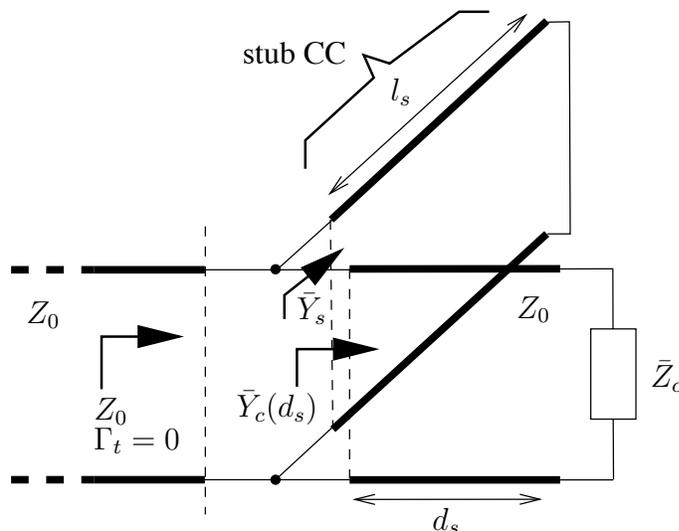


FIGURE 9.25 – Montage pour adaptation avec un stub CC en parallèle.

Le stub se retrouve normalement en parallèle comme sur la figure 9.25. Dans le reste de la sous-section, on assume que le stub est donc mis en parallèle. Sinon, en série, on interchange les mots “admittance↔impédance”, “conductance↔résistance” et “susceptance↔réactance”.

Ici, trois paramètres peuvent être ajustés, soient  $Z_{os}$ ,  $\ell_s$  et  $d_s$ . Cependant  $Z_{os}$  et  $\ell_s$  ne permettent que l'ajustement de la susceptance du stub. Ils sont donc interdépendants. De plus, le choix de  $Z_{os}$  est plus limitatif car  $Z_{os}$  ne peut être négatif alors que  $\tan(\beta_s \ell_s)$  (ou  $\cot(\beta_s \ell_s)$ ) prend des valeurs allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . On utilise alors  $\ell_s$  et  $d_s$  très souvent mais il demeure facile d'étendre le principe en utilisant plutôt  $Z_{os}$  et  $d_s$ .

L'adaptation à un stub suit la même procédure que celle de la susceptance simple localisée. Il suffit de remplacer à la dernière étape, la susceptance obtenue par un stub de même valeur.

- Le stub annule la susceptance en présentant lui-même une susceptance  $B_s = -B_c(d_s)$  en utilisant (9.75) ou (9.76). Ces équations n'insinuent pas qu'il faut un stub CC avec un  $B_s$  inductif (donc négatif) ; ou un stub CO avec un  $B_s$  capacitif. La tangente et la cotangente vont de  $-\infty$  à  $+\infty$  de sorte qu'un stub CC, par exemple, parvient à satisfaire pleinement tout besoin si le choix de  $\ell_s$  est complètement libre.

**Exemple 9.16**

La charge  $\bar{Y}_c = 0.008 + j0.024 S$  doit être adaptée à la ligne  $Z_o = 50\Omega$  par la technique du stub simple. Le stub doit être placé le plus près possible de la charge et être le plus court possible.

- Trouvez les valeurs des paramètres d'ajustement du stub CC qui permettront l'adaptation si la ligne du stub a les mêmes caractéristiques que celles de la ligne de transmission principale.

---

La contrainte fait que  $Z_{os} = Z_o$  et  $\beta_s = \beta$  et ainsi  $\lambda_s = \lambda$ . Il faut trouver  $d_s$  et  $\ell_s$ .

Si on se réfère à l'exemple 9.15 et à la figure 9.24, la distance où doit être placée le stub est la même que celle obtenue soit  $d_s = 0.045\lambda$  et la susceptance pour annuler reste  $b_s = -2.12$ .

On peut continuer avec l'abaque ou faire le calcul à partir de (9.75) pour obtenir la longueur du stub  $\ell_s$ . Sur l'abaque, on part du point de charge représentant le court-circuit en admittance ( $1/0$ , donc l'infini) et on tourne en suivant le pourtour de l'abaque. On remarque que le stub CC très court présente d'abord une susceptance négative puis, à partir d'une longueur de  $\lambda_s/4$ , une susceptance positive jusqu'à  $\lambda_s/2$  et ainsi de suite. Il a fallu effectuer un déplacement de  $0.07\lambda_s$  pour arriver jusqu'au point de charge  $0 - j2.12$ .

Les paramètres d'ajustement valent :

$$\begin{aligned} d_s &= 0.045\lambda \\ \ell_s &= 0.070\lambda_s = 0.070\lambda . \end{aligned}$$

- Répétez si le stub est plutôt CO.
-

La distance  $d_s$  ne change pas.

Par contre la longueur du stub sera différente. Intuitivement, elle sera plus courte ou plus longue de  $\lambda_s/4$  par rapport à celle du stub CC. Sur l'abaque, on part du point de charge représentant le circuit-ouvert en admittance ( $1/\infty = 0$ ) et on tourne en suivant le pourtour de l'abaque jusqu'à arriver au point de charge  $0 - j2.12$  soit un déplacement de  $0.32\lambda_s$ .

- Trouvez les valeurs des paramètres d'ajustement du stub qui permettront l'adaptation si la ligne du stub a une longueur fixe de  $0.1\lambda_s$  et une impédance caractéristique  $Z_{os}$ .

Ici,  $\lambda_s$  et  $Z_{os}$  peuvent différer de celles de la ligne de transmission principale. Cette fois, les paramètres d'ajustement sont  $d_s$  et une combinaison  $Z_s$  avec type de stub (CC ou CO). Un stub de longueur fixe  $0.1\lambda_s$  présente toujours une susceptance, d'après (9.75) et (9.76) :

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{scc} &= -j \frac{\cot(\beta_s 0.1\lambda_s)}{Z_{os}} = -j \frac{\cot(0.2\pi)}{Z_{os}} = -j \frac{1.376}{Z_{os}} \\ \bar{Y}_{sco} &= j \frac{\tan(\beta_s 0.1\lambda_s)}{Z_{os}} = j \frac{0.726}{Z_{os}}.\end{aligned}$$

Si  $B_s$  du stub doit être négatif, le stub CC s'impose ; un stub CO à l'inverse.

L'emplacement du stub n'a pas changé soit celle où l'admittance normalisée vue de la charge possède une conductance normalisée unitaire  $\bar{y}_c(0.045\lambda) = 1 + j2.12$ . La susceptance normalisée par rapport à  $Z_o$  du stub doit valoir  $b_s = B_s/Y_o = -2.12$  donc :

$$\bar{Y}_s = jB_s = -j2.12(Y_o) = -j0.0424 S.$$

Comme résultat, il faut un stub CC avec les paramètres d'ajustement suivants :

$$\begin{aligned}d_s &= 0.045\lambda \\ Z_{os} &= 32.46 \Omega.\end{aligned}$$

### Exemple 9.17

La charge  $\bar{Z}_c = (100 + j50)\Omega$  doit être adaptée à la ligne  $Z_o = 50\Omega$  par la technique du stub simple placé le plus près possible de la charge.

- Trouvez les valeurs des paramètres d'ajustement du stub CC *en parallèle* ayant  $\lambda_s = \lambda$  et  $Z_{os} = Z_o$  qui permettront l'adaptation .

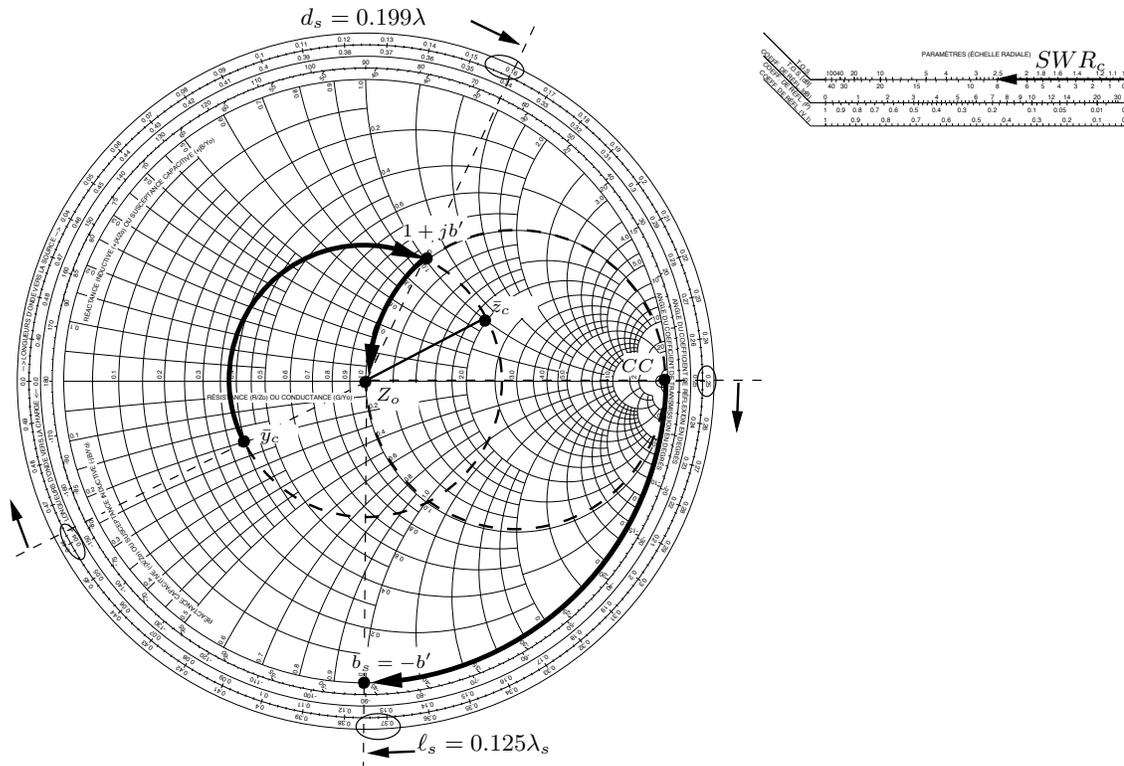


FIGURE 9.26 – Adaptation avec un stub le plus proche, de mêmes caractéristiques que la ligne de transmission sur l’abaque de *Smith*.

Il faut donc jouer sur  $\ell_s$  et  $d_s$  qui deviennent ainsi les deux paramètres d’ajustement.

Sur l’abaque de la figure 9.26, on part de l’admittance normalisée  $\bar{y}_c = 0.4 - j0.2$  qui est à l’opposée de l’impédance normalisée  $\bar{z}_c = 2 + j1$ . En s’éloignant de la charge, le point de charge tourne suivant le cercle de *SWR* constant et rencontre le cercle de conductance unitaire la première fois au point  $\bar{y}_c(0.199\lambda) = 1 + j1.0$ .

La longueur du stub est celle pour laquelle la susceptance normalisée du stub vaut  $b_s = -1.0$ . On peut continuer avec l’abaque ou faire le calcul. Sur l’abaque, partant de l’admittance infinie, on suit le pourtour sur une distance de  $0.125\lambda_s$  pour arriver au point de charge  $0 - j1.0$ .

Les paramètres d’ajustement valent :

$$\begin{aligned} d_s &= 0.199\lambda \\ \ell_s &= 0.125\lambda_s = 0.125\lambda . \end{aligned}$$

- Si le stub CC en parallèle est plutôt fait d’une ligne ayant  $Z_{os} = 75\ \Omega$  et  $\beta_s = 1.2\beta$ , déterminez  $\ell_s$  et  $d_s$  en termes de  $\lambda$  pour l’adaptation.

La distance  $d_s$  ne change pas car elle ne dépend que des caractéristiques de la ligne principale et de la charge.

Puisque  $\bar{y}_c(d_s)$  conserve la même valeur, l'admittance du stub vaut encore  $\bar{Y}_s = -j1(Y_o) = -j0.02 S$ . Normalisée par rapport à l'admittance caractéristique de la ligne réalisant le stub  $Y_{os}$ , on obtient maintenant :  $\bar{y}_{s75} = -j1.5$ . Sur l'abaque, en partant toujours du court-circuit en admittance et en tournant jusqu'à  $(0 - j1.5)$ , le déplacement est de  $0.0936\lambda_s$ .

Les paramètres d'ajustement avec ce stub CC de  $75 \Omega$  valent :

$$d_s = 0.199\lambda$$

$$\ell_s = 0.0936\lambda_s = 0.0936 \frac{\lambda}{1.2} = 0.078\lambda .$$

### 9.7.4 Double stub

L'utilisation d'un second stub élimine (jusqu'à une certaine limite toutefois) une localisation précise du circuit d'adaptation. La technique du transformateur quart-d'onde ou du stub simple oblige la ligne transfo ou le stub d'être à une certaine distance de la charge selon la valeur de cette charge. Ce sont les distances  $d_q$  et  $d_s$  qui fixent l'emplacement du circuit d'adaptation. Dans certains arrangements de lignes de transmission, ceci risque de devenir un inconvénient : emplacement difficile d'accès, emplacement variable avec charge variable, etc.

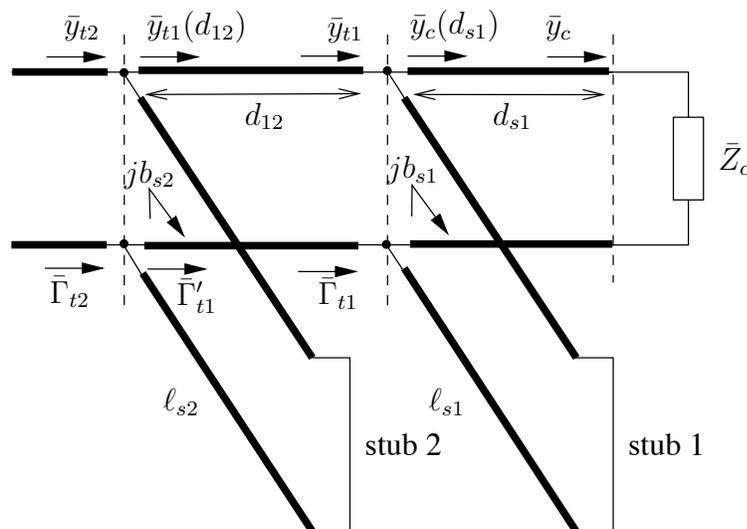


FIGURE 9.27 – Montage pour adaptation avec double stubs CC en parallèle.

Avec un second stub (voir figure 9.27), les paramètres d'ajustement deviennent les susceptances  $B_{s1}$  et  $B_{s2}$  dépendantes des paramètres  $\ell_{si}$ ,  $Z_{osi}$  et  $\beta_{si}$  ( $i = 1, 2$ ) de chacun des stubs. Si on utilise des lignes ayant les mêmes caractéristiques que celle de la ligne de transmission principale, alors les paramètres d'ajustement seront les deux longueurs  $\ell_{s1}$  et  $\ell_{s2}$ . La distance entre les stubs  $d_{12}$  est souvent fixée. En règle générale, on choisit :

$$d_{12} = \frac{\lambda}{8}, \frac{3\lambda}{8}, \frac{5\lambda}{8}, \dots$$

parce que ces choix optimisent les charges pouvant être adaptées avec cette technique. Quant à la distance entre la charge et le premier stub (celui le plus proche de la charge)  $d_{s1}$ , elle peut être quelconque mais doit être connue avant d'effectuer les calculs.

L'adaptation avec double stub présente l'intérêt pédagogique d'une transformation conforme dans le plan  $u - v$ . On retrouve d'autres transformations conformes lors de l'optimisation (prochaine section).

Le principe sous-jacent exige un rôle différent pour chacun des stubs :

- le deuxième stub élimine la partie imaginaire de l'admittance (en parallèle) ou de l'impédance (en série) de la charge vue à sa position  $d_{s2} = d_{s1} + d_{12}$  ;
- le premier stub doit absolument être ajusté pour que la partie réelle de l'admittance/impédance vue à la distance du second stub soit égale à  $Z_o$ .

Si on comprend bien, le principe s'exprime mathématiquement comme suit pour des stubs en parallèles (pour des stubs en série, on remplace les  $\bar{Y}$  par  $\bar{Z}$  ; les  $G$  par  $R$  ; et les  $B$  par  $X$ ) :

$$\bar{Y}_{t1} = \bar{Y}_c(d_{s1}) + jB_{s1} \tag{9.76}$$

$$\bar{Y}_t = \underbrace{\bar{Y}_{t1}(d_{12})}_{Y_o - jB_{s2}} + jB_{s2} \tag{9.77}$$

$$= Y_o . \tag{9.78}$$

On y voit bien le rôle de chacun des stubs.

La longueur du second stub est telle que l'admittance présentée par le stub est une susceptance pure dont la valeur vaut

- le négatif de la susceptance
- de l'admittance vue à la position  $d_{s2}$
- d'une charge constituée ainsi
- la charge à adapter vue à la distance  $d_{s1}$ , augmentée par la susceptance du premier stub, le tout vu à la distance  $d_{12}$ .

L'adaptation est réalisable si, et seulement si, l'admittance normalisée vue à la position  $d_{s2}$  est située sur le cercle de conductance unitaire. En conséquence, la longueur du premier stub amène

- la charge initiale vue à la distance  $d_{s1}$
- à quelque part sur le cercle de conductance unitaire
- qui est déplacée vers la source d'une distance  $d_{12}$ .

Pour bien voir la transformation conforme produite par le déplacement  $d_{12}$ , il convient de regarder les lieux mathématiques, i.e. l'ensemble des valeurs possibles.

Le lieu de  $\bar{y}_{t1}(d_{12})$  correspond au cercle de conductance unitaire. Le lieu de  $\bar{y}_{t1}$  correspond alors au déplacement de chacun des points du lieu de  $\bar{y}_{t1}(d_{12})$  par une distance  $d_{12}$  vers la source. À l'aide de quelques points, on constate sur la figure 9.28 que le nouveau lieu, celui de  $\bar{y}_{t1}$ , est aussi un cercle d'où l'appellation conforme. Plus précisément, le lieu

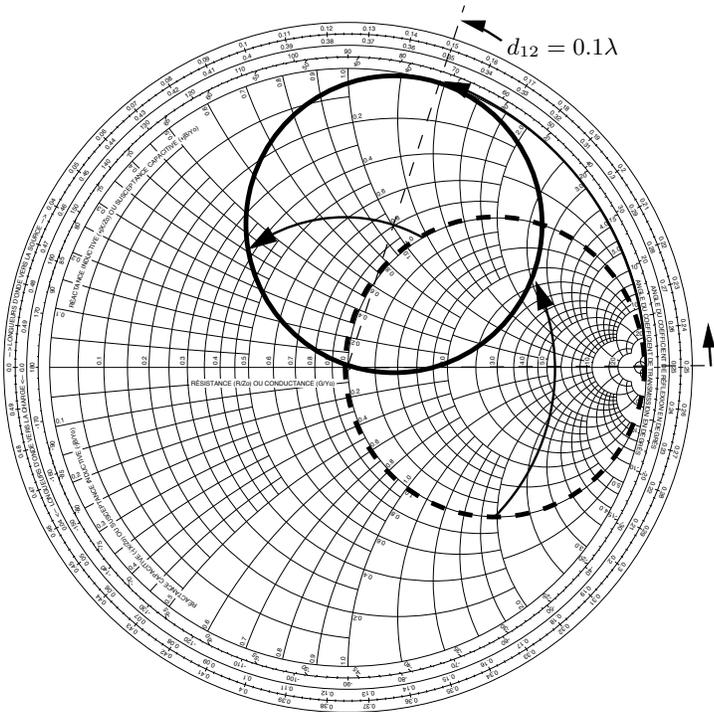


FIGURE 9.28 – Transformation conforme produite par le déplacement  $d_{12}$  du cercle de conductance/résistance unitaire.

de  $\bar{y}_{t1}$  se trouve en tournant le cercle de conductance unitaire dans le sens anti-horaire par rapport au centre de l'abaque, d'un angle  $4\pi d_{12}/\lambda$ .

Sur l'abaque de *Smith* en admittance, le premier stub doit amener le point de la charge vue à la distance  $d_{s1}$  sur le lieu de  $\bar{y}_{t1}$  uniquement en modifiant la partie imaginaire de l'admittance. En effet, le stub en parallèle n'affecte pas la conductance. On peut donc définir un second lieu possible de  $\bar{y}_{t1} = g_{t1} + jb_{t1}$  qui correspond à celui d'une conductance constante  $g_{t1}$ , car la susceptance  $b_{t1}$  est ajustable selon la longueur du stub #1. Sur la figure 9.29, on voit la double intersection correspondant aux deux lieux possibles de  $\bar{y}_{t1}$ . Ce sont les deux solutions valables qui permettront l'adaptation. Pour certaines valeurs de charge  $\bar{y}_c(d_{s1})$ , les deux lieux ne se couperont pas : aucune solution existe dans ces conditions et un changement de  $d_{s1}$  doit être envisagé.

Les étapes de l'adaptation double stubs en parallèle sont :

- tracer le lieu du cercle de conductance constante unitaire déplacé d'un angle  $4\pi d_{12}/\lambda$  vers la charge ;
- localiser le point de charge  $\bar{y}_c(d_{s1}) = g_c(d_{s1}) + jb_c(d_{s1})$  et, de là, tracer le lieu de conductance constante ;
- choisir l'un des deux points d'intersection ; le point choisi donne la charge vue au niveau du premier stub  $\bar{y}_{t1} = \bar{y}_c(d_{s1}) + jb_{s1}$  et informe sur le rapport d'onde stationnaire présent sur la ligne entre les deux stubs ;
- déterminer la longueur du stub #1 pour obtenir  $b_{s1} = b_{t1} - b_c(d_{s1})$  ;

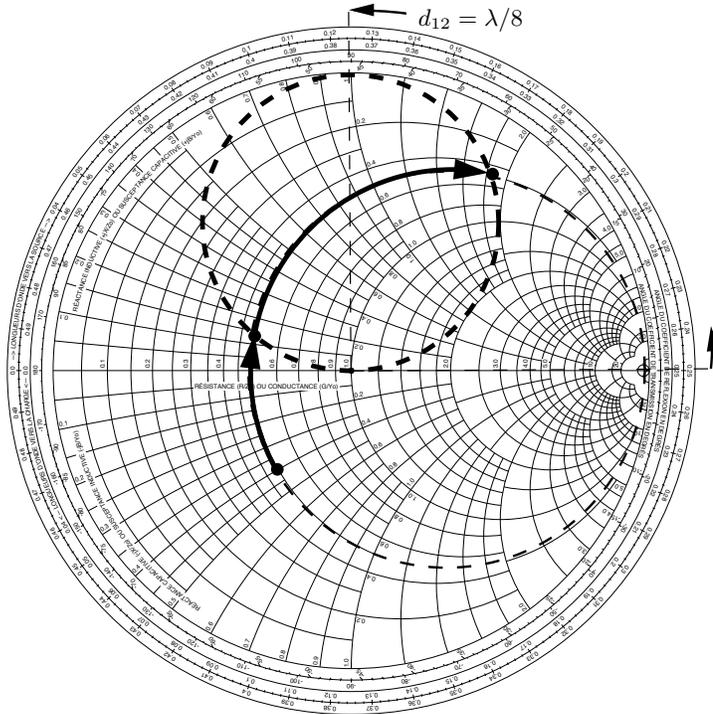


FIGURE 9.29 – Intersections des lieux de  $\bar{y}_{t1}$  : cercle de conductance/résistance unitaire déplacé et conductance constante.

- récupérer  $\bar{y}_{t1}(d_{12})$  en suivant un rapport d'onde stationnaire constant sur un angle de  $-4\pi d_{12}/\lambda$  ; normalement, on devrait situer  $\bar{y}_{t1}(d_{12}) = 1 + jb_t(d_{12})$  sur le cercle de conductance unitaire ;
- déterminer la longueur du stub #2 pour obtenir  $b_{s2} = -b_{t1}(d_{12})$  et ainsi annuler complètement la susceptance.

**Exemple 9.18**

Une charge dont l'impédance normalisée vaut  $\bar{z}_c = (0.5 - j1.0)$  termine une ligne de transmission. On désire adapter la charge avec la technique du double stubs CC en parallèle espacés de  $\lambda/8$ , avec des lignes qui possèdent les mêmes caractéristiques que celles de la ligne de transmission principale. On choisit la solution qui minimise le rapport d'onde stationnaire entre les deux stubs.

- Donnez les longueurs de chacun des stubs si le premier doit se situer au niveau de la charge ( $d_{s1} = 0$ ).

On utilise l'abaque de *Smith* de la figure 9.30 ; on remarque que cette charge produit un rapport d'onde stationnaire de  $SWR = 4.27$ . L'admittance normalisée de la charge vue au niveau du premier stub vaut :

$$\bar{y}_c(d_{s1} = 0) = \bar{y}_c = \frac{1}{0.5 - j1.0} = 0.4 + j0.8$$

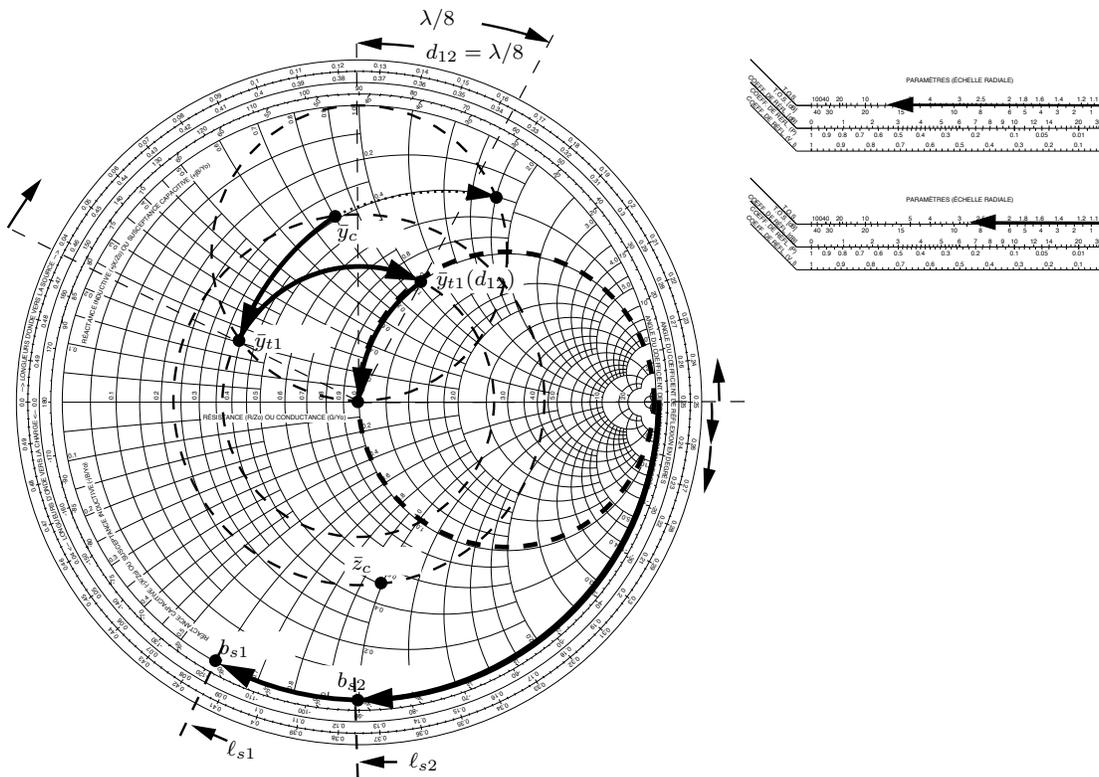


FIGURE 9.30 – Adaptation avec double stub sur l’abaque de *Smith* avec  $d_{12} = \lambda/8$ .

Le lieu des admittances de conductance égale à 0.4 croise le lieu de conductance unitaire déplacé de  $\lambda/8$  vers la charge aux deux points suivants :

- $\bar{y}_{t1_1} = 0.4 + j0.2$ ;
- $\bar{y}_{t1_2} = 0.4 + j1.8$  .

Le rapport d’onde stationnaire entre les deux stubs sera de  $SWR_1 = 2.618$  ou  $SWR_2 = 10.91$  pour le premier et second choix respectivement. On préfère, selon la donnée du problème, le premier choix, soit :

$$\bar{y}_{t1} = 0.4 + j0.2$$

donc<sup>10</sup> :

$$b_{s1} = 0.2 - (0.8) = -0.6 = -\cot(\beta\ell_{s1})$$

et pour le premier stub CC :

$$\ell_{s1} = 0.164\lambda .$$

La charge et le premier stub vus au niveau du second stub vaut sur l’abaque de *Smith* :

$$\bar{y}_{t1}(d_{12}) = 1 + j1 .$$

<sup>10</sup>L’impédance normalisée d’un stub CC s’exprime  $j \tan(\beta\ell)$ .

Tout semble fonctionner jusqu'à présent car la conductance de  $\bar{y}_{t1}(d_{12})$  est bien unitaire. Le second stub CC élimine la susceptance donc :

$$b_{s2} = -1 = -\cot(\beta\ell_{s1})$$

et aussi pour le second stub CC :

$$\ell_{s2} = 0.125\lambda .$$

Avec le second choix, on aurait obtenu  $\ell_{s1} = 0.375\lambda$  ( $b_{s1} = 1$ ) et  $\ell_{s2} = 0.449\lambda$  ( $b_{s2} = 3$ ).

- Donnez les longueurs de chacun des stubs si le premier doit se situer à  $0.11\lambda$  la charge.

L'admittance normalisée de la charge vue au niveau du premier stub vaut :

$$\bar{y}_c(0.11\lambda) = 3.01 + j1.87 .$$

Jamais le lieu des admittances de conductance égale à 3.01 croise le lieu de conductance unitaire déplacé de  $\lambda/8$  vers la source : pas de solution possible.

**Exemple 9.19**

Une charge  $\bar{z}_c = (2 + j1)$  est adaptée avec la technique du double stubs CC en parallèle espacés de  $3\lambda/8$ . Les stubs sont fait avec des lignes dont les caractéristiques sont les mêmes que celles de la ligne principale. La solution minimise le rapport d'onde stationnaire entre les deux stubs.

- Donnez les longueurs de chacun des stubs si le premier doit se situer au niveau de la charge ( $d_{s1} = 0$ ).

On utilise l'abaque de *Smith* de la figure 9.31. L'admittance normalisée de la charge vue au niveau du premier stub vaut :

$$\bar{y}_c(d_{s1} = 0) = 0.4 - j0.2$$

Le croisement des lieux se fait aux deux points :

- $\bar{y}_{t1_1} = 0.4 - j0.2$ ;
- $\bar{y}_{t1_2} = 0.4 - j1.8$  .

On remarque que ces points de charge sont les conjugués complexes des points obtenus à l'exemple 9.18 précédent. Ce résultat est attribuable à la symétrie par rapport à l'axe  $u$  de l'abaque de *Smith*. Pour cet exemple autant que pour

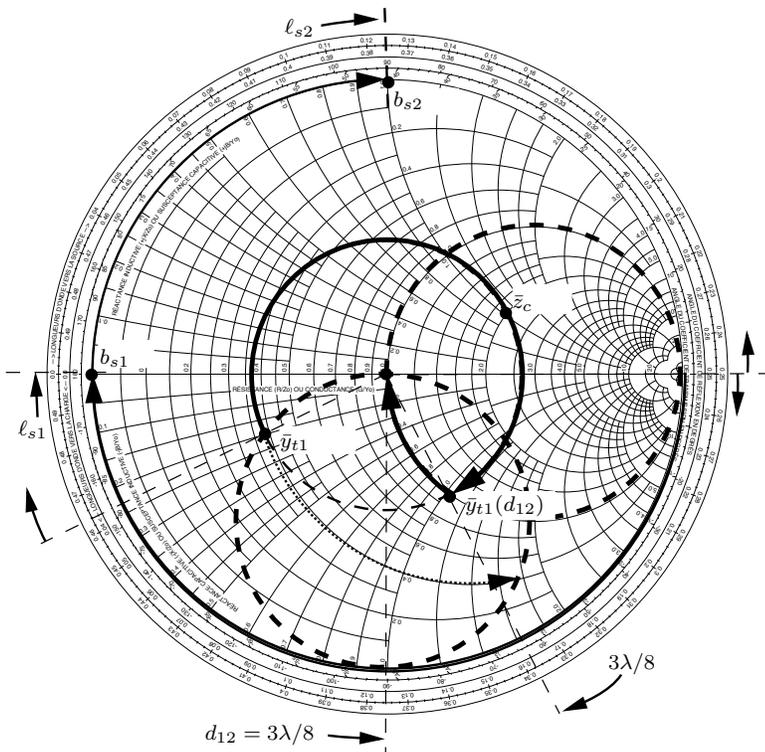


FIGURE 9.31 – Adaptation avec double stub sur l’abaque de *Smith* avec  $d_{12} = 3\lambda/8$ .

l’exemple précédent, on a  $g_c(d_{s1}) = 0.4$  mais le lieu de conductance unitaire et décalé d’un demi-tour, se retrouvant dans la partie des susceptances négatives. Le choix #1 répond à la donnée du problème :

$$\bar{y}_{t1} = 0.4 - j0.2$$

donc :

$$b_{s1} = -0.2 - (-0.2) = 0$$

$$\ell_{s1} = 0.25 .$$

La charge et le premier stub vus au niveau du second stub vaut sur l’abaque de *Smith* :

$$\bar{y}_{t1}(d_{12}) = 1 - j1 .$$

Tout semble fonctionner jusqu’à présent car la conductance de  $\bar{y}_{t1}(d_{s1})$  est bien unitaire. Le second stub CC élimine la susceptance donc :

$$b_{s2} = 1$$

$$\ell_{s2} = 0.375\lambda .$$

Avec le second choix, on aurait obtenu  $\ell_{s1} = 0.089\lambda$  ( $b_{s1} = -1.6$ ) et  $\ell_{s2} = 0.051\lambda$  ( $b_{s2} = -3$ ).

### 9.7.5 Largeur de bande d'adaptation

La largeur de bande d'adaptation se définit ainsi : la bande de fréquence pour laquelle le rapport d'onde stationnaire reste inférieur à un seuil fixé à l'avance. Ce seuil – toujours supérieur à l'unité car  $SWR \geq 1$  – dépend grandement de l'application :

- pour la télédiffusion, il vaut 1.05 ;
- pour les antennes de réception, on choisit souvent 1.1 ;
- pour des applications électroniques générales, on tolère 1.5 et même un peu plus.

Un rapport d'onde stationnaire mieux que 1.05 indique que moins de 0.06% de la puissance est réfléchiée vers la source par la charge avec le circuit d'adaptation. On vérifie que le coefficient de réflexion est limité à  $\Gamma_{c+adap} \leq 0.0244$ . Lorsque  $SWR = 1.5$ , 4% de la puissance est retournée.

La largeur de bande obtenue avec un circuit d'adaptation n'est pas infinie, puisque le circuit d'adaptation est syntonisé : toutes les longueurs et distances sont exprimées en terme de longueurs d'onde. En changeant la fréquence, les longueurs et distances physiques demeurent les mêmes, mais non les longueurs et distances électriques. Le circuit n'adapte plus parfaitement aux environs de la fréquence  $f_o$  pour laquelle il a été conçu ; il devient de moins en moins performant au fur et à mesure que la fréquence d'opération s'éloigne de  $f_o$ . La largeur de bande  $\Delta_f$  est calculée en prenant la différence  $\Delta_f = f_{swr_2} - f_{swr_1}$  des fréquences où on obtient la valeur du seuil fixé pour le  $SWR$ . On parle de circuit à large bande dès que le rapport  $\Delta_f/f_o$  (aussi noté  $\Delta_f : f_o$ ) dépasse 2.

La largeur de bande d'adaptation, selon la nature des signaux, peut devenir un critère de première importance dans le choix d'un circuit d'adaptation plutôt qu'un autre. Des signaux modulés occupant une grande gamme de fréquences (e.g. des signaux à grand débit binaire, multiplexé en fréquence) nécessiteront un circuit d'adaptation à large bande si transmis sur des lignes. Les règles du pouce :

- plus il y a de composantes dépendant de la fréquence (ou longueur d'onde)
- plus les lignes de transmission (stubs, bouts de lignes) sont longues ;

plus le circuit sera sensible à la fréquence, ce qui diminue la largeur de bande d'adaptation.

Des implications immédiates des règles du pouce peuvent être observées : prendre les stubs les plus courts possibles et les plus proches possibles de la charge ; faire l'adaptation à un stub de préférence.

## 9.8 Optimisation du SWR

On a pu constater la puissance de l'abaque de *Smith* comme outil micro-onde. L'optimisation constitue la quintessence. Comme son nom l'indique, l'optimisation consiste à trouver la valeur d'un paramètre d'ajustement qui minimise une fonction de coût.

On parle ici d'optimisation, car il arrive qu'on a pas assez de degrés de liberté en pratique pour réaliser une adaptation parfaite. On cherche alors la meilleure solution étant donné les contraintes.

Une des variables qui doit souvent être optimisée est le SWR ; ce dernier devient ici la fonction de coût. Un exemple classique rencontré en pratique est la détermination d'une réactance pure qui, lorsque insérée sur une ligne de transmission, minimise le SWR produit par la charge. **Dans cet exemple, un seul paramètre d'ajustement est disponible alors que l'adaptation en nécessite au moins deux.** On comprend que l'adaptation risque d'être incomplète ; alors plutôt que d'amener la charge totale vue au centre de l'abaque de *Smith* comme pour une adaptation, on se contente de placer la charge totale vue le plus près du centre. Le rapport d'onde stationnaire sur la ligne devient la fonction de coût à minimiser. Cependant, l'optimisation ne se limite pas qu'au SWR comme fonction de coût ; les cas varient à l'infini !

La meilleure manière d'utiliser l'abaque de *Smith* dans le but d'optimisation est de faire appel aux lieux mathématiques et aux transformations, qu'elles soient conformes ou non. En effet, opérer à l'aide des lieux et des transformations évite d'essayer un grand nombre de valeurs du paramètre d'ajustement.

L'idée consiste à suivre ces étapes :

- Trouver l'ensemble des possibilités qu'offre le paramètre d'ajustement. Celui-ci prend souvent un ensemble de valeurs limité. Par exemple, la longueur d'un bout de ligne ajouté se limite de 0 à  $\lambda/2$  puisque distance est modulo  $\lambda/2$  sur l'abaque.
- Cet ensemble de valeurs affecte la charge normalisée directement ou vue à une certaine distance sur l'abaque. Il s'agit de trouver l'ensemble des valeurs potentielles de cette charge sur l'abaque ; cela forme un premier lieu. Souvent le lieu est un cercle ou un arc de cercle.
- S'il y a d'autres choses entre le dispositif qui agit comme paramètre d'ajustement et la ligne de transmission principale, il faut procéder à des transformations.
- Pour réaliser une transformation, il suffit de prendre 3 points ou plus du lieu précédent et, sur l'abaque ou par calculs, trouver la nouvelle charge vue après la chose. Par exemple, si un stub est placé en parallèle après le dispositif (donc entre la ligne et le dispositif), on ajoute sa susceptance à celle du point choisi du lieu précédent si celui-ci représente une admittance. La nouvelle admittance deviendra un point du nouveau lieu.
- À partir des trois points ou plus du nouveau lieu, on essaie de faire passer un cercle ou un arc de cercle qui représentera l'ensemble des possibilités vues à cet endroit.
- Une fois trouvé le lieu final au niveau de la ligne de transmission principale, on cherche le point sur ce lieu qui est le plus proche du centre puisqu'il représente la

charge normalisée optimale vue à cet endroit produisant le plus faible SWR parmi l'ensemble des possibilités.

- Reste à déduire quelle est la valeur du paramètre d'ajustement qui a fourni cette charge optimale.
- Partant du point optimal sur le lieu final, on revient alors au lieu précédent pour trouver quelle est le point qui a procuré ce point optimal en faisant la transformation inverse.
- Arrivé au premier lieu, il devient possible de récupérer la valeur du paramètre d'ajustement.

Si l'emploi du lieu et des transformations semble trop difficile, il est toujours possible de procéder itérativement en essayant une valeur du paramètre d'ajustement, puis une autre ; selon les résultats obtenus, choisir la suivante par interpolation selon les résultats et recommencer.

Ne pouvant faire que du cas par cas, il convient de montrer par des exemples.

**Exemple 9.20**

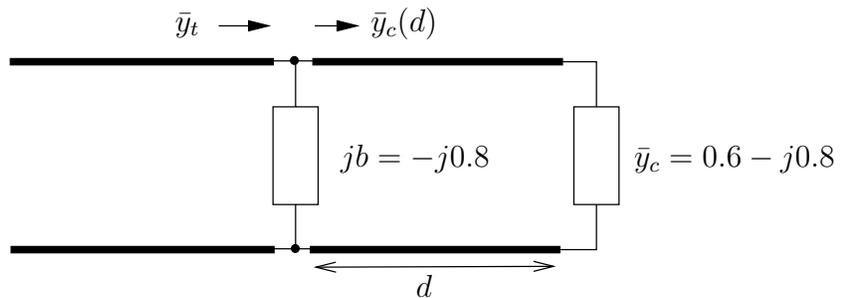


FIGURE 9.32 – Géométrie de la ligne avec la susceptance pour optimisation du *SWR*.

Soit la ligne de transmission terminée dans une admittance normalisée  $\bar{y}_c = (0.6 - j0.8)$  et une susceptance normalisée  $b_p = -0.8$ , connectée en parallèle à quelque part sur la ligne. La configuration du système apparaît sur la figure 9.32 ci-dessus.

- Déterminez l'emplacement optimal de la susceptance qui minimise le *SWR* sur la ligne (entre la source et la susceptance).

Au départ, on construit le lieu de  $\bar{y}_c(d)$ , i.e. l'ensemble des valeurs que peut prendre l'admittance normalisée de la charge vue sur la ligne. Ce lieu est représenté simplement par le cercle centré de rapport d'onde stationnaire constant.

On applique ensuite la transformation : l'ajout d'une susceptance  $b_p = -0.8$  à tous les points du lieu de  $\bar{y}_c(d)$ . Il suffit de trois points car la transformation est conforme et le lieu de  $\bar{y}_t$  tel que :

$$\bar{y}_t = \bar{y}_c(d) - j0.8$$

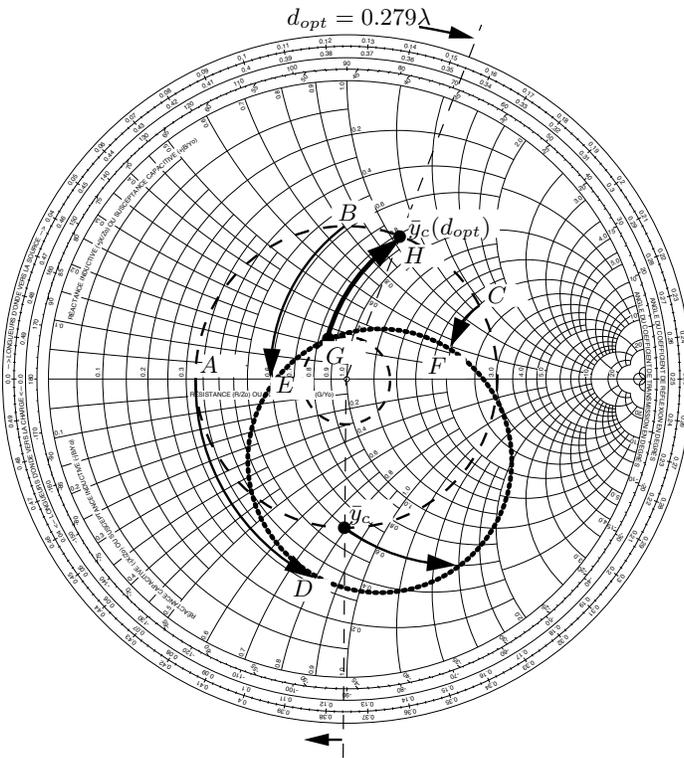


FIGURE 9.33 – Optimisation du  $SWR$  avec susceptance sur l'abaque de *Smith*.

est aussi décrit par un cercle, de rayon et de centre différents cependant. Sur l'abaque de la figure 9.33, les trois points  $D$ ,  $E$  et  $F$  ont servi pour tracer le lieu de  $\bar{y}_t$  en additionnant simplement  $-0.8$  (l'ajout de la susceptance en parallèle) à la susceptance respective des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur le lieu de  $\bar{y}_c(d)$ . Le point<sup>11</sup>  $G$  représente la charge possible qui fournit le  $SWR$  minimum parce qu'il est le point du lieu de  $\bar{y}_t$  le plus proche du centre. Ainsi, à l'oeil :

$$\bar{y}_{t_{opt}} = 0.84 + j0.24$$

d'où le point  $H$

$$\bar{y}_c(d_{opt}) = (0.84 + j0.24) + j0.8 = 0.84 + j1.04 .$$

Reste à évaluer  $d_{opt}$  sur l'abaque. Partant de  $\bar{y}_c$  sur l'abaque, on tourne dans le sens horaire – vers la source – sur le cercle de rapport d'onde stationnaire constant jusqu'à rencontrer l'admittance normalisée  $(0.84 + j1.04)$ . En utilisant la 3e échelle circonférencielle, le calcul donne :

$$d_{opt} = (0.125 + 0.154)\lambda = 0.279\lambda .$$

<sup>11</sup>Pas de mauvaise pensée s.v.p.

**Exemple 9.21**

Une impédance  $\bar{Z}_c = (100 + j50) \Omega$  termine une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $Z_o = 50 \Omega$ . Entre la charge et la ligne, on rajoute un bout de ligne de transmission d'impédance  $Z_{oo} = 100 \Omega$  et de longueur  $\ell_o$ .

- Déterminez la valeur optimale de la longueur du bout de ligne  $\ell_o$  qui minimise le  $SWR$  sur la ligne ; indiquez le  $SWR$  avec et sans le bout de ligne d'impédance  $Z_{oo}$ .

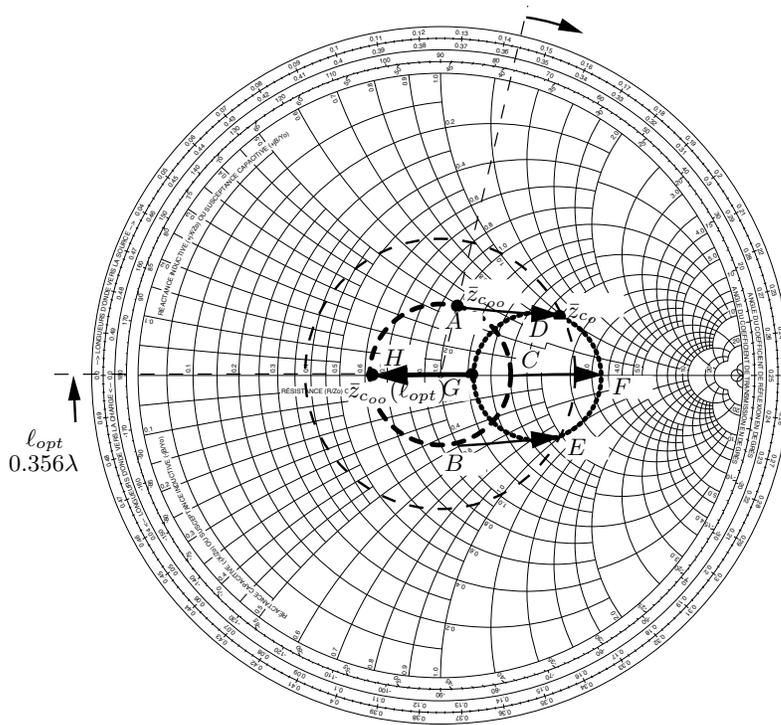


FIGURE 9.34 – Optimisation du  $SWR$  avec bout de ligne d'impédance caractéristique  $Z_{oo} = 2Z_o$  sur l'abaque de *Smith*.

Le  $SWR$  sans transfo se lit directement sur l'abaque de la figure 9.34 avec l'impédance normalisée dans  $50 \Omega$  soit  $\bar{z}_{c_o} = (2 + j1)$ . On localise la charge sur l'abaque et on trouve :

$$SWR_{sans} = 2.62 .$$

Pour continuer, on prend  $Z_{oo}$  comme impédance caractéristique de base pour la normalisation, d'où  $\bar{z}_{c_{oo}} = (1 + j0.5)$ . La longueur du bout de ligne de  $100 \Omega$  intervient ici. Cette longueur  $\ell_o$  étant inconnue, le lieu des impédances normalisées dans  $100 \Omega$  vues sur cette ligne de  $100 \Omega$ , notées  $\bar{z}_{c_{oo}(d)}$  correspond au cercle de rapport d'onde stationnaire constant.

On applique la transformation permettant de passer d'une impédance de normalisation  $Z_{oo}$  à  $Z_o$  au niveau  $d = \ell_o^+$  dans la ligne de transmission  $Z_o$  :

$$\bar{z}_{c_o}(\ell_o^+) = \frac{Z_{oo}}{Z_o} \bar{z}_{c_{oo}}(\ell_o) = 2\bar{z}_{c_{oo}}(\ell_o) .$$

La transformation est conforme puisque l'équation est linéaire.

Les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  subissent la transformation  $\times 2$  afin de présenter des charges normalisées dans  $Z_o$ . Les points  $D$ ,  $E$  et  $F$  servent à tracer le cercle du lieu de  $\bar{z}_{c_o}(\ell_o)$ . Le point de ce dernier lieu qui se situe le plus proche du centre, donc avec le  $SWR$  minimum, identifie une charge purement résistive, le point  $G$  :

$$\bar{z}_{c_o}(\ell_{opt}) = 1.22$$

qui, lorsque ramenée avec une normalisation par rapport à  $Z_{oo}$ , équivaut à :

$$\bar{z}_{c_{oo}}(\ell_{opt}) = \frac{1.22}{2} = 0.61 .$$

L'évaluation de  $\ell_{opt}$  se fait sur l'abaque. On tourne dans le sens horaire sur le cercle de rapport d'onde stationnaire constant, de l'impédance  $(1 + j0.5)$  normalisée dans  $Z_{oo}$  jusqu'à rencontrer l'impédance  $(0.61 + j0)$  aussi normalisée dans  $Z_{oo}$ . Selon la 3e échelle circonférencielle :

$$\ell_{opt} = 0.356\lambda .$$

Le  $SWR$  avec un bout de ligne de  $100 \Omega$  et d'une longueur de  $0.356\lambda$  correspond à celui au point de charge  $G$  sur l'abaque :

$$SWR_{avec} = 1.22 .$$

### Exemple 9.22

Une impédance  $\bar{Z}_c = (100 + j50) \Omega$  termine une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $Z_o = 50 \Omega$ . On désire abaisser le rapport d'onde stationnaire sur la ligne en insérant un transformateur quart-d'onde directement au niveau de la charge, soit  $d_q = 0$ .

- Déterminez la valeur optimale de l'impédance du transfo  $Z_{oq}$  qui minimise le  $SWR$  sur la ligne ; indiquez le  $SWR$  avec et sans le transfo.

Le  $SWR$  sans transfo se lit directement sur l'abaque de la figure 9.35 en normalisant avec  $Z_o$  :

$$SWR_{sans} = 2.62 .$$

Le transformateur quart-d'onde modifie l'impédance vue à sa sortie  $\bar{Z}_{out}$  selon :

$$Z_{oq}^2 = \bar{Z}_c \bar{Z}_{out} .$$

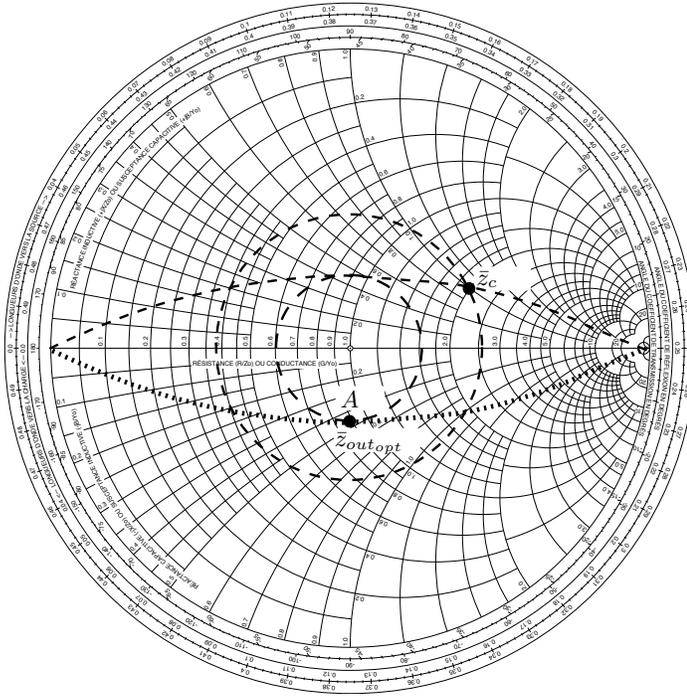


FIGURE 9.35 – Optimisation du  $SWR$  avec transformateur quart-d’onde sur l’abaque de *Smith*.

Écrit avec normalisation par rapport à  $Z_o$ , l’impédance caractéristique de la ligne, on a :

$$\bar{z}_{out} = \frac{z_{oq}^2}{\bar{z}_c} = z_{oq}^2 \bar{y}_c$$

avec  $z_{oq} = Z_{oq}/Z_o$ , un nombre réel positif.

Le lieu de  $\bar{z}_{out}$  est l’ensemble des valeurs partant du court-circuit ( $z_{oq} = 0$ ) jusqu’au circuit-ouvert ( $z_{oq} \rightarrow \infty$ ) en passant par  $\bar{y}_c/4$  ( $z_{oq} = 0.5$ ),  $\bar{y}_c$  ( $z_{oq} = 1$ ) ou  $4\bar{y}_c$  ( $z_{oq} = 2$ ). La transformation reste conforme, car le lieu indiqué sur la figure 9.35 représente un arc de cercle.

Sur ce lieu, le point le plus proche du centre est le point  $A$  soit :

$$\bar{z}_{out_{opt}} = 0.886 - j0.443$$

qu’on obtient en prenant :

$$z_{oq_{opt}} = \sqrt{(2 + j1)(0.886 - j0.443)} = \sqrt{2.215} = 1.488$$

Ainsi, l’impédance du transfo optimal vaut :

$$Z_{oq} = 1.488Z_o = 74.4 \Omega .$$

Le  $SWR$  avec transfo correspond à celui de la charge au point  $A$  :

$$SWR_{avec} = 1.62 .$$

## 9.9 Ligne à pertes

Jusqu'à présent, tous les calculs des paramètres ont été faits en considérant des lignes de transmission sans perte. La prise en compte des pertes produites sur une ligne implique peu de modifications. On peut même continuer à se servir de l'abaque de *Smith*.

Pour bien comprendre la seule différence importante, il faut remonter aussi loin que la solution de l'équation de propagation sur ligne de transmission à pertes en régime sinusoïdal permanent telle qu'écrite en (7.44). Avec cette solution, on peut réécrire l'expression du coefficient de réflexion généralisée (9.25) avec ligne à pertes :

$$\bar{\Gamma}(d) = \frac{\bar{\Gamma}_c \bar{V}^+ e^{-\bar{\gamma}d}}{\bar{V}^+ e^{\bar{\gamma}d}} = \bar{\Gamma}_c e^{-2\bar{\gamma}d} \quad (9.79)$$

qui devient en utilisant la constante de propagation  $\bar{\gamma} = \alpha + j\beta$  :

$$\bar{\Gamma}(d) = \bar{\Gamma}_c e^{-2\alpha d} e^{-j2\beta d} . \quad (9.80)$$

On remarque cette fois que le module du coefficient de réflexion généralisé diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la charge jusqu'à tendre vers 0. L'explication est simple : le signal  $\bar{V}^-(d)$  correspond à une réplique de  $\bar{V}^+(d)$  réfléchi par la charge et qui a franchi une distance  $2d$  sur une ligne causant une atténuation du signal. Ainsi, cette fois, on a :

$$\Gamma_c(d) = \Gamma_c e^{-2\alpha d} \quad (9.81)$$

$$\angle \bar{\Gamma}_c(d) = \underbrace{\angle \bar{\Gamma}_c}_{\xi_c} - 2\beta d . \quad (9.82)$$

Sur l'abaque de *Smith*, la représentation du coefficient de réflexion généralisé se traduit non plus par un cercle de rapport d'onde stationnaire constant – car ceci implique que le module demeure constant – mais par une spirale qui s'enroule vers le centre de l'abaque dans le sens horaire, i.e. pour  $d$  croissant. Un exemple de coefficient de réflexion généralisé vu en fonction de la distance  $d$  apparaît sur la figure 9.36. Selon la valeur de  $\alpha$ , le facteur d'enroulement à chaque tour sera plus ou moins grand, le facteur tendant vers l'unité – i.e. la diminution du rayon est de plus en plus négligeable – lorsque la constante d'amplitude devient nulle.

La manière la plus simple cependant de travailler dans des conditions avec pertes sur l'abaque consiste à faire :

- le déplacement comme si la ligne était sans perte ;
- la correction à la toute fin sur le module du coefficient de réflexion selon  $e^{-2\alpha\Delta d}$  où  $\Delta d$  représente le déplacement (négatif vers la charge).

Pour faciliter cette façon de faire, l'abaque de *Smith* possède une échelle radiale appropriée qui est identifiée **Atténuation [dB]**.

- Il faut donc convertir la constante d'atténuation de Népers à décibels<sup>12</sup> par mètre.

<sup>12</sup>On rappelle que la conversion est linéaire et que  $1 \text{ Np} = 8.686 \text{ dB}$ .

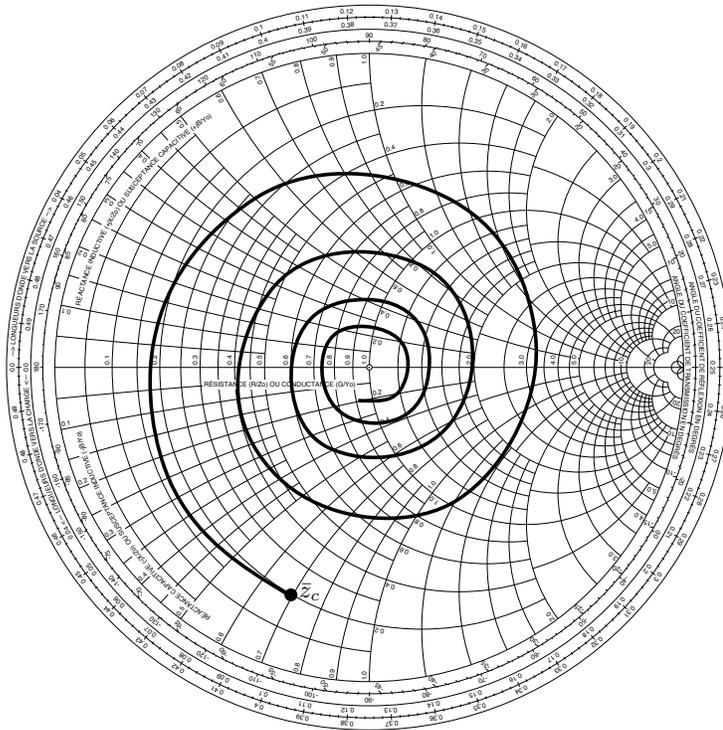


FIGURE 9.36 – Coefficient de réflexion généralisé selon la distance sur une ligne à pertes ( $\bar{z}_c = 0.2 - j0.7$ ;  $\alpha = 0.5 Np/\lambda$ ).

- De plus, il ne faut pas oublier que la distance est exprimée en terme de longueurs d’onde sur l’abaque d’où la nécessité de soit connaître la longueur d’onde, soit exprimer la constante d’atténuation en Népers (ou décibels) par longueur d’onde.
- La multiplication par deux pour aller-retour est prise en compte directement sur l’échelle radiale.

Comme c’est le cas très souvent avec des lignes à très faibles pertes, la vitesse de propagation tout comme l’impédance caractéristique demeurent inchangées comparativement à celles d’une ligne sans perte ; seule la constante d’atténuation devient non-nulle. Lorsque les pertes augmentent, tous les paramètres de propagation s’obtiennent par formulations exactes uniquement. L’impédance caractéristique devient alors complexe, ce qui ajoute une petite difficulté lors de la normalisation des impédances ou admittances si on désire travailler avec l’abaque de *Smith*.

**Exemple 9.23**

Une ligne à pertes d'une longueur totale de  $160 \text{ km}$  se termine dans une charge de  $2 \text{ k}\Omega$ . La ligne possède les caractéristiques suivantes à la fréquence de  $1 \text{ kHz}$  :

- $\bar{Z}_o = (685 - j92) \Omega$
- $\bar{\gamma} = (3.1 + j22) \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$

► Déterminez la valeur de l'impédance vue à l'entrée de la ligne.

On commence par connaître la longueur d'onde dans la ligne. On sait que :

$$\beta = 22 \times 10^{-6} \text{ rad/m} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

d'où  $\lambda = 285\,600 \text{ m}$ .

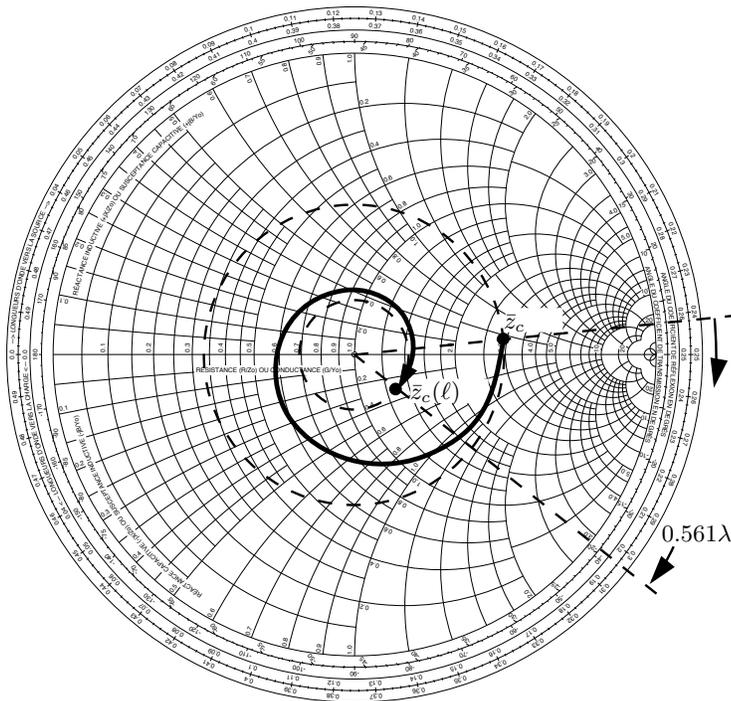


FIGURE 9.37 – Impédance vue à l'entrée d'une ligne à pertes.

Ainsi :

- la longueur électrique de la ligne vaut  $\ell = 0.56\lambda$  ;
- l'atténuation produit par la ligne est  $\alpha\ell = (3.1 \times 10^{-6})(160 \times 10^3) = 0.496 \text{ Np}$  soit  $4.31 \text{ dB}$ .

La seconde étape consiste à repérer l'impédance normalisée de la charge sur l'abaque (voir figure 9.37). On doit diviser par  $\bar{Z}_o$  qui est un nombre complexe ici. On a :

$$\bar{z}_c = \frac{2000}{685 - j92} = 2.87 + j0.385$$

et

$$\bar{\Gamma}_c = 0.491 \angle 5.8^\circ .$$

En se déplaçant de  $0.56\lambda$  vers la source, on trouve que l'argument du coefficient de réflexion généralisé à l'entrée est rendu à  $-38^\circ$  sur l'abaque. Quant au module, il est réajusté en considérant les pertes de  $4.31 \text{ dB}$ . Sur l'échelle radiale **Atténuation [dB]**, on passe de la position 3.0 à 7.31, soit un coefficient de réflexion de module 0.18 environ.

La détermination analytique est aussi possible comme l'indique le calcul ci-dessous :

$$\bar{\Gamma}_c(\ell) = \underbrace{(0.491 e^{-2(0.496)})}_{0.182} \angle \underbrace{(5.8 - 2(360)(0.56))}_{-37.3^\circ} .$$

Reste maintenant à obtenir l'impédance normalisée vue à l'entrée de la ligne. Ceci se réalise facilement sur l'abaque :

$$\bar{z}_{in} = \bar{z}_c(\ell) \approx 1.3 - j0.3$$

Et finalement, l'impédance non-normalisée est :

$$\bar{Z}_{in} \approx (1.3 - j0.3)(685 - j92) = (861 - j332) \Omega .$$

On remarque que le rapport d'onde stationnaire diminue de 2.93 à la charge, à 1.44 à l'entrée de la ligne.

---

## Exercices

### Question 1

Une ligne de transmission se termine dans un court-circuit. L'impédance caractéristique est  $50 \Omega$  tandis que la vitesse de propagation est de 66% de celle de la lumière dans le vide. Déterminez la plus petite longueur possible de la ligne si l'impédance vue à l'entrée à la fréquence de  $100 \text{ MHz}$  vaut :

- a) un circuit-ouvert ;
- b) une réactance de  $100 \Omega$  ;
- c) une capacitance de  $0.001 \mu\text{F}$  ;
- d) une inductance de  $0.5 \mu\text{H}$ .

### Question 2

Une ligne de transmission d'une longueur de  $5 \text{ m}$ , d'une impédance caractéristique de  $100 \Omega$ , fait d'un diélectrique parfait non-magnétique ( $\mu = \mu_o$ ), est court-circuitée à l'une de ses extrémités. Une source tension alternative à fréquence variable avec une impédance interne  $\bar{Z}_g$ , est connectée à l'autre extrémité de la ligne. Les amplitudes de la tension et du courant sont observées immédiatement à la sortie de la source au fur et à mesure que la fréquence de la source change. On s'aperçoit que l'amplitude de la tension atteint un maximum de  $10 \text{ V}$  à  $157.5 \text{ MHz}$ , tandis que l'amplitude du courant atteint un maximum de  $0.2 \text{ A}$  à  $165 \text{ MHz}$ . Déduisez :

- a) l'amplitude maximale du courant sur la ligne à  $157.5 \text{ MHz}$  ;
- b) l'amplitude maximale de la tension sur la ligne à  $165 \text{ MHz}$  ;
- c) le module de l'impédance de la source  $\bar{Z}_g$ .

### Question 3

Une ligne de transmission de  $Z_o = 60 \Omega$  se termine dans une charge constituée d'une combinaison série de  $R = 30 \Omega$ ,  $L = 1 \mu\text{H}$  et de  $C = 100 \text{ pF}$ . Trouvez les valeurs du rapport d'onde stationnaire et de la distance la plus proche de la charge où l'amplitude de la tension est minimale aux fréquences suivantes :

- a)  $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$  ;
- b)  $\omega = 2 \times 10^8 \text{ rad/s}$ .

### Question 4

Une ligne de transmission, dont le diélectrique est de l'air, possède une impédance caractéristique de  $75 \Omega$ . La ligne se termine dans une charge  $\bar{Z}_c = (45 + j60) \Omega$ . Évaluez l'impédance vue à l'entrée de la ligne pour les combinaisons suivantes :

- a)  $f = 15 \text{ MHz}$  et  $\ell = 5 \text{ m}$  ;
- b)  $f = 50 \text{ MHz}$  et  $\ell = 3 \text{ m}$  ;
- c)  $f = 75 \text{ MHz}$  et  $\ell = 2.5 \text{ m}$  ;

### Question 5

Le rapport d'onde stationnaire sur une ligne de transmission est de 1.75. Si l'impédance caractéristique vaut  $50 \Omega$ , déterminez :

- a) la valeur de l'impédance vue là où l'amplitude de la tension est minimale ;
- b) la valeur de l'impédance vue là où l'amplitude de la tension est maximale.

### Question 6

Déterminez les valeurs des coefficients de réflexion à la charge pour les différentes impédances normalisées à l'aide de l'abaque de *Smith* :

- a)  $\bar{z}_c = 0.25 + j0$  ;
- b)  $\bar{z}_c = 0 - j0.5$  ;
- c)  $\bar{z}_c = 3 + j3$  ;

### Question 7

Avec l'aide de l'abaque de *Smith*, déterminez :

- a) l'impédance normalisée vue à  $0.1\lambda$  d'une charge dont l'impédance normalisée vaut  $2 + j1$  ;
- b) l'admittance normalisée vue à  $0.17\lambda$  d'un court-circuit ;
- c) la distance la plus courte d'un circuit-ouvert où l'admittance normalisée vaut  $0 + j0.4$  .

**Question 8**

Une charge  $\bar{Z}_c$  est mise au bout d'une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $100\ \Omega$ . L'impédance vue à une distance de  $\lambda/6$  vaut  $(60 + j80)\ \Omega$ . Déduisez la valeur de  $\bar{Z}_c$ .

**Question 9**

Une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $100\ \Omega$  se termine dans une charge dont l'impédance vaut  $(80 + j200)\ \Omega$ . Avec l'aide de l'abaque de *Smith*, trouvez les quantités suivantes :

- le coefficient de réflexion de la charge ;
- le rapport d'onde stationnaire sur la ligne ;
- la distance la plus proche de la charge où l'amplitude de la tension est minimale ;
- l'impédance et l'admittance vues à  $0.1\lambda$  de la charge ;
- la distance la plus proche de la charge où la partie réelle de l'admittance vue est égale à l'admittance caractéristique de la ligne de transmission  $Y_0$ .

**Question 10**

Sur une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $60\ \Omega$ , on mesure un rapport d'onde stationnaire de 5.0 avec une amplitude minimale de la tension à  $5\lambda/12$  de la charge. Déterminez la valeur de l'impédance de la charge avec l'aide de l'abaque de *Smith*.

**Question 11**

Une ligne de transmission possède une impédance caractéristique de  $50\ \Omega$ . Elle se termine dans une charge résistive  $\bar{Z}_c = 80\ \Omega$  aux bornes de laquelle on mesure une tension de 5 Volts. Évaluez :

- le coefficient de réflexion de la charge ;
- le rapport d'onde stationnaire ;
- les valeurs de  $V_{min}$ ,  $V_{max}$ ,  $I_{min}$  et  $I_{max}$  ;
- la valeur de la charge vue aux distances  $d = \lambda/4$ ,  $\lambda/2$  et  $3\lambda/8$  de  $\bar{Z}_c$ .

**Question 12**

Des mesures d'onde stationnaire sont prélevées sur une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $75\ \Omega$  terminée dans une charge  $\bar{Z}_c$ . Déduisez  $\bar{Z}_c$  de l'ensemble des mesures pour les cas suivants :

- a) un  $SWR = 1.5$  avec un minimum de l'amplitude de la tension directement à la charge ;
- b) un  $SWR = 3.0$ , une distance de  $6\text{ cm}$  entre deux minima consécutifs de l'amplitude de la tension dont le plus proche est à  $3\text{ cm}$  de la charge ;
- c) un  $SWR = 2.0$ , deux minima consécutifs de l'amplitude de la tension à  $7\text{ cm}$  et  $11\text{ cm}$  de la charge.

### Question 13

Déterminez la position le plus près de la charge et l'impédance caractéristique d'un transformateur  $\lambda/4$  qui réalise l'adaptation des charges suivantes à une ligne de transmission dont l'impédance caractéristique est  $50\ \Omega$  :

- a)  $\bar{Z}_c = 62.5\ \Omega$  ;
- b)  $\bar{\Gamma}_c = -j0.5$  ;
- c)  $\bar{\Gamma}_c = 0.333\angle 60^\circ$ .

### Question 14

Pour chacune des charges suivantes sur une ligne dont  $Z_o = 50\ \Omega$ , déterminez :

- la distance entre la charge et le premier minimum de tension ;
  - la position  $d_s$  et la longueur  $\ell_s$  du stub CC parallèle qui assure l'adaptation ;
  - l'admittance normalisée vue à la distance  $d_s$  établie précédemment sans le stub.
- a)  $\bar{Z}_c = (120 + j100)\ \Omega$  ;
  - b)  $\bar{Z}_c = (25 - j70)\ \Omega$  ;

### Question 15

Déterminez la position le plus près de la charge et la longueur d'un stub CC placé en parallèle, qui réalise l'adaptation des charges suivantes à une ligne de transmission :

- a)  $\bar{Z}_c = 25\ \Omega$  ;
- b)  $\bar{Z}_c = (10 - j20)\ \Omega$

Le stub et la ligne de transmission ont même impédance caractéristique et même vitesse de propagation soient  $Z_{os} = Z_o = 50\ \Omega$  et  $v_{ps} = v_p = 2 \times 10^8\text{ m/s}$  (donc  $\beta_s = \beta$  et  $\lambda_s = \lambda$ ).

### Question 16

Une ligne de transmission, dont l'impédance caractéristique vaut  $Z_o = 50 \Omega$ , est terminée par une charge inconnue. Il est mesuré un rapport d'onde stationnaire de 5.0 et une amplitude minimale de la tension à  $0.1\lambda$  de la charge. Avec l'abaque de *Smith*, déterminez la position le plus près de la charge et la longueur d'un stub CC en parallèle ( $Z_{os} = Z_o$ ,  $\beta_s = \beta$ ) qui réalise l'adaptation.

### Question 17

Une ligne sans perte d'une longueur de  $3.17\lambda$  avec  $Z_o = 50 \Omega$  est terminée par une admittance de  $(0.01 + j0.005) S$ .

- Déterminez l'impédance qui doit être placée en parallèle avec la charge pour obtenir une impédance de charge adaptée ;
- calculez le rapport d'onde stationnaire de la ligne avec et sans cette impédance en parallèle.

### Question 18

Une ligne fendue de mesure est insérée sur une ligne de transmission. Les deux possèdent la même impédance caractéristique, à savoir  $50 \Omega$ . Au départ, des essais avec un court-circuit à l'extrémité de la ligne de transmission donnent des minima de l'amplitude de la tension aux positions relatives  $0.2m$ ,  $0.8m$  et  $1.4m$ . Une charge inconnue vient ensuite remplacer le court-circuit. Cette fois, le rapport d'onde stationnaire passe à 5.0 et les minima se rapprochent de la charge en étant aux positions  $0.1m$ ,  $0.7m$  et  $1.3m$ . Déterminez la valeur de l'impédance de cette charge.

### Question 19

On désire faire de l'adaptation à double stub avec  $Z_{os_1} = Z_{os_2} = Z_o = 50 \Omega$  et  $\beta_{s_1} = \beta_{s_2} = \beta$ . Sachant que la distance entre les stubs est maintenue à  $\lambda/8$ , déterminez, pour chacune des charges et distances charge-stub#1, les paramètres suivants :

- les longueurs  $\ell_{s_1}$  et  $\ell_{s_2}$  des deux stubs en court-circuit qui adaptent la charge à la ligne de transmission avec le rapport d'onde stationnaire minimum entre les stubs ;
- les rapports d'onde stationnaire entre la charge et le premier stub, entre les deux stubs et ailleurs sur la ligne et ce, pour les deux possibilités.

- $\bar{Z}_c = (12.5 + j12.5)\Omega$  et  $d_{s_1} = 0.1\lambda$  ;
- $\bar{Z}_c = (25 + j70)\Omega$  et  $d_{s_1} = 0.25\lambda$  ;
- $\bar{Z}_c = (10 + j25)\Omega$  et  $d_{s_1} = 0.45\lambda$ .

### Question 20

Une mesure du  $SWR$  sur une ligne dont  $Z_o = 50 \Omega$  montre qu'il atteint 3.0 et que le premier minima se situe à  $0.16\lambda$  de la charge. En prenant  $d_{s1} = 0.1\lambda$  et  $d_{12} = 0.625\lambda$ , trouvez la longueur des stubs en court-circuit ( $Z_{os} = Z_o, \beta_s = \beta$ ) qui réalisent l'adaptation.

### Question 21

Une ligne d'impédance caractéristique  $Z_o = 100 \Omega$  se termine dans une charge  $\bar{Z}_c = (50 + j65) \Omega$ .

En utilisant l'abaque de *Smith*, optimisez pour avoir le rapport d'onde stationnaire minimal. Donnez les longueurs des stubs CC ( $Z_{os} = Z_o, \beta_s = \beta$ ) et les valeurs du  $SWR$  minimal ainsi atteint :

- a) en connectant un stub CC en parallèle directement au niveau de la charge ;
- b) en connectant un stub CC en série directement au niveau de la charge.

### Question 22

Une impédance  $\bar{Z}_c = (100 + j100) \Omega$  termine une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $Z_o = 50 \Omega$ .

On veut minimiser le rapport d'onde stationnaire par divers moyens. Dans chaque cas, déterminez le  $SWR$  minimal et la valeur du paramètre d'optimisation :

- a) en plaçant une réactance de  $j50 \Omega$  en parallèle à une certaine distance sur la ligne ;
- b) en ajoutant un bout de ligne d'impédance caractéristique  $Z_{oo} = 100 \Omega$  et d'une certaine longueur directement entre la charge et la ligne.

### Question 23

On intercale un bout de ligne d'impédance caractéristique  $Z_{o2} = 50 \Omega$  à quelque part sur une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $Z_o = 100 \Omega$ . Trouvez la distance optimale entre la charge et le bout de ligne  $d_{2opt}$  qui minimise le  $SWR$  avec la charge  $\bar{Z}_r = (50 + j50) \Omega$ , si la longueur du bout de ligne  $\ell_2$  vaut ( $\lambda_2$  est la longueur d'onde du bout de ligne) :

- a)  $\ell_2 = \lambda_2/4$  (donc le bout de ligne est un transfo  $\lambda_2/4$ ) ;
- b)  $\ell_2 = 0.4\lambda_2$ .

### Question 24

Une ligne de transmission à pertes ( $\alpha = 0.02 \text{ Np}/\lambda$ ) a une longueur  $\ell = 16.3\lambda$  et une impédance caractéristique de  $75 \Omega$ . Déduisez l'impédance vue à l'entrée de la ligne si :

- a)  $\bar{Z}_c = 0$  ;  
 b)  $\bar{Z}_c = 45 \Omega$ .

### Question 25

Les impédances vues à l'entrée de lignes de transmission à faibles pertes ayant toutes une longueur de 30 m à la fréquence de 100 MHz sont :

- a)  $(44 + j90) \Omega$  pour un court-circuit comme charge  
 $(44 - j90) \Omega$  pour un circuit-ouvert ;  
 b)  $(15 - j30) \Omega$  pour un court-circuit comme charge  
 $(75 + j150) \Omega$  pour un circuit-ouvert.

Dans ces conditions, déterminez l'impédance caractéristique  $\bar{Z}_o \approx Z_o$  des lignes et leur constante d'atténuation  $\alpha$ .

### Réponses :

- a)  $\ell = 0.5 \text{ m}$  ; b)  $\ell = 0.3524 \text{ m}$  ; c)  $\ell = 0.98987 \text{ m}$  ; d)  $\ell = 0.4498 \text{ m}$ .
- a)  $[I_{max}]_{157.5 \text{ MHz}} = 0.1 \text{ A}$  ; b)  $[V_{max}]_{165 \text{ MHz}} = 20 \text{ V}$  ; c)  $Z_g = 50 \Omega$ .  
 On remarque que  $[V_{max}]_{165 \text{ MHz}} \neq [V_{max}]_{157.5 \text{ MHz}} = 10 \text{ V}$  ; ceci provient du fait que n'étant pas adapté du côté de la source, on a  $[\bar{V}^+]_{165 \text{ MHz}} \neq [\bar{V}^+]_{157.5 \text{ MHz}}$  pour respecter les conditions aux limites à la source i.e.  $\bar{V}_g - \bar{Z}_g \bar{I}(\ell) = \bar{V}(\ell)$ . On trouve alors que  $[\bar{V}^+]_{165 \text{ MHz}} = V_g \frac{Z_o}{2Z_g}$  et  $[\bar{V}^+]_{157.5 \text{ MHz}} = V_g \frac{1}{2}$  conduisant à  $[V_{max}]_{165 \text{ MHz}} = V_g \frac{Z_o}{Z_g}$  et  $[V_{max}]_{157.5 \text{ MHz}} = V_g$ .
- a)  $SWR = 2$ ,  $d_{min} = 0$  ; b)  $SWR = 14.94$ ,  $d_{min} = 0.309\lambda$ .
- a)  $\bar{Z}_{in} = (45 - j60) \Omega$  ; b)  $\bar{Z}_{in} = (45 + j60) \Omega$  ; c)  $\bar{Z}_{in} = 225 \Omega$ .
- a)  $\bar{Z}_c(d_{min}) = R_{min} = 28.57 \Omega$  ; b)  $\bar{Z}_c(d_{max}) = R_{max} = 87.50 \Omega$ .
- a)  $\bar{\Gamma}_c = 0.6 \angle 180^\circ$  ; b)  $\bar{\Gamma}_c = 1 \angle 233.1^\circ$  ; c)  $\bar{\Gamma}_c = 0.72 \angle 19.4^\circ$ .
- a)  $\bar{z}_c(d = 0.1\lambda) = 1.4 - j1.1$  ; b)  $\bar{y}_{cc}(d = 0.17\lambda) = -j0.55$  ; c)  $d = 0.06\lambda$ .
- $\bar{Z}_c = (35.44 - j23.64) \Omega$ .
- a)  $\bar{\Gamma}_c = 0.747 \angle 47.7^\circ$  ; b)  $SWR = 6.9$  ; c)  $d_{min} = 0.316\lambda$  ;  
 d)  $\bar{Z}_c(0.1\lambda) = (225 - j313) \Omega$ ,  $\bar{Y}_c(0.1\lambda) = (0.0015 + j0.00211) \text{ S}$  ;  
 e)  $Re\{\bar{Y}(d)\} = Y_o$  à  $d = 0.258\lambda$ .
- $\bar{Z}_c = (16.2 + j32.7) \Omega$ .

11. a)  $\bar{\Gamma}_c = 0.23$  ; b)  $SWR = 1.6$  ;  
 c)  $V_{max} = 5.0 \text{ V}$ ,  $V_{min} = 3.1 \text{ V}$ ,  $I_{max} = 0.100 \text{ A}$ ,  $I_{min} = 0.063 \text{ A}$  ;  
 d)  $\bar{Z}_c(\lambda/4) = 31.25 \Omega$ ,  $\bar{Z}_c(\lambda/2) = 80.0 \Omega$ ,  $\bar{Z}_c(3\lambda/8) = (44.95 + j21.90) \Omega$ .
12. a)  $\bar{Z}_c = 50 \Omega$  ; b)  $\bar{Z}_c = 225 \Omega$  ; c)  $\bar{Z}_c = (60 + j45) \Omega$ .
13. a)  $d_q = 0$ ,  $Z_{oq} = 55.9 \Omega$  ; b)  $d_q = 0.125\lambda$ ,  $Z_{oq} = 28.867 \Omega$  ;  
 c)  $d_q = 0.0833\lambda$ ,  $Z_{oq} = 70.713 \Omega$ .
14. a)  $d_{min} = 0.284\lambda$ , solution #1 :  $d_s = 0.356\lambda$  et  $\ell_s = 0.410\lambda$  ;  
 #2 :  $d_s = 0.213\lambda$  et  $\ell_s = 0.090\lambda$  ;  $\bar{y}_c(d_s) = 1 \mp j1.59$  ;  
 b)  $d_{min} = 0.158\lambda$  ; solution #1 :  $d_s = 0.218\lambda$  et  $\ell_s = 0.429\lambda$  ;  
 #2 :  $d_s = 0.097\lambda$  et  $\ell_s = 0.071\lambda$  ;  $\bar{y}_c(d_s) = 1 \mp j2.10$ .
15. a)  $d_s = 0.098\lambda$ ,  $\ell_s = 0.348\lambda$  ; b)  $d_s = 0$ ,  $\ell_s = 0.074\lambda$ .
16.  $\bar{y}_c = 0.536 + j1.23$ ,  $d_s = 0.032\lambda$ ,  $\ell_s = 0.083\lambda$ .
17. a)  $\bar{Z}_{||} = (80.0 + j40.0)\Omega$  ; b)  $ROS_{avec} = 1.0$  ;  $ROS_{sans} = 2.163$ .
18.  $\lambda = 1.2 \text{ m}$ ,  $d_{min} = 0.5 \text{ m}$ ,  $\bar{\Gamma}_c = 0.667 \angle 120^\circ$ ,  $\bar{Z}_c = (13.16 + j27.35) \Omega$ .
19. a)  $\ell_{s1} = 0.371\lambda$  et  $\ell_{s2} = 0.121\lambda$  ;  
 $ROS_{c-s1} = 4.25$  ; #1 :  $ROS_{s1-2} = 2.70$  ; #2 :  $ROS_{s1-2} = 11.03$  ;  $ROS_{ailleurs} = 1$  ;  
 b)  $\ell_{s1} = 0.106\lambda$  et  $\ell_{s2} = 0.153\lambda$  ;  
 $ROS_{c-s1} = 5.86$  ; #1 :  $ROS_{s1-2} = 1.98$  ; #2 :  $ROS_{s1-2} = 8.66$  ;  $ROS_{ailleurs} = 1$  ;  
 c) *Adaptation impossible.*
20.  $\bar{z}_c = 0.912 - j1.097$   
 $\ell_{s1} = 0.111\lambda$  et  $\ell_{s2} = 0.310\lambda$  ou  
 $\ell_{s1} = 0.336\lambda$  et  $\ell_{s2} = 0.414\lambda$ .
21. a)  $\ell_s = 0.372\lambda$ ,  $SWR_{min} = 1.33$  ;  
 b)  $\ell_s = 0.408\lambda$ ,  $SWR_{min} = 2$ .
22. a)  $SWR_{min} = 1.63$ ,  $d_{opt} = 0.204\lambda$  ;  
 b)  $SWR_{min} = 1.3$ ,  $\ell_{oopt} = 0.338\lambda$ .
23. a)  $d_{2opt} = 0.412\lambda_2$ ,  $SWR_{min} = 1.528$  ;  
 b)  $d_{2opt} = 0.346\lambda_2$ ,  $SWR_{min} = 1.113$ .
24. a)  $\bar{Z}_{in} = (127.6 - j107.2) \Omega$  ; b)  $\bar{Z}_{in} = (91.5 - j14.2) \Omega$ .
25. a)  $Z_o = 100.2 \Omega$ ,  $\alpha = 0.008 \text{ Np/m}$   
 b)  $Z_o = 75 \Omega$ ,  $\alpha = 0.00578 \text{ Np/m}$

# Chapitre 10

## Guide d'onde

### 10.1 Introduction

Afin de comprendre la propagation guidée de manière plus complète, incluant les modes supérieurs non TEM, la vitesse de groupe et la dispersion, une approche mathématique systématique est nécessaire. Les guides d'onde supportant des modes non TEM incluent les fibres optiques, les guides planaires diélectriques utilisés en optique intégrée et pour les lasers à semi-conducteurs, de même que les guides métalliques à un seul conducteur utilisés pour les signaux micro-ondes. Étant donné le large déploiement de guides d'onde pour des applications en communications, on conçoit aisément l'importance de maîtriser certains aspects de la propagation confinée non transverse des ondes électromagnétiques.

Ce chapitre établit les concepts et la procédure afin de calculer la structure de modes de tout type de guide d'onde. Même si le schéma de pensée demeure le même pour tout guide, les mathématiques ont tendance à se complexifier rapidement. Ainsi, la géométrie circulaire impose des solutions sous forme de fonctions de *Bessel*, souvent moins familières et les guides diélectriques utilisant la réflexion totale interne pour confiner les champs plutôt que la réflexion sur un conducteur, impliquent l'utilisation de conditions limites plus difficiles à gérer, avec des ondes évanescentes.

Pour ces raisons, les concepts de base sont d'abord introduits plus intuitivement, en minimisant le formalisme mathématique requis. Pour ce faire, un guide simple est utilisé : le guide à plaques parallèles. Par la suite, la procédure mathématique générale est présentée, en s'appuyant fortement sur les concepts intuitifs préalablement définis. Finalement, des exemples spécifiques servent à illustrer le calcul des modes pour diverses géométries de guides. Afin de limiter la complexité mathématique, on se restreint ici aux guides métalliques rectangulaires et circulaires.

Les guides d'onde métalliques forment une classe un peu spéciale de lignes de transmission : ils sont constitués d'un seul conducteur. Avec l'avènement des lignes coaxiales de plus en plus performantes à haute-fréquence – à cause de la qualité croissante des diélectriques à très faibles pertes – les guides d'onde métalliques sont confinés à des applications très particulières. On les retrouve surtout dans :

- le transport des signaux micro-ondes sur des distances intermédiaires ;
- les interconnexions entre l'étage de puissance et l'antenne de transmission.

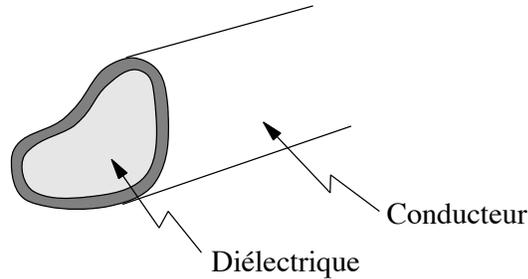


FIGURE 10.1 – Structure d'un guide d'onde à section quelconque.

En général, le guide d'onde métallique est une ligne de transmission à section constante constituée d'une seule structure métallique creuse comme illustrée à la figure 10.1. On peut se demander comment un seul conducteur peut transporter un signal, alors que la théorie des circuits ou des lignes de transmission impose un deuxième conducteur pour le retour du courant.

Dans tout guide d'onde, la puissance des signaux est contenue dans les champs électromagnétique. Comme les champs sont nuls dans un conducteur idéal, l'onde se propage donc essentiellement dans le diélectrique. Les conducteurs (ou les sauts d'indice de réfraction) ne servent qu'à appliquer des conditions limites qui confinent les champs dans la région voulue du diélectrique. Lorsque des conducteurs sont utilisés, des courants sur ceux-ci entrent nécessairement en jeu. La présence de deux conducteurs permet d'avoir un flot continu de charges sur la lignes de transmission, celles-ci utilisant un conducteur pour aller de la source à la charge et l'autre pour faire le chemin inverse. Lorsqu'un seul conducteur est utilisé, ce flot continu n'est pas possible, mais les charges peuvent tout de même osciller sur le conducteur. On en déduit que pour un guide métallique à un seul conducteur, tel qu'illustré à la figure 10.1 :

- les basses fréquences ne passent pas (impossible d'avoir un signal en courant continu) ;
- les hautes fréquences peuvent être transmises.

On peut donc considérer un guide d'onde comme un filtre passe-haut avec sa propre fréquence de coupure.

Les conditions aux limites imposées par la théorie des champs électromagnétiques exigent que :

- le champ électrique se termine normalement sur le conducteur ;
- le champ magnétique soit entièrement tangentiel à la surface conductrice.

Si on cherche à appliquer les conditions aux limites sur les parois métalliques du guide de la figure 10.1 avec une onde se propageant en  $z$ , le mode TEM (Transverse Électro-Magnétique) devient impossible dans un guide d'onde, car les champs  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{H}$ ) ne peuvent

être orthogonal avec la direction de propagation partout dans la section d'analyse en étant perpendiculaire (tangentielle) partout aux parois.

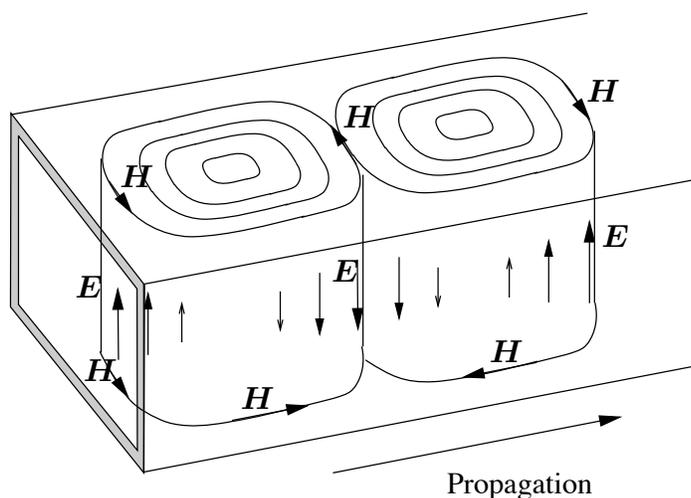


FIGURE 10.2 – Direction des champs pour une solution possible d'une onde TE.

Deux possibilités s'offrent :

- seul le champ  $\mathbf{E}$  est orthogonal à  $z$ , auquel cas on dit que le mode est Transverse Électrique (TE) ;
- seul le champ  $\mathbf{H}$  est orthogonal à  $z$ , soit le mode Transverse Magnétique (TM).

Pour prouver qu'une solution existe parmi tant d'autres, la figure 10.2 montre les boucles de champ magnétique d'une onde TE dans un guide à section rectangulaire.

## 10.2 Modes supérieurs dans un guide à plaques parallèles

Cette section est simplement une extension du traitement de ligne de transmission TEM à plaques parallèles. Ici, on considère les modes de propagation autres que TEM simple.

La situation représentée à la figure 10.3, montre le croisement de deux ondes planes uniformes identifiées par  $A$  et  $B$  qui se propagent à la même fréquence, mais dans des directions  $\pm\theta$  de part et d'autre de l'axe  $z$ . Les champs individuels s'additionnent vectoriellement dans l'espace pour former le champ résultant. Les fronts d'onde sont dessinés pour  $A$  et  $B$  en traits pleins pour les sommets et en traits pointillés pour les creux. L'orientation, à chacun des fronts, des champs électromagnétiques  $\mathbf{E}_A$ ,  $\mathbf{H}_A$  et  $\mathbf{E}_B$ ,  $\mathbf{H}_B$  est indiquée en périphérie ; cette orientation est maintenue transverse à la direction de propagation des ondes  $A$  et  $B$  respectivement. On constate que le produit vectoriel  $\mathbf{E}_A \times \mathbf{H}_A$  ( $\mathbf{E}_B \times \mathbf{H}_B$ ) pointe dans les bonnes directions.

On peut aussi observer les champs résultant de la combinaison vectorielle des deux ondes planes uniformes à quelques points d'intersection (les autres peuvent être déduits).

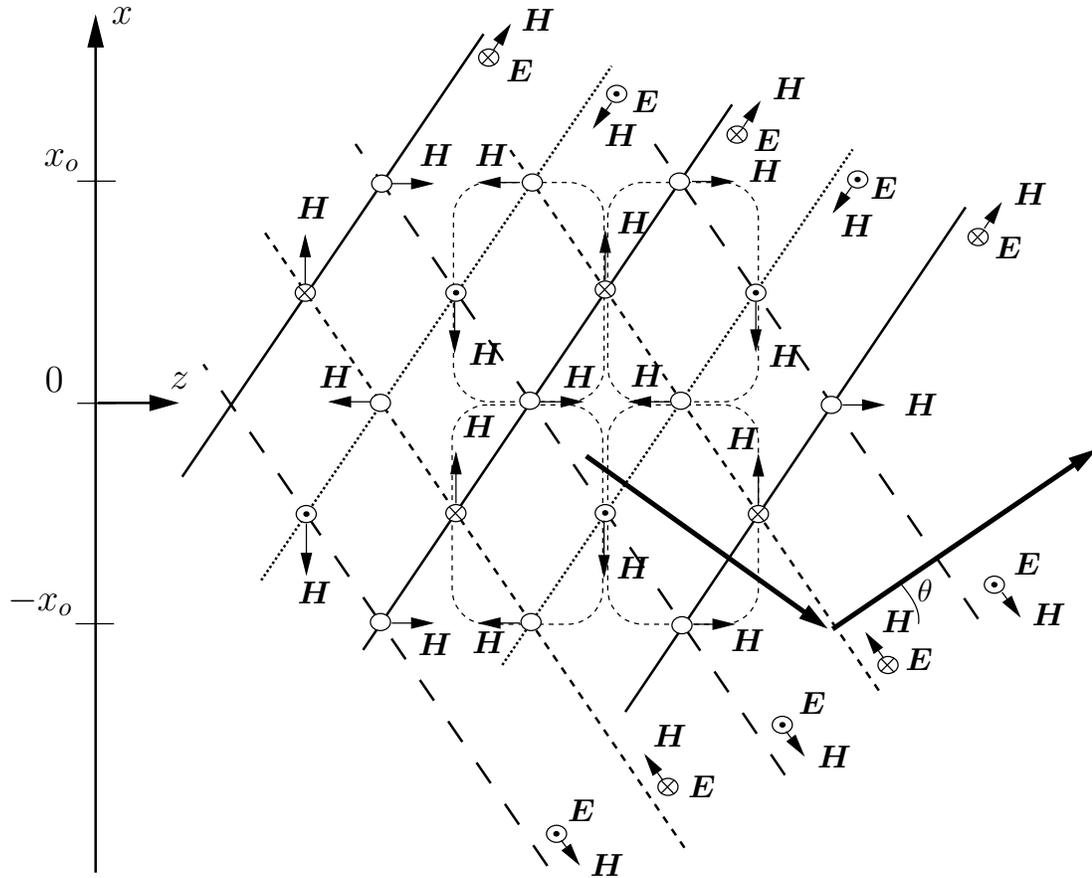


FIGURE 10.3 – Croisement de deux ondes TEM et champs de l'onde résultante.

La figure 10.4 recopie celle 10.3, mais avec quelques retraits et ajouts pour faire ressortir une caractéristique importante. Partout sur les plans  $x = 0, \pm x_o, \pm 2x_o, \dots$ , on note que :

- le champ électrique a une valeur nulle ;
- le champ magnétique est tangential et change de sens une fois sur deux.

On peut donc placer directement aux positions de ces plans, deux plaques conductrices sans affecter la distribution des champs entre ces plaques, car on respecte les conditions aux limites partout sur les plaques.

On observe alors :

- une réflexion des ondes sur les plaques avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence ;
- une propagation de la puissance selon la direction  $z+$  soit une onde positive en  $z$  (une onde équivalente en  $z-$  peut exister si on inverse la direction de propagation des ondes TEM).

Bien que les deux ondes composantes soient des ondes TEM, l'onde résultante se propage dans un mode dit supérieur, le mode Transverse Électrique (TE) ici. Les remarques suivantes peuvent être faites :

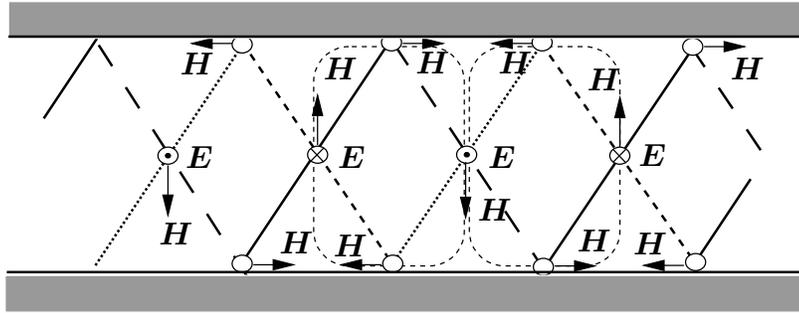


FIGURE 10.4 – Respect des conditions aux limites sur un conducteur dans certains plans produisant une onde positive se propageant en  $z+$  (mode  $TE_1$ ).

- l'espacement possible entre les plaques peut être de  $x_o, 2x_o, \dots$  i.e.  $mx_o$  où  $m$  est un entier strictement supérieur à 0 ;
- un mode<sup>1</sup>  $TE_m$  ou  $TM_m$  entre deux plaques parallèles est formé de deux ou plusieurs ondes TEM ;
- La distance entre les plaques correspond à un multiple de la projection de la longueur d'onde
- En conséquence, il ne peut y avoir de transmission que si la longueur d'onde  $\lambda$  est suffisamment petite pour une distance donnée entre les plaques  $x_o$ .

Le mode Transverse Magnétique (TM) diffère par une rotation de  $90^\circ$  des champs par rapport à la direction de chacune des ondes.

Pour la suite du développement, on respecte la notation :

- $a = mx_o$ , la distance entre les plaques ;
- $m > 0$ , l'ordre du mode supérieur (équivalent au nombre de demi-périodes de  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B$  entre les plaques en TE ; de  $\mathbf{H}_A$  et  $\mathbf{H}_B$  en TM) ;
- $\theta_m$ , l'angle que fait la direction de propagation des ondes planes avec l'axe  $z$  ou la propagation de l'onde résultante (aussi l'angle entre les fronts d'onde et les normales aux plaques conductrices) pour l'ordre  $m$  ;
- $\lambda$ , la longueur d'onde de l'onde plane dans le milieu.

### 10.2.1 Fréquence de coupure

On se réfère à la figure 10.5 pour établir deux équations provenant des triangles rectangles avec  $m = 1$  et pour généraliser ensuite pour  $m$  quelconque :

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{a \sin \theta_m}{m} \quad (10.1)$$

$$\frac{\lambda_{gm}}{2} \cos \theta_m = \frac{\lambda}{2} \quad (10.2)$$

<sup>1</sup>L'indice inférieur  $m$  est rajouté pour indiquer l'ordre du mode.

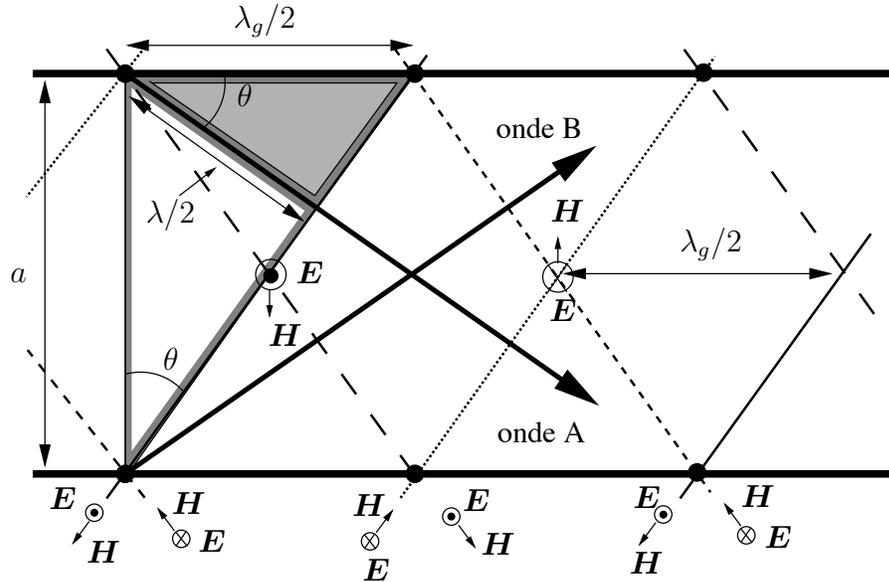


FIGURE 10.5 – Transmission de deux ondes planes entre deux plaques conductrices (mode TE<sub>1</sub>).

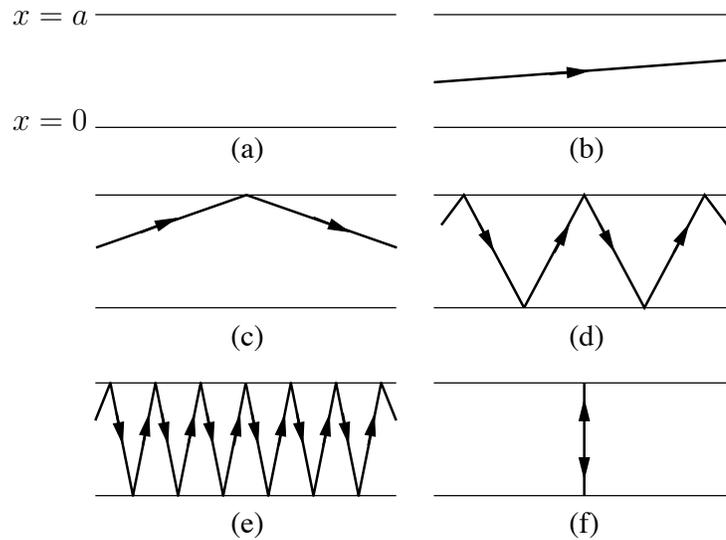


FIGURE 10.6 – Réflexion des ondes entre les plaques en s’approchant de la fréquence de coupure.

La valeur maximale de  $\lambda$  coïncide avec la fréquence minimale d’opération. Elle est atteinte avec  $m$  minimal et  $\sin \theta_m$  maximal, soit :

- $m = 1$  (mode fondamental) ;
- $\theta = 90^\circ$ .

Dans ce cas, on a alors  $\lambda_{max} = 2a$  où  $\lambda_{max}$  représente la longueur d’onde de coupure  $\lambda_{c_1}$  du mode d’ordre 1 dans le guide. Avec  $\theta = 90^\circ$ , il n’y a aucune propagation dans la direction  $z$  car les ondes se réfléchissent entre les plaques en un va-et-vient selon une incidence normale comme sur la figure 10.6. En fait, lorsque la fréquence d’opération augmente, l’angle d’incidence sur les plaques tend vers  $\theta = 0^\circ$ , soit une propagation TEM dans la

direction  $z$ . Théoriquement, une fréquence d'opération infinie rend possible le mode TEM dans toutes lignes de transmission. Plus généralement :

$$\lambda_{c_m} = \frac{2a}{m}. \quad (10.3)$$

Si  $v_p$  est la vitesse de propagation de l'onde plane dans le milieu diélectrique entre les plaques, on a :

$$\lambda_{c_m} = \frac{v_p}{f_{c_m}} \quad (10.4)$$

$$f_{c_m} = m \frac{v_p}{2a} \quad (10.5)$$

On retrouve bien ici la notion de filtre passe-haut citée auparavant avec comme fréquence de coupure  $f_{min}$  pour chaque ordre, notée  $f_{c_m}$ .

Le mode fondamental est défini comme le mode ayant la fréquence de coupure la plus petite. Le nombre de demi-périodes de  $\mathbf{E}$  en TE ou de  $\mathbf{H}$  en TM est réduit à un seul. Le mode fondamental joue un rôle important comme il le sera démontré plus tard, car on tente souvent d'opérer en monomode. La seule manière d'y parvenir consiste à choisir une fréquence d'opération supérieure à  $f_{c_1}$  mais inférieure à  $f_{c_2}$ . Ainsi, seul le mode fondamental se propage, car les autres modes ne traversent pas le filtre.

### 10.2.2 Longueur d'onde guidée

La longueur d'onde guidée  $\lambda_g$  (ou  $\lambda_{g_m}$ , si on tient à indiquer l'ordre) correspond à la longueur d'onde apparente dans la direction de propagation du mode supérieur TE ou TM (l'axe  $z$ ). Avec les notions de la section 5.8, il devient évident que :

$$\lambda_g = \lambda_z = \frac{v_{pz}}{f}. \quad (10.6)$$

On peut aussi écrire selon (10.2) :

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\cos \theta_m}. \quad (10.7)$$

Le principe de propagation et les paramètres en mode supérieur se comprennent plus facilement par analogie avec la ligne de transmission en régime sinusoïdal permanent terminé par le court-circuit. Un court circuit est produit par chacune des plaques.

- À la fréquence de coupure,
  - le court-circuit se répète à tous les  $\lambda/2 = \lambda_c/2 = \lambda_x/2$ ;
  - d'où obligatoirement  $\lambda_z = \lambda_g = \infty$  car on a  $1/\lambda_g^2 = 1/\lambda^2 - 1/\lambda_x^2$ .
- Au dessus de la fréquence de coupure,
  - le mode TE (ou TM) s'ajuste selon  $\theta_m$  pour avoir un court-circuit à la position de l'autre paroi, de sorte que  $a = m\lambda_x/2$  et  $\lambda_x > \lambda$ ;
  - et  $1/\lambda_g^2 = 1/\lambda^2 - (m/(2a))^2 = 1/\lambda^2 - 1/\lambda_{c_m}^2$ .

À l'aide de la figure 10.2, on observe que :

- les boucles de champ magnétique alternent ;
- elles ont une dimension bien précise.

La longueur d'onde guidée  $\lambda_g$  représente aussi la distance parcourue par le champ magnétique pour effectuer une période complète<sup>2</sup> (une boucle dans un sens, la boucle suivante dans l'autre).

À partir des équations (10.1) et (10.2), on peut exprimer  $\lambda_{gm}$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\lambda_{cm}$  sachant que  $\sin^2 \theta_m + \cos^2 \theta_m = 1$  et en remplaçant  $2a/m$  par  $\lambda_c$  selon (10.3) :

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{gm}}\right)^2 = 1$$

ce qui donne :

$$\lambda_{gm} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cm}}{f}\right)^2}} \quad (10.8)$$

La connaissance de l'angle  $\theta_m$  est superficielle mais de (10.7) et de (10.8), on trouve :

$$\cos \theta_m = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cm}}{f}\right)^2} \quad (10.9)$$

### 10.2.3 Vitesses de phase et de groupe

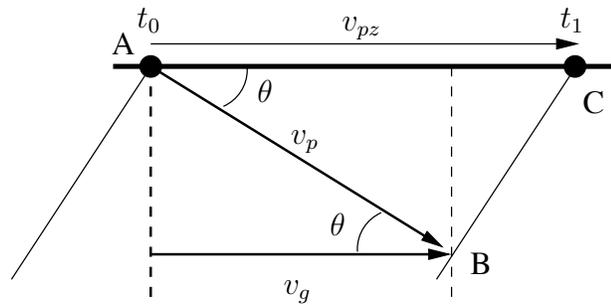


FIGURE 10.7 – Vitesses de propagation, de phase et de groupe dans un guide.

On observe sur la figure 10.7, les différentes vitesses qui sont mises en jeu dans la propagation d'un mode supérieur (voir aussi la figure 5.10) :

- $v_p$  représente la vitesse de l'onde plane dans le milieu diélectrique ;
- $v_{gm}$  est la vitesse de groupe. Pour un guide d'onde, elle correspond aussi à la vitesse de l'énergie soit celle à laquelle se déplace l'information de l'onde TE ou TM dans la direction de propagation  $z$ . Mathématiquement, on écrit :

$$v_{gm} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_{zm}} = v_p \cos \theta_m \quad (10.10)$$

Lorsque l'angle  $\theta_m$  tend vers  $90^\circ$  :

<sup>2</sup>Il en est de même pour le champ électrique.

- l’onde zigzague de plus en plus ;
- la vitesse de groupe  $v_{g_m}$  diminue.
- $v_{pz_m}$  est la vitesse de phase de l’onde TE ou TM. Elle indique le taux de variation de la phase du champ dans la direction de propagation  $z$ . On rappelle que :

$$v_{pz_m} = \frac{v_p}{\cos \theta_m} . \quad (10.11)$$

Le produit des deux vitesses  $v_g$  et  $v_{pz}$  donne :

$$v_g v_{pz} = v_p^2 . \quad (10.12)$$

Les expressions de la vitesse de phase et la vitesse de groupe peuvent être transformées et être redéfinies en fonction des paramètres de l’onde plane :

$$v_{pz_m} = \frac{\lambda_{g_m}}{\lambda} v_p = \frac{v_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c_m}}\right)^2}} = \frac{v_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_m}}{f}\right)^2}} \quad (10.13)$$

$$v_{g_m} = \frac{\lambda}{\lambda_{g_m}} v_p = v_p \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c_m}}\right)^2} = v_p \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_m}}{f}\right)^2} \quad (10.14)$$

### 10.2.4 Impédance intrinsèque en mode supérieur

L’impédance caractéristique d’une ligne de transmission  $Z_o$  implique le mode TEM. De plus, cette impédance correspond au rapport  $\bar{V}^+/\bar{I}^+$ . Dans les modes supérieurs de propagation, on définit aussi une impédance caractéristique, mais elle se note  $\eta_g$  parce qu’elle implique un rapport du type  $\bar{E}^+/\bar{H}^+$  comme pour l’impédance intrinsèque<sup>3</sup> d’un matériau avec une onde plane :

$$\eta_g = \frac{\bar{E}_\perp^+}{\bar{H}_\perp^+} = -\frac{\bar{E}_\perp^-}{\bar{H}_\perp^-} . \quad (10.15)$$

Cette impédance intrinsèque en mode supérieur est aussi appelée impédance du guide ou **impédance transverse** du guide (car uniquement les composantes de champ transverses sont utilisées, d’où l’indice  $\perp$ ).

La définition de l’impédance transverse ne fait intervenir que les composantes de  $\bar{E}^+$  et  $\bar{H}^+$  qui donnent une densité de puissance dans la direction  $z$ ,  $\bar{P}_z$ . Deux combinaisons des champs produisent cet effet :  $\bar{E}_x$  et  $\bar{H}_y$  en  $z+$  (onde positive) ;  $\bar{E}_y$  et  $\bar{H}_x$  en  $z-$  (onde négative). Donc :

$$\eta_g = \frac{\bar{E}_x}{\bar{H}_y} = -\frac{\bar{E}_y}{\bar{H}_x} . \quad (10.16)$$

Le rapport des champs pour exprimer l’impédance transverse dans (10.16) dépend du mode TE ou TM. On doit absolument rajouter un indice pour spécifier le mode puisque :

<sup>3</sup>Les notions de quasi statique ne s’appliquent plus car les dimensions de la section de la ligne deviennent comparables à la longueur d’onde.

- en mode TE,  $E_x = E$  et  $\bar{H}_y = \bar{H} \cos \theta_m$  :

$$\eta_{gTE_m} = \frac{\bar{E}}{\bar{H} \cos \theta_m} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_m}}{f}\right)^2}} \quad (10.17)$$

- alors qu'en TM,  $\bar{E}_x = \bar{E} \cos \theta_m$  et  $\bar{H}_y = \bar{H}$  :

$$\eta_{gTM_m} = \frac{\bar{E} \cos \theta_m}{\bar{H}} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_m}}{f}\right)^2} . \quad (10.18)$$

### 10.2.5 Correspondances avec ligne en mode TEM

Comme il a été mentionné précédemment, le guide d'onde demeure une ligne de transmission mais qui opère dans des modes supérieurs TE ou TM. Il y a donc un parallèle à établir entre les paramètres utilisés pour les lignes de transmission en mode TEM et ceux des guides d'onde. Les correspondances sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{E}_\perp^+ (\bar{E}_\perp^-) &\leftrightarrow \bar{V}^+ (\bar{V}^-) \\ \bar{H}_\perp^+ (\bar{H}_\perp^-) &\leftrightarrow \bar{I}^+ (\bar{I}^-) \\ \lambda_g (v_{pz}, \beta_z) &\leftrightarrow \lambda (v_p, \beta) \\ \eta_g = \frac{\bar{E}_\perp^+}{\bar{H}_\perp^+} &\leftrightarrow Z_o = \frac{\bar{V}^+}{\bar{I}^+} \\ \bar{\eta}_{\perp c}(d) = \frac{\bar{E}_\perp^+(d)}{\bar{H}_\perp^+(d)} &\leftrightarrow \bar{Z}_c(d) = \frac{\bar{V}^+(d)}{\bar{I}^+(d)} . \end{aligned} \quad (10.19)$$

**Exemple 10.1**

Une ligne de transmission est constituée de deux plaques parallèles d'une largeur de 5 cm qui sont espacées par 2.5 cm d'air. Des modes supérieurs  $TE_m$  se propagent avec un signal à 20 GHz.

- Énumérez tous les modes supérieurs TE pouvant exister.

La ligne agit comme filtre passe-haut avec les fréquences de coupure selon l'indice  $m$  calculées suivant (10.5) :

$$f_{c_m} = m \frac{v_p}{2a} = m \frac{3 \times 10^8}{0.05} = 6m \times 10^9 \text{ Hz} .$$

Donc, tant que  $f_{c_m}$  demeure inférieur à 20 GHz, le mode peut exister soit :  $TE_1$  (avec  $f_{c_1} = 6 \text{ GHz}$ ),  $TE_2$  (avec  $f_{c_2} = 12 \text{ GHz}$ ) et  $TE_3$  (avec  $f_{c_3} = 18 \text{ GHz}$ ).

- Pour chacun des modes supérieurs possibles, déterminez l'angle de propagation<sup>4</sup>  $\theta_m$ , la longueur d'onde guidée  $\lambda_{g_m}$ , la vitesse de phase  $v_{p_{z_m}}$  et la vitesse

<sup>4</sup>On note ici que l'angle  $\theta_m$  sur les plaques n'est pas défini par rapport à la normale à la surface de réflexion comme au chapitre 6.

de groupe  $v_{g_m}$ .

L'angle  $\theta_m$  s'obtient de (10.1) sachant la longueur d'onde dans le milieu de l'onde TEM :

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{3 \times 10^8}{20 \times 10^9} = 0.015 \text{ m} .$$

Alors :

$$\theta_m = \arcsin \left( m \frac{0.0075}{0.025} \right)$$

Par contre, tous les autres paramètres se déduisent rapidement à partir de  $\theta_m$  selon (10.7), (10.11) et (10.10) respectivement. On peut aussi prendre les formulations générales passant par les fréquences de coupure selon (10.8), (10.13) et (10.14) ou (10.12). On conseille les dernières formulations plus classiques car habituellement, on ne calcule pas les  $\theta_m$  au préalable. D'où :

$$\begin{aligned} \lambda_{g_m} &= \frac{0.015}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \\ v_{pz_m} &= \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \\ v_{g_m} &= 3 \times 10^8 \sqrt{1 - (f_c/f)^2} \end{aligned}$$

ce qui donne :

Mode	$\sqrt{1 - (f_c/f)^2}$	$\theta_m$ (°)	$\lambda_{g_m}$ (m)	$v_{pz_m}$ (m/s)	$v_{g_m}$ (m/s)
$TE_1$	0.954	17.5	0.01572	$3.145 \times 10^8$	$2.862 \times 10^8$
$TE_2$	0.8	36.9	0.01875	$3.75 \times 10^8$	$2.4 \times 10^8$
$TE_3$	0.436	64.2	0.03441	$6.882 \times 10^8$	$1.308 \times 10^8$

- Évaluez le pourcentage de puissance réfléchi pour le mode  $TE_2$  si cette ligne est connectée à une ligne identique, mais remplie d'un diélectrique ayant une constante  $\epsilon_{r2} = 2.25$ .

Pour un même géométrie et pour un même indice de mode, l'impédance transverse est une mesure de la relation entre le champ électrique et le champ magnétique. On peut donc utiliser les ratios d'impédances transverse pour quantifier l'adaptation de deux guides de même que la transmission et la réflexion à l'interface. La preuve formelle est laissée en exercice. Il faut cependant faire attention de ne pas mélanger divers types d'impédances dans ces comparaisons (impédance intrinsèque, impédance caractéristique, impédance transverse). Il faut aussi éviter de combiner les impédances transverse pour des modes différents.

Sachant cela, il faut connaître les impédances intrinsèques en mode supérieur  $\eta_{g1TE}$  et  $\eta_{g2TE}$  des deux lignes en utilisant (10.17). Pour la ligne à air, on

trouve :

$$\eta_{g1TE_2} = \frac{377}{0.8} = 471 \Omega .$$

Quant à la ligne à diélectrique  $\epsilon_{r2}$ , il faut d'abord réévaluer la fréquence de coupure :

$$f_{c2_2} = 2 \frac{(3 \times 10^8)/\sqrt{2.25}}{0.05} = 8 \text{ GHz} .$$

avant de calculer l'impédance transverse :

$$\eta_{g2TE_2} = \frac{(377)/\sqrt{2.25}}{\sqrt{1 - (8/20)^2}} = \frac{251}{0.916} = 274 \Omega .$$

On remarque le nouvel angle de propagation  $\theta_{2TE_2} = \cos^{-1}(0.916) = 23.6^\circ$  (car  $\theta_{1TE_2} = 36.9^\circ$ ). Le changement angulaire répond à la loi de *Snell-Descartes* entre diélectriques  $n_1 \sin(36.9^\circ) = n_2 \sin(23.6^\circ)$  avec  $n_1 = 1$  et  $n_2 = \sqrt{2.25}$ .

Il ne reste qu'à obtenir le coefficient de réflexion et de là, la réponse demandée :

$$\Gamma_{11} = \frac{274 - 471}{274 + 471} = -0.264$$

$$\%P_{ref} = 100\Gamma_{11}^2 = 7\% .$$

### 10.3 Guide d'onde rectangulaire

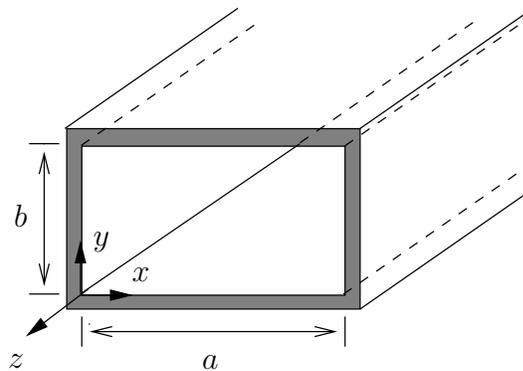


FIGURE 10.8 – Représentation du guide d'onde rectangulaire dans le plan cartésien

Ce qui est habituellement appelé un guide d'onde métallique, par opposition à une ligne de transmission en mode TEM, est constitué d'une section conductrice fermée donnant la forme d'un conducteur simple et creux. Les résultats de l'analyse effectuée jusqu'à présent continuent malgré tout de s'appliquer pour les modes supérieurs seulement car le mode TEM n'existe plus.

Un guide d'onde rectangulaire (voir figure 10.8) possède une section rectangulaire de largeur  $a$  sur l'axe  $x$ , et de hauteur  $b$  sur l'axe  $y$ . Un diélectrique – souvent de l'air –

remplit l'intérieur du conducteur creux. Les champs se déplacent dans le diélectrique, mais ils sont confinés dans l'espace par les quatre parois conductrices. L'axe  $z$  définit toujours la direction de propagation et on suppose  $a \geq b$ . Le diélectrique et le conducteur sont parfaits, car les pertes pourront être considérées ultérieurement en ajoutant simplement la constante d'atténuation sans modifier le reste, un peu comme dans les lignes de transmission à très faibles pertes.

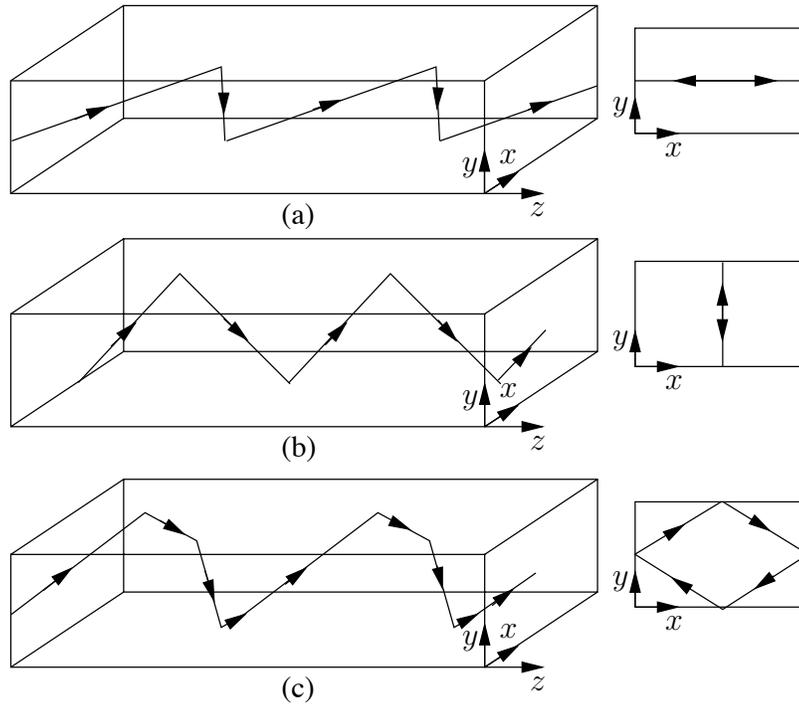


FIGURE 10.9 – Réflexion des ondes entre les plaques d'un guide d'onde rectangulaire a)  $TE_{m0}$ , b)  $TE_{0n}$ , c)  $TE_{mn}$  ou  $TM_{mn}$ .

Il faut voir que les modes supérieurs sont produits avec la combinaison de plusieurs ondes planes se réfléchissant selon divers patrons sur les parois. Les réflexions sur les plaques latérales seules donnent des modes  $TE_{m0}$  tandis que les modes  $TE_{0n}$  sont issus des réflexions sur les plaques inférieure et supérieure seules. Avec des combinaisons des quatre plaques comme sur la figure 10.9, on obtient les modes  $TE_{mn}$ . Pour obtenir l'ensemble des informations sur les champs, il faut solutionner l'équation d'onde issue de la résolution des équations de *Maxwell* en accord avec les conditions aux limites imposées par les parois du guide d'onde.

Deux modes supérieurs peuvent donc s'y propager :

- le mode TE où le champ électrique est transverse avec :

- $\bar{E}_z = 0$ ;
- $\bar{H}_z \neq 0$ .

- le mode TM où le champ magnétique est transverse avec :

- $\bar{E}_z \neq 0$ ;
- $\bar{H}_z = 0$ .

### 10.3.1 Analyse mathématique

L'analyse mathématique qui suit, est faite pour le mode  $TE_{mn}$ <sup>5</sup>. Deux indices sont requis pour l'identification de l'ordre :

- $m$  désigne le nombre de demi-longueurs d'onde du champ  $\mathbf{E}$  selon la largeur  $a$  ;
- $n$  désigne le nombre de demi-longueurs d'onde du champ  $\mathbf{E}$  selon la hauteur  $b$ .

Elle suit les étapes suivantes :

1. Mise en place des équations de *Maxwell* en coordonnées rectangulaires avec les restrictions dues aux variations harmoniques des champs et à l'atténuation selon la direction de propagation ;
2. Sélection du mode supérieur de transmission de l'onde ;
3. Expression de tous les champs  $(\bar{H}_x, \bar{H}_y, \bar{E}_x, \bar{E}_y)$  en fonction de  $\bar{H}_z$  ;
4. Obtention de l'équation d'onde en  $\bar{H}_z$  ;
5. Résolution de l'équation d'onde pour  $\bar{H}_z$  en respect des conditions aux limites sur les parois ;
6. Expressions des autres composantes des champs.

#### 10.3.1.1 Développement des équations de Maxwell

Les champs, quelles que soient leurs composantes, varient sinusoidalement dans le temps. Les champs sont donc remplacés par leur phaseur respectif :

$$E_{x,y,z}(x, y, z, t) \implies \bar{E}_{x,y,z} e^{j\omega t - \bar{\gamma}_z z} .$$

Ainsi :

- toutes les dérivées d'un phaseur dans le temps sont remplacées par  $j\omega$  ;
- toutes les dérivées par rapport à  $z$  sont remplacées par  $\bar{\gamma}_z$

Les équations des rotationnels dans le diélectrique s'écrivent alors :

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{E}_x & \bar{E}_y & \bar{E}_z \end{vmatrix} = -j\omega\mu (\bar{H}_x \mathbf{a}_x + \bar{H}_y \mathbf{a}_y + \bar{H}_z \mathbf{a}_z) \quad (10.20)$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{H}_x & \bar{H}_y & \bar{H}_z \end{vmatrix} = j\omega\epsilon (\bar{E}_x \mathbf{a}_x + \bar{E}_y \mathbf{a}_y + \bar{E}_z \mathbf{a}_z) . \quad (10.21)$$

<sup>5</sup>La même analyse s'applique d'une manière similaire pour un mode  $TM_{mn}$  en remplaçant les champs  $\mathbf{E}$  par les champs  $\mathbf{H}$  et vice-versa.

En développant les rotationnels et en égalant séparément les termes en  $\mathbf{a}_{x,y,z}$  découlent les six équations suivantes :

$$\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y} + \bar{\gamma}_z \bar{E}_y + j\omega\mu \bar{H}_x = 0 \quad (10.22)$$

$$-\bar{\gamma}_z \bar{E}_x - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} + j\omega\mu \bar{H}_y = 0 \quad (10.23)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial y} + j\omega\mu \bar{H}_z = 0 \quad (10.24)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_z}{\partial y} + \bar{\gamma}_z \bar{H}_y - j\omega\epsilon \bar{E}_x = 0 \quad (10.25)$$

$$-\bar{\gamma}_z \bar{H}_x - \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial x} - j\omega\epsilon \bar{E}_y = 0 \quad (10.26)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} - j\omega\epsilon \bar{E}_z = 0 . \quad (10.27)$$

Les équations de divergence donnent :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (10.28)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{H}} = 0 \quad (10.29)$$

car il n'y a pas de charge dans l'espace de propagation ( $\rho = 0$ ). Les deux équations supplémentaires fournies sont :

$$\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial y} - \bar{\gamma}_z \bar{E}_z = 0 \quad (10.30)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial y} - \bar{\gamma}_z \bar{H}_z = 0 . \quad (10.31)$$

### 10.3.1.2 Choix du mode de transmission

Aucune restriction quant au mode choisi n'a été formulée jusqu'ici. L'analyse étant faite pour le mode TE avec une propagation selon l'axe  $z+$ , la condition suivante est impliquée :

$$\bar{E}_z = 0$$

d'où maintenant :

$$\bar{\gamma}_z \bar{E}_y + j\omega\mu \bar{H}_x = 0 \quad (10.32)$$

$$-\bar{\gamma}_z \bar{E}_x + j\omega\mu \bar{H}_y = 0 \quad (10.33)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial y} + j\omega\mu \bar{H}_z = 0 \quad (10.34)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_z}{\partial y} + \bar{\gamma}_z \bar{H}_y - j\omega\epsilon \bar{E}_x = 0 \quad (10.35)$$

$$-\bar{\gamma}_z \bar{H}_x - \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial x} - j\omega\epsilon \bar{E}_y = 0 \quad (10.36)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} = 0 \quad (10.37)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial y} - \bar{\gamma}_z \bar{H}_z = 0 \quad (10.38)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial y} = 0. \quad (10.39)$$

On ouvre ici, une petite parenthèse sur une expression équivalente à (10.17) de l'impédance intrinsèque du guide que l'on déduit de (10.32) ou de (10.33) :

$$\bar{\eta}_{gTE} = \frac{\bar{E}_x}{\bar{H}_y} = -\frac{\bar{E}_y}{\bar{H}_x} = \frac{j\omega\mu}{\bar{\gamma}_z} \quad (10.40)$$

**Exemple 10.2**

Les expressions (10.17) et (10.40) correspondent à l'impédance intrinsèque du guide.

- Démontrez que, dans le cas sans perte au dessus de la fréquence de coupure, ces expressions sont belles et biens équivalentes.

Puisqu'il n'y a pas de perte :

$$\bar{\gamma}_z = j\beta_z = j\beta \cos \theta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \cos \theta$$

donc

$$\frac{j\omega\mu}{\bar{\gamma}_z} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\cos \theta} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \eta_{gTE}$$

CQFD.

### 10.3.1.3 Expression des champs selon $\bar{H}_z$

Il est maintenant possible d'exprimer toutes les composantes de champ en fonction de  $\bar{H}_z$  seulement<sup>6</sup> :

$$\bar{E}_x = \frac{-\bar{\eta}_{gTE}}{\bar{\gamma}_z - j\omega\epsilon\bar{\eta}_{gTE}} \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial y} \quad (10.41)$$

$$\bar{E}_y = \frac{\bar{\eta}_{gTE}}{\bar{\gamma}_z - j\omega\epsilon\bar{\eta}_{gTE}} \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial x} \quad (10.42)$$

$$\bar{H}_x = \frac{-1}{\bar{\gamma}_z - j\omega\epsilon\bar{\eta}_{gTE}} \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial x} \quad (10.43)$$

$$\bar{H}_y = \frac{-1}{\bar{\gamma}_z - j\omega\epsilon\bar{\eta}_{gTE}} \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial y} \quad (10.44)$$

### 10.3.1.4 Équation d'onde en $\bar{H}_z$

En prenant la dérivée partielle en  $x$  de l'équation (10.43) et la dérivée partielle en  $y$  de l'équation (10.44), puis en les substituant dans l'équation (10.38), on obtient l'équation recherchée qui ne fait intervenir que  $\bar{H}_z$  :

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}_z}{\partial y^2}}_{\nabla_{\perp}^2 \bar{H}_z} + \underbrace{\bar{\gamma}_z (\bar{\gamma}_z - j\omega\epsilon\bar{\eta}_{gTE})}_{-\bar{\gamma}_{\perp}^2} \bar{H}_z = 0 \quad (10.45)$$

Cette équation ressemble beaucoup à l'équation d'onde (5.28). Dans les prochaines sous-sections, on démontrera que l'indice  $\perp$  est utilisé car  $\nabla_{\perp}$  et  $\bar{\gamma}_{\perp}$  ne font intervenir que les composantes transverses, et que  $\bar{\gamma}_{\perp}$  a un lien avec la fréquence de coupure.

### 10.3.1.5 Résolution de l'équation d'onde

Pour simplifier le développement des futures expressions, on suppose :

- le cas sans perte ;
- une fréquence d'opération supérieure à la fréquence de coupure.

Dans ces conditions, l'exemple 10.2 a montré que l'impédance transverse d'un guide d'onde possède une valeur réelle  $\eta_{gTE}$ . De plus,  $\bar{\gamma}_z = j\beta_z$  est un nombre purement imaginaire car la constante d'atténuation en  $z$  est nulle. Ainsi, de (10.45), on vérifie que :

$$\bar{\gamma}_{\perp}^2 = -(j\beta_z)^2 + \underbrace{j\omega\epsilon\bar{\eta}_{gTE}\bar{\gamma}_z}_{-\omega^2\mu\epsilon} = \beta_z^2 - \beta^2 < 0 \quad (10.46)$$

(car  $\beta > \beta_z$  lorsqu'il y a propagation i.e. lorsque  $f > f_c$ ) d'où

$$\bar{\gamma}_{\perp} = j\beta_{\perp} \quad .$$

<sup>6</sup>Par exemple,  $\bar{E}_y$  s'obtient en prenant les deux expressions (10.34), (10.32) avec (10.40).

L'équation différentielle (10.45) donne la solution dans un mode TE, pour un guide d'onde à section quelconque. Avec un guide d'onde rectangulaire, les conditions limites doivent être respectées aux coordonnées  $x = 0, a$  et  $y = 0, b$ .

Pour obtenir la solution pour  $\bar{H}_z$ , on utilise la méthode de séparation des variables dans le système cartésien, c'est-à-dire que l'on cherche une solution pour  $\bar{H}_z$  qui puisse s'exprimer sous la forme :

$$\bar{H}_z = \bar{F}(x) \bar{G}(y) e^{-j\beta_z z}$$

où

- $\bar{F}(x)$  est une fonction complexe de  $x$  seulement ;
- $\bar{G}(y)$  est une fonction complexe de  $y$  seulement.

On voit bien la symétrie en  $x$  et en  $y$  de (10.45) qui oblige  $\bar{F}(\cdot) = \bar{G}(\cdot)$ . La nouvelle équation d'onde pour le guide d'onde devient :

$$\frac{1}{\bar{F}(x)} \frac{d^2 \bar{F}(x)}{dx^2} + \frac{1}{\bar{F}(y)} \frac{d^2 \bar{F}(y)}{dy^2} + \beta_{\perp}^2 = 0 \quad (10.47)$$

En posant :

$$\beta_x^2 = -\frac{1}{\bar{F}(x)} \frac{d^2 \bar{F}(x)}{dx^2} \quad (10.48)$$

$$\beta_y^2 = -\frac{1}{\bar{F}(y)} \frac{d^2 \bar{F}(y)}{dy^2} \quad (10.49)$$

en obtient deux équations différentielles totale identiques à l'équation d'onde (5.28), l'une suivant l'axe  $x$  et l'autre suivant  $y$ , avec la contrainte :

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta_{\perp}^2 . \quad (10.50)$$

La constante de phase transverse  $\beta_{\perp}$  ne concerne pas la propagation dans l'axe  $z$ , mais uniquement celle dans les directions perpendiculaires responsables des mouvements en zigzag entre les parois du guide. Comme les dimensions physiques du guide sont fixées,  $\beta_{\perp}$  devient une constante pour un guide donné.

Les solutions pour  $\bar{F}(x)$  et  $\bar{F}(y)$  sont similaires à celle obtenue pour l'onde telle (5.30) :

$$\bar{F}(x) = \bar{A}_1 e^{j\beta_x x} + \bar{A}_2 e^{-j\beta_x x} \quad (10.51)$$

$$\bar{F}(y) = \bar{B}_1 e^{j\beta_y y} + \bar{B}_2 e^{-j\beta_y y} . \quad (10.52)$$

On obtient alors pour  $\bar{H}_z$  :

$$\bar{H}_z = (\bar{A}_1 e^{j\beta_x x} + \bar{A}_2 e^{-j\beta_x x}) (\bar{B}_1 e^{j\beta_y y} + \bar{B}_2 e^{-j\beta_y y}) e^{-j\beta_z z} . \quad (10.53)$$

Les constantes  $\bar{A}_{1,2}$  et  $\bar{B}_{1,2}$  sont ajustées pour respecter les conditions aux limites et, pour tenir compte de la puissance transportée par l'onde dans le guide.

## 10.3.1.6 Respect des conditions limites

On choisit les conditions qui s'appliquent pour le champ électrique tangentiel :

$$\begin{aligned}\bar{E}_x &= 0 \quad \text{pour } y = 0, b, \quad 0 < x < a \\ \bar{E}_y &= 0 \quad \text{pour } x = 0, a, \quad 0 < y < b.\end{aligned}$$

Selon les expressions (10.41) et (10.42), cela revient à dire que :

$$\#1 : \quad \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0, \quad 0 < x < a \quad (10.54)$$

$$\#2 : \quad \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = b, \quad 0 < x < a \quad (10.55)$$

$$\#3 : \quad \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0, \quad 0 < y < b \quad (10.56)$$

$$\#4 : \quad \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = a, \quad 0 < y < b. \quad (10.57)$$

- Les conditions #1 et #3 en conjonction avec (10.53) imposent :

$$(\bar{A}_1 - \bar{A}_2 = 0) \text{ soit } \bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A};$$

$$(\bar{B}_1 - \bar{B}_2 = 0) \text{ soit } \bar{B}_1 = \bar{B}_2 = \bar{B}.$$

L'expression (10.53) se résume maintenant à :

$$\bar{H}_z = 4\bar{A}\bar{B} \cos(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z}. \quad (10.58)$$

- Les conditions restantes en conjonction avec (10.58) imposent cette fois :

$$(\sin(\beta_x a) = 0) \text{ soit}$$

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (10.59)$$

$$(\sin(\beta_y b) = 0) \text{ soit}$$

$$\beta_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.60)$$

Ainsi, on s'aperçoit que la constante de phase transverse  $\beta_\perp$  est aussi une fonction des indices du mode  $m$  et  $n$ . Elle peut donc se noter  $\beta_{\perp mn}$ .

La solution complète et finale du champ  $\bar{H}_z$  en mode  $TE_{mn}$  est donc :

$$\bar{H}_z(x, y, z) = \bar{H}_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.61)$$

où  $\bar{H}_o$  remplace le produit  $4\bar{A}\bar{B}$ . Sa valeur est déterminée à partir de la puissance transportée par l'onde.

### 10.3.1.7 Expressions finales des autres composantes

L'expression trouvée pour  $\bar{H}_z$  issue de (10.61) sert maintenant dans les équations (10.41) à (10.44), pour les définitions de toutes les autres composantes des champs :

$$\bar{E}_x = \frac{j\omega\mu}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{n\pi}{b} H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.62)$$

$$\bar{E}_y = -\frac{j\omega\mu}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{m\pi}{a} H_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.63)$$

$$\bar{E}_z = 0 \quad (10.64)$$

$$\bar{H}_x = \frac{j\beta_z}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{m\pi}{a} H_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.65)$$

$$\bar{H}_y = \frac{j\beta_z}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{n\pi}{b} H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} . \quad (10.66)$$

## 10.3.2 Quelques modes $TE_{mn}$

### 10.3.2.1 Mode fondamental $TE_{10}$

Comme l'indique les indices de ce mode, on a :

- $m = 1$  ;
- $n = 0$ .

Dans ce cas, il n'y a aucune variation des champs selon l'axe  $y$  et seulement trois composantes ont une valeur non nulle. Les expressions de toutes les composantes de champ s'écrivent :

$$\bar{E}_x = 0 \quad (10.67)$$

$$\bar{E}_y = \underbrace{\frac{-j\omega\mu \pi}{\beta_{\perp 10}^2} \frac{1}{a}}_{-j\omega\mu \frac{a}{\pi}} H_o \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.68)$$

$$\bar{E}_z = 0 \quad (10.69)$$

$$\bar{H}_x = \underbrace{\frac{j\beta_z \pi}{\beta_{\perp 10}^2} \frac{1}{a}}_{j\beta_z \frac{a}{\pi}} H_o \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.70)$$

$$\bar{H}_y = 0 \quad (10.71)$$

$$\bar{H}_z = H_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_z z} . \quad (10.72)$$

Les figures 10.10, 10.11, 10.12 illustrent respectivement la variation de ces champs selon l'axe  $x$ , leur configuration vue dans la section du guide et vue de dessus. Les lignes en trait continu représentent le champ électrique alors que celles en pointillés, c'est le champ magnétique. La densité de lignes est proportionnelle à l'intensité des champs en question.

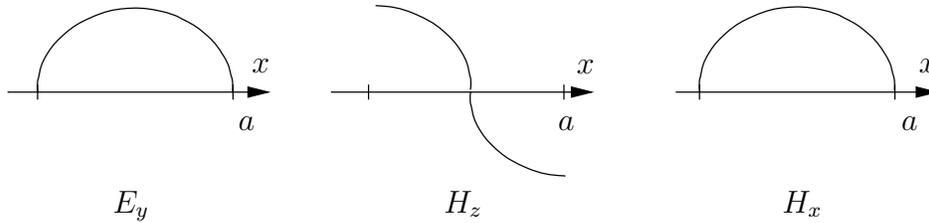


FIGURE 10.10 – Variation des composantes des champs dans le mode  $TE_{10}$  selon la largeur du guide.

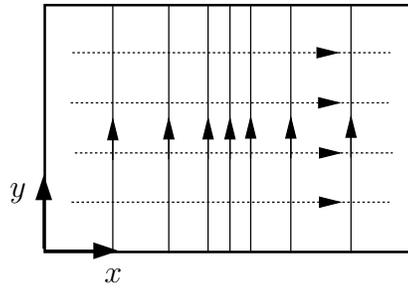


FIGURE 10.11 – Configuration conventionnelle des champs dans le mode  $TE_{10}$  vue dans la section du guide (champ  $E$  : — champ  $H$  :  $\cdots$ ).

Le mode  $TE_{10}$  est dit fondamental (ou dominant), car il possède la plus basse fréquence de coupure. Par un choix judicieux de la fréquence d'opération, il est possible que seul le mode fondamental puisse exister. On opère alors en monomode. L'avantage du monomode consiste en une plus faible dispersion du signal (voir les lignes à pertes en régime sinusoïdal permanent). Il faut se rappeler que la dispersion est causée entre autre par les vitesses de propagation différentes selon la fréquence. Or, l'énergie d'une composante spectrale répartie sur plusieurs modes a la même conséquence, car chaque mode voyage à une vitesse différente suivant l'axe  $z$ . Le guide d'onde – tout comme la fibre optique – produit une dispersion amplifiée par les deux causes :

- pour tout mode supérieur  $v_{pz} \neq \text{cte}$  ;
- pour deux modes supérieurs différents  $v_{pz_{m_1 n_1}} \neq v_{pz_{m_2 n_2}}$ .

Il s'agit d'un avantage très important dès qu'on désire communiquer sur une grande distance ou à grand débit.

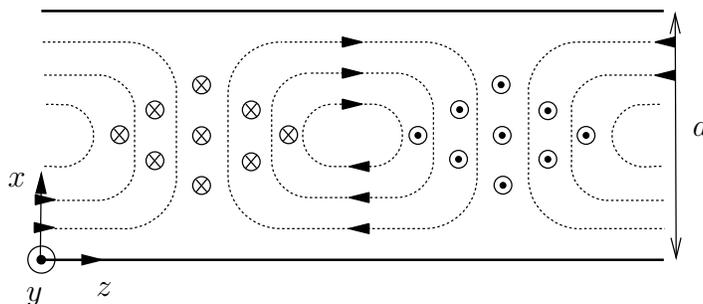


FIGURE 10.12 – Configuration des champs dans le mode  $TE_{10}$  vue de dessus (champ  $H$  :  $\cdots$ ).

10.3.2.2 Mode  $TE_{20}$

Ce mode est présent lorsque qu'il y a deux cycles de variation (équivalent à une période complète) du champ  $\mathbf{E}$  suivant la largeur du guide et aucun suivant sa hauteur.

Les champs sont définies par :

$$\bar{E}_x = 0 \tag{10.73}$$

$$\bar{E}_y = \underbrace{\frac{-j\omega\mu 2\pi}{\beta_{\perp 20}^2 a}}_{-j\omega\mu \frac{a}{2\pi}} H_o \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_z z} \tag{10.74}$$

$$\bar{E}_z = 0 \tag{10.75}$$

$$\bar{H}_x = \underbrace{\frac{j\beta_z 2\pi}{\beta_{\perp 20}^2 a}}_{j\beta_z \frac{a}{2\pi}} H_o \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_z z} \tag{10.76}$$

$$\bar{H}_y = 0 \tag{10.77}$$

$$\bar{H}_z = H_o \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_z z} . \tag{10.78}$$

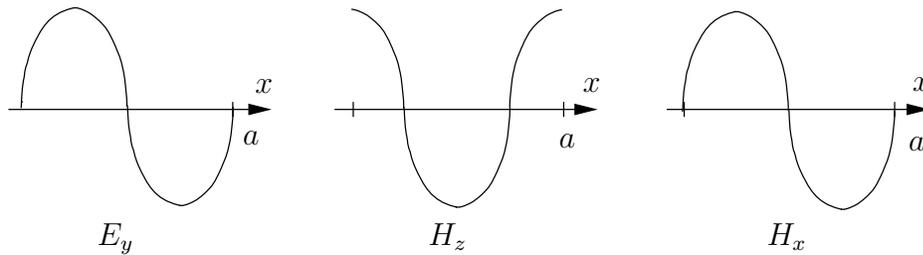


FIGURE 10.13 – Variation des composantes des champs dans le mode  $TE_{20}$  selon la largeur du guide.

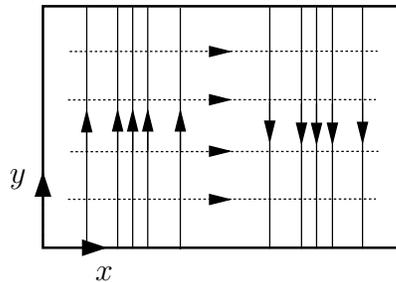


FIGURE 10.14 – Configuration conventionnelle des champs dans le mode  $TE_{20}$  vue dans la section du guide (champ  $E$  : — champ  $H$  : ...).

Les figures 10.13, 10.14, 10.15 décrivent les champs dans le guide pour le mode  $TE_{20}$ .

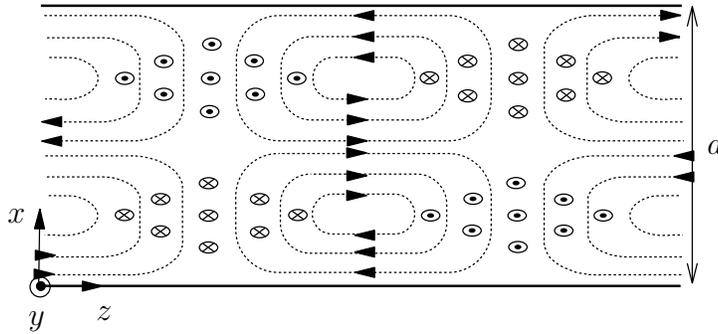


FIGURE 10.15 – Configuration des champs dans le mode  $TE_{20}$  vue de dessus (champ  $H$  :  $\dots$ ).

### 10.3.2.3 Mode $TE_{11}$

Dans le cas d'un mode  $TE_{11}$ , il y a variation d'une demi-période des champs non seulement selon l'axe  $x$  mais également selon l'axe  $y$ .

Leurs expressions sont :

$$\bar{E}_x = \frac{j\omega\mu}{\beta_{\perp 11}^2} \frac{\pi}{b} H_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.79)$$

$$\bar{E}_y = -\frac{j\omega\mu}{\beta_{\perp 11}^2} \frac{\pi}{a} H_o \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.80)$$

$$\bar{E}_z = 0 \quad (10.81)$$

$$\bar{H}_x = \frac{j\beta_z}{\beta_{\perp 11}^2} \frac{\pi}{a} H_o \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.82)$$

$$\bar{H}_y = \frac{j\beta_z}{\beta_{\perp 11}^2} \frac{\pi}{b} H_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.83)$$

$$\bar{H}_z = H_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} . \quad (10.84)$$

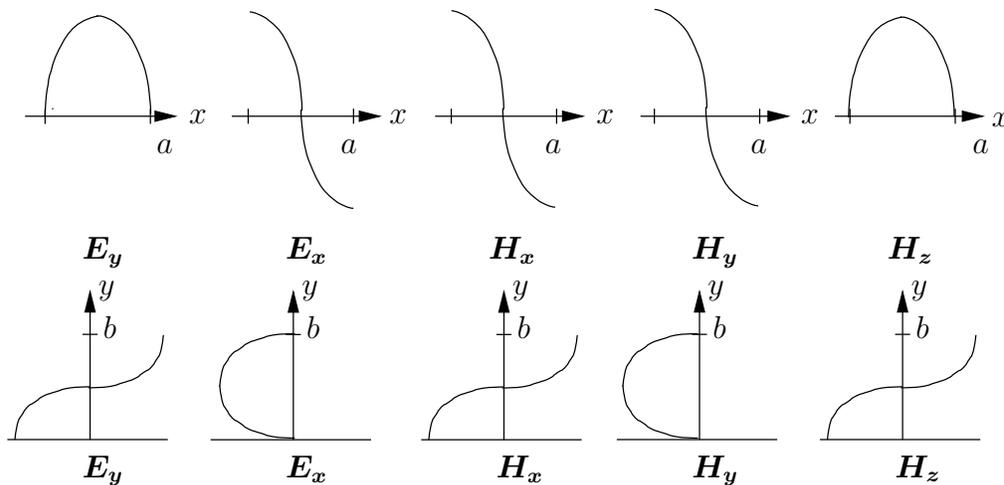


FIGURE 10.16 – Variation des composantes des champs dans le mode  $TE_{11}$  selon la largeur du guide.

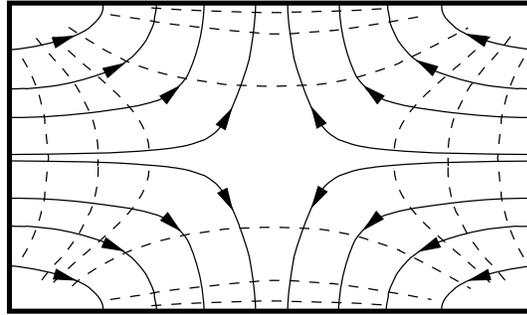


FIGURE 10.17 – Configuration conventionnelle des champs dans le mode  $TE_{11}$  vue dans la section du guide (champ  $E$  : — champ  $H$  :  $\cdots$ ).

Les figures 10.16, 10.17 décrivent les champs dans le guide pour le mode  $TE_{11}$ . La configuration des champs dans le mode  $TE_{11}$  vue du dessus est identique à celle en mode  $TE_{10}$  de la figure 10.12 à cause des indices  $m$  pareils. De même, la configuration des champs dans le mode  $TE_{11}$  vue du côté serait identique à celle en mode  $TE_{01}$  à cause des indices  $n$  pareils.

### 10.3.3 Principaux paramètres

Pour un guide à plaques parallèles, les principaux paramètres des modes supérieurs de propagation ont été décrits avec un seul indice ; ils font tous intervenir la fonction fréquentielle de mode supérieur  $\sqrt{1 - (f_c/f)^2}$ . Dans un guide d'onde à section rectangulaire, les deux indices sont maintenant requis pour le calcul de  $f_c$ , mais la même fonction fréquentielle de mode supérieur continue à être appliquée. La fréquence de coupure  $f_c$  demeure donc le paramètre de base qui détermine la présence ou l'absence d'un mode supérieur ; elle doit être déterminée impérativement pour chacun des modes.

Ainsi, un mode supérieur  $(m,n)$  existe selon une combinaison de plusieurs facteurs dont :

- les dimensions du guide ;
- la fréquence d'opération ;
- la façon d'exciter l'onde dans le guide.

Dans un guide d'ondes, l'énergie portée par l'onde est nécessairement répartie entre les modes, qui sont les seules solutions possibles du champ (et qui forment une base). À l'interface entre deux guides, ou si l'onde rencontre une discontinuité dans un guide, seule l'énergie portée par les modes possibles dans la seconde section pourra se propager. L'énergie des modes ne pouvant se propager est réfléchi, ou alors des modes supérieurs locaux évanescents couplent l'énergie.

### 10.3.3.1 Fréquence de coupure

Les expressions (10.59) et (10.60) pour  $\beta_x$  et  $\beta_y$  obtenues à partir des conditions aux limites, placées dans l'équation (10.50), donne :

$$\beta_{\perp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 . \quad (10.85)$$

Or, pour une onde plane se propageant dans une direction quelconque, on a  $\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2$ . De (10.50) et (10.85), on déduit :

$$\begin{aligned} \beta_z^2 &= \beta^2 - \underbrace{(\beta_x^2 + \beta_y^2)}_{\beta_{\perp}^2} \\ &= \left(\frac{\omega}{v_p}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned} \quad (10.86)$$

ou encore (ayant  $\bar{\gamma}_z^2 = -\beta_z^2$ ) :

$$\bar{\gamma}_z = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{v_p}\right)^2} . \quad (10.87)$$

La propagation en  $z$  reste possible tant que  $\bar{\gamma}_z$  possède une partie imaginaire non-nulle. Cela revient à dire que  $\beta_z$  demeure un nombre réel soit  $\beta_z^2 > 0$ . Il existe donc trois cas distincts en interprétant selon la fréquence d'opération (ou fréquence angulaire  $\omega$ ) :

- $(\omega/v_p)^2 < (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$  (basses fréquences)
  - $\bar{\gamma}_z$  est un nombre réel ;
  - il y a atténuation du signal mais l'onde ne se propage pas ( $\beta_z = 0$ ), produisant une onde évanescente ;
  - le guide est dit opaque .
- $(\omega/v_p)^2 > (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$  (hautes fréquences)
  - $\bar{\gamma}_z$  est un imaginaire pur ;
  - le signal se propage sans atténuation ( $\alpha_z = 0$ ) avec une variation de phase dans l'axe de propagation ;
  - le guide est dit transparent.
- $(\omega/v_p)^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 = \beta_{\perp}^2$ 
  - $\bar{\gamma}_z$  est nulle ;
  - la fréquence du signal correspond à la fréquence de coupure du guide  $f_{c_{mn}}$  pour le mode  $(m,n)$  considéré ;
  - $\beta_{\perp}$  représente donc la constante de phase à la fréquence de coupure.

On ne doit pas oublier que le diélectrique et le conducteur sont parfaits. La perte associée à une constante d'atténuation  $\alpha_z$  non nulle montre uniquement que le guide agit comme un filtre passe-haut. Cette perte en est donc une de filtrage. Par contre, dans la "bande-passante", il faudra ajouter éventuellement les pertes produites par les matériaux (diélectrique et conducteur) qui composent le guide.

La fréquence de coupure  $f_{c_{mn}}$  est déduite du troisième cas ci-dessus. Elle vaut :

$$f_{c_{mn}} = \frac{v_p}{2\pi} \beta_{\perp} = \frac{v_p}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (10.88)$$

De même, la longueur d'onde de coupure  $\lambda_{c_{mn}}$  s'exprime comme :

$$\lambda_{c_{mn}} = \frac{2\pi}{\beta_{\perp}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (10.89)$$

Ces équations (10.88) et (10.89) sont compatibles avec celles obtenues pour le guide à plaques parallèles (un seul indice, le second forcé à 0) ; il suffit de comparer avec (10.5) et (10.3). D'ailleurs, on démontre que le calcul de  $f_{c_{mn}}$  peut se faire à partir de celui avec plaques parallèles car ici, l'assemblage d'un guide d'onde rectangulaire comprend deux lignes à plaques parallèles orthogonales. Ainsi, on déduit :

$$f_{c_{mn}} = \sqrt{f_{c_{m0}}^2 + f_{c_{0n}}^2} \quad (10.90)$$

### 10.3.4 Longueur d'onde guidée

La constante de phase  $\beta_z$  indique la variation de phase du signal dans le guide selon l'axe de propagation. Elle indique donc la longueur d'onde apparente dans l'axe de propagation ou longueur d'onde guidée  $\lambda_g$ . Selon (10.86) :

$$\beta_z = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \sqrt{\beta^2 - \beta_{\perp}^2} \quad (10.91)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (10.92)$$

d'où l'on déduit facilement, notamment avec l'aide de (10.89) :

$$\lambda_g = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{m}{2a}\right)^2 - \left(\frac{n}{2b}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_{c_{mn}}}\right)^2}} \quad (10.93)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c_{mn}}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (10.94)$$

soit la même équation que (10.8), donnant la longueur d'onde guidée en mode supérieur entre des plaques parallèles (un seul indice) !

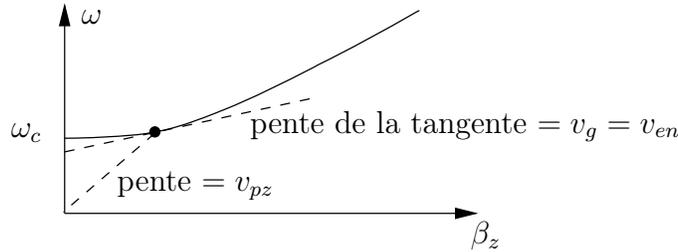


FIGURE 10.18 – Représentation graphique de la détermination des vitesses de phase dans le guide et de groupe.

### 10.3.5 Vitesses de phase et de groupe

La vitesse de phase  $v_{pz}$  de l'onde TE ou TM dans le guide s'exprime de plusieurs façons :

$$v_{pz} = \frac{\omega}{\beta_z} = f \lambda_g \quad (10.95)$$

$$= \frac{v_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{v_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (10.96)$$

On reconnaît la même relation qu'avec le guide à plaques parallèles.

De la même manière, la vitesse de groupe  $v_g$  est donnée par (voir l'équation 10.12)) :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_z} = \frac{v_p^2}{v_{pz}} \quad (10.97)$$

$$= v_p \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = v_p \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (10.98)$$

La figure 10.18 illustre comment faire la différence des deux vitesses en partant de la relation  $\omega$  vs  $\beta_z$ . D'après les définitions de vitesse de phase du guide et de vitesse de groupe, il est bon de souligner ou de rappeler les points suivants :

- la vitesse de phase du guide est la vitesse à laquelle les ondes semblent se propager le long des parois du guide. Cette vitesse est supérieure à la vitesse de propagation, mais ce n'est qu'une vitesse apparente.
- la vitesse de groupe reflète le fait que les diverses composantes des champs s'additionnant pour créer le champ du guide voyagent toutes avec des réflexions à des angles différents par rapport à l'axe du guide et, en conséquence, la vitesse de transmission de l'information est moindre que la vitesse de propagation de l'onde.
- si la longueur d'onde du signal  $\lambda$  est augmentée, les réflexions des ondes se font de plus en plus à angle avec les parois du guide, ce qui amène :
  - une diminution de la vitesse de groupe ;
  - une augmentation de la vitesse de phase.

- lorsque les réflexions se font à incidence normale avec les parois du guide (i.e. à la fréquence de coupure), les conséquences sont :
  - la vitesse de phase tend vers l'infinie ;
  - la vitesse de groupe devient nulle.

### 10.3.6 Impédance intrinsèque en mode supérieur

L'analogie des équations en guide rectangulaire comparativement à celles du guide à plaques parallèles continue ici aussi avec l'impédance intrinsèque en mode supérieur ou impédance transverse. La démonstration faite à l'exemple 10.2 prouve que l'impédance transverse  $\eta_{gTE}$  peut être écrite ainsi lorsqu'il y a propagation :

$$\eta_{gTE} = \frac{j\omega\mu}{\tilde{\gamma}_z} = \frac{\omega\mu}{\beta_z} \quad (10.99)$$

$$= \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (10.100)$$

### 10.3.7 Mode Transverse Magnétique

Le mode supérieur Transverse-Magnétique existe lorsque le champ magnétique n'a qu'une composante perpendiculaire à la direction de propagation.

Pour trouver les expressions de tous les champs la procédure est identique à celle qui a été appliquée pour le mode  $TE_{mn}$  sauf qu'au moment de la sélection du mode de transmission de l'onde :

- on substitue  $\bar{E}_z$  à la place de  $\bar{H}_z$  (et vice-versa) ;
- on pose  $H_z = 0$  et on assume que la seule composante longitudinale des champs est  $\bar{E}_z$ .

Les expressions des composantes des champs s'écrivent :

$$\bar{E}_x = -\frac{j\beta_z}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{m\pi}{a} E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.101)$$

$$\bar{E}_y = -\frac{j\beta_z}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{n\pi}{b} E_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.102)$$

$$\bar{E}_z = E_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (10.103)$$

$$\bar{H}_x = \frac{j\omega\epsilon}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{n\pi}{b} E_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.104)$$

$$\bar{H}_y = -\frac{j\omega\epsilon}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{m\pi}{a} E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_z z} \quad (10.105)$$

$$\bar{H}_z = 0. \quad (10.106)$$

De plus, il faut savoir que tous les paramètres importants gardent la même expression en mode TM qu'en mode TE à l'exception d'un seul, l'impédance transverse. Donc :

$$f_{cTM_{mn}} = f_{cTE_{mn}} = f_{c_{mn}} \quad (10.107)$$

$$v_{pzTM_{mn}} = v_{pzTE_{mn}} = v_{pz_{mn}} \quad (10.108)$$

$$(10.109)$$

mais :

$$\eta_{gTM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (10.110)$$

*Attention* : Il faut savoir que *le mode fondamental (ou dominant) des modes TM seulement est le mode  $TM_{11}$*  parce que  $n, m \neq 0$  (si  $m = 0$  ou  $n = 0$ , alors tous les champs sont nuls).

### 10.3.8 Conclusion sur les guides rectangulaires

Pour une fréquence donnée du signal, plusieurs modes supérieurs peuvent apparaître même si, au départ, un seul mode était excité. Les causes peuvent être diverses : virage, imperfection des joints, insertion de composants (e.g. des ferrites) dans le guide, etc. Ce phénomène peut entraîner des conséquences graves comme une mauvaise réception de l'information transmise.

Pour éviter les problèmes du multimode, les dimensions du guide d'onde sont choisies afin d'opérer seulement dans le mode fondamental sur la largeur de bande désirée.

#### Exemple 10.3

Les guides d'onde rectangulaires commerciaux sont codés de la manière suivante : WR-28 pour<sup>7</sup> "Waveguide-Rectangular-28/100 pouce". Le chiffre indique la plus grande dimension interne du guide qu'on assume comme étant  $a$ . La seconde dimension interne vaut habituellement la moitié de la plus grande, soit ici "0.14 pouce". Il existe quelques exception à cette règle dont les très connus WR-90 ( $0.90 \times 0.40$ ), et WR-42 ( $0.42 \times 0.17$ ) pour n'en nommer que quelques-uns.

Soit un WR-42 ( $0.010668 \times 0.004318$  m) dont le diélectrique est de l'air.

- Déterminez la bande passante idéale pour fonctionner en monomode.

Il suffit de calculer les fréquences de coupure du mode fondamental et des modes les plus susceptibles d'avoir une fréquence de coupure dans les plus

<sup>7</sup>Dans le système anglais, 1 pouce correspond exactement à 2.54 cm.

basses<sup>8</sup>. Avec l'aide de (10.88), on obtient :

$$\begin{aligned} f_{c_{10}} &= \frac{v_p}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{0.021336} = 14.06 \text{ GHz} \\ f_{c_{01}} &= \frac{v_p}{2b} = \frac{3 \times 10^8}{0.008636} = 34.74 \text{ GHz} \\ f_{c_{20}} &= 2f_{c_{10}} = 28.12 \text{ GHz} \\ f_{c_{11}} &= \sqrt{f_{c_{10}}^2 + f_{c_{01}}^2} = 37.37 \text{ GHz} \end{aligned}$$

En conséquence, le guide fonctionne en monomode tant que la fréquence d'opération se situe entre les limites suivantes :

$$14.06 \text{ GHz} < f < 28.12 \text{ GHz} .$$

Par souci de sécurité, les données techniques dans les catalogues établissent que le WR-42 est conçu pour la bande 16 à 26.5 GHz.

- Aux fréquences limites spécifiées par les fabricants, déterminez les vitesses de phase, de groupe et l'impédance transverse du guide.

On utilise (10.96), (10.98) et (10.100) pour le mode  $TE_{10}$  seulement. On obtient en prenant  $v_p = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  et  $\eta = 377 \Omega$  :

$f \text{ (GHz)}$	$\sqrt{1 - (f_c/f)^2}$	$v_{pz_m} \text{ (m/s)}$	$v_{g_m} \text{ (m/s)}$	$\eta_{g_{TE}} \text{ (\Omega)}$
16	0.4841	$6.20 \times 10^8$	$1.45 \times 10^8$	778.7
26.5	0.8491	$3.53 \times 10^8$	$2.55 \times 10^8$	444.0

## 10.4 Guide d'onde circulaire

Le guide d'onde circulaire est un cylindre métallique, creux, de rayon  $a$ . Il est représenté dans le système de coordonnées cylindriques sur la figure 10.19 où l'axe  $z$  est toujours défini comme étant la direction de propagation.

La procédure pour déterminer les expressions analytiques de tous les champs est similaire à celle suivie pour le guide d'onde rectangulaire à l'exception de la mise en place et de la résolution des équations qui est faite en coordonnées cylindriques pour faciliter l'application de la condition aux limites.

### 10.4.1 Expressions des champs

L'expression du second ordre en  $\bar{H}_z$  en TE (en  $\bar{E}_z$  en TM) à laquelle on arrive, se complique un peu en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{H}_z}{\partial \phi^2} + \beta_{\perp}^2 \bar{H}_z = 0 . \tag{10.111}$$

<sup>8</sup>Il ne peut y avoir que deux modes qui ont une fréquence de coupure la plus proche de celle du mode fondamental :  $TE_{20}$  ou  $TE_{01}$  car les autres seront forcément plus élevées encore.

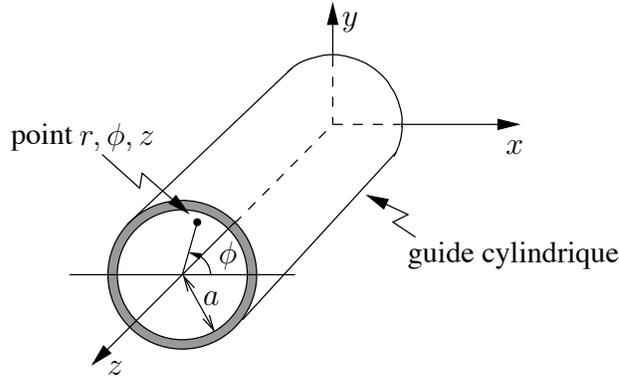


FIGURE 10.19 – Géométrie du guide d'onde circulaire en coordonnées cylindriques

Avec la séparation des variables suivante

$$\bar{H}_z = \bar{F}(r)\bar{G}(\phi)e^{-j\beta_z z}$$

les deux équations différentielles ordinaires suivantes en découlent<sup>9</sup> :

$$\frac{d^2\bar{G}(\phi)}{d\phi^2} + n^2\bar{G}(\phi) = 0 \quad (10.112)$$

$$\frac{d^2\bar{F}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{F}(r)}{dr} + \left(\beta_{\perp}^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\bar{F}(r) = 0 \quad (10.113)$$

où  $n$  est une constante. Leur solution respective est :

$$\bar{G}(\phi) = \bar{A}_1 \cos(n\phi) + \bar{A}_2 \sin(n\phi) \quad (10.114)$$

$$\bar{F}(r) = \bar{B}_1 J_n(\beta_{\perp} r) + \bar{B}_2 Y_n(\beta_{\perp} r) . \quad (10.115)$$

$J_n(\beta_{\perp} r)$  est la fonction de *Bessel* de première espèce, d'ordre  $n$  et d'argument  $\beta_{\perp} r$ ;  $Y_n(\beta_{\perp} r)$  est la fonction de *Bessel* de seconde espèce, d'ordre  $n$  et d'argument  $\beta_{\perp} r$ . Elles apparaissent sur la figure 10.20.

D'une part, il faut que  $n$  ait une valeur entière pour que  $\bar{G}(\cdot)$  soit périodique de période  $2\pi$ . D'autre part, la fonction  $Y_n(\beta_{\perp} r)$  a la propriété de tendre vers l'infini lorsque  $r = 0$ , ce qui n'a pas de sens physique. Il s'ensuit que  $\bar{B}_2 = 0$ . De plus, par souci de simplicité, on choisit l'origine de  $\phi$  pour ne conserver que la variation en  $\cos(n\phi)$ , i.e.  $\bar{A}_2 = 0$ . On pose finalement le produit  $\bar{A}_1 \bar{B}_1 = H_o$ .

Les composantes des champs et les conditions aux limites s'expriment ainsi :

- dans un mode TE :

$$\bar{E}_r = -\frac{j\omega\mu}{\beta_{\perp}^2 r} n H_o \sin(n\phi) J_n(\beta_{\perp} r) e^{-j\beta_z z} = \eta_{gTE} \bar{H}_{\phi} \quad (10.116)$$

$$\bar{E}_{\phi} = \frac{j\omega\mu}{\beta_{\perp}} H_o \cos(n\phi) J'_n(\beta_{\perp} r) e^{-j\beta_z z} = -\eta_{gTE} \bar{H}_r \quad (10.117)$$

$$H_z = H_o \cos(n\phi) J_n(\beta_{\perp} r) e^{-j\beta_z z} \quad (10.118)$$

<sup>9</sup>On trouve que  $\frac{\bar{G}}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{F}}{dr} \right) + \frac{\bar{F}}{r^2} \frac{d^2\bar{G}}{d\phi^2} + \beta_{\perp}^2 \bar{F}\bar{G} = 0$ , soit  $\frac{r}{\bar{F}} \left( \frac{d\bar{F}}{dr} + r \frac{d^2\bar{F}}{dr^2} \right) + \beta_{\perp}^2 r^2 = -\frac{1}{\bar{G}} \frac{d^2\bar{G}}{d\phi^2} = n^2$ .

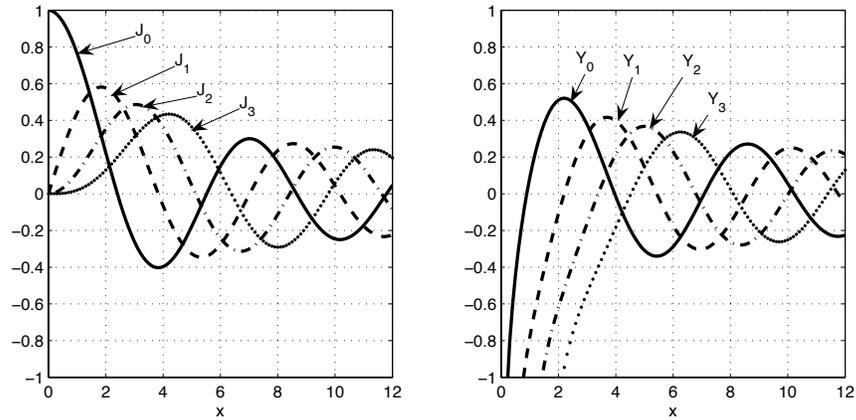


FIGURE 10.20 – Fonctions de *Bessel* de première et seconde espèces.

avec

$$[\bar{E}_\phi]_{r=a} = 0 \implies J'_n(\beta_{\perp nl} a) = 0 .$$

- dans un mode TM :

$$\bar{E}_r = -\frac{j\beta}{\beta_{\perp}} E_o \cos(n\phi) J'_n(\beta_{\perp} r) e^{-j\beta_z z} = \eta_{gTE} \bar{H}_\phi \quad (10.119)$$

$$\bar{E}_\phi = \frac{j\beta}{\beta_{\perp}^2 r} n E_o \sin(n\phi) J_n(\beta_{\perp} r) e^{-j\beta_z z} = -\eta_{gTE} \bar{H}_r \quad (10.120)$$

$$E_z = E_o \cos(n\phi) J_n(\beta_{\perp} r) e^{-j\beta_z z} . \quad (10.121)$$

avec

$$[\bar{E}_\phi]_{r=a} = 0 \implies J_n(\beta_{\perp nl} a) = 0 .$$

Les indices  $n$  et  $l$  servent ici à identifier le mode supérieur de transmission ( $TE_{nl}$  ou  $TM_{nl}$ ) dans le guide d'onde circulaire.

- L'indice  $n$  stipule le nombre demi-période du champ sur une circonférence complète de la section.
- L'indice  $l$  correspond à la  $l$ -ième racine de  $J'_n(\beta_{\perp nl} a)$  (mode TE) ou de  $J_n(\beta_{\perp nl} a)$  (mode TM).

La constante  $\beta_{\perp}$  est déterminée par la  $l$ -ième racine de la dérivée ou de la fonction de *Bessel* d'ordre  $n$ . Dans la littérature, on a créé les variables  $p'_{nl}$  ou  $p_{nl}$  qui donnent directement les racines désirées. Donc :

- dans un mode TE :

$$\beta_{\perp TE_{nl}} = \frac{p'_{nl}}{a} \quad (10.122)$$

- dans le mode TM :

$$\beta_{\perp TM_{nl}} = \frac{p_{nl}}{a} \quad (10.123)$$

### 10.4.2 Paramètres principaux

En substituant l'équation (10.122) ou (10.122) dans<sup>10</sup>

$$\bar{\gamma}_z = \sqrt{\beta_{\perp}^2 - \beta^2}$$

on trouve :

$$\bar{\gamma}_z = \sqrt{\left(\frac{p_{nl}^{(\prime)}}{a}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{v_p}\right)^2} = \alpha + j\beta \quad (10.124)$$

À la fréquence de coupure, on a  $\bar{\gamma}_z = 0$  dans l'équation (10.124) :

$$f_{c_{nl}} = \frac{v_p}{2\pi} \frac{p_{nl}^{(\prime)}}{a} \quad (10.125)$$

$$\lambda_{c_{nl}} = 2\pi \frac{a}{p_{nl}^{(\prime)}} = \frac{v_p}{f_{c_{nl}}} . \quad (10.126)$$

Mode	$p'_{nl}$	$p_{nl}$	$f_{c_{nl}}$	$\lambda_{c_{nl}}$
$TE_{01}$	3.832		$0.610 \frac{v_p}{a}$	$1.64 a$
$TM_{01}$		2.405	$0.3827 \frac{v_p}{a}$	$2.61 a$
$TE_{02}$	7.016		$1.117 \frac{v_p}{a}$	$0.89 a$
$TM_{02}$		5.520	$0.879 \frac{v_p}{a}$	$1.14 a$
$TE_{11}$	1.841		$0.2930 \frac{v_p}{a}$	$3.41 a$
$TM_{11}$		3.832	$0.610 \frac{v_p}{a}$	$1.64 a$
$TE_{12}$	5.331		$0.849 \frac{v_p}{a}$	$1.18 a$
$TM_{12}$		7.016	$1.117 \frac{v_p}{a}$	$0.89 a$
$TE_{21}$	3.054		$0.4861 \frac{v_p}{a}$	$2.06 a$
$TM_{21}$		5.135	$0.817 \frac{v_p}{a}$	$1.22 a$
$TE_{22}$	6.706		$1.067 \frac{v_p}{a}$	$0.94 a$
$TM_{22}$		8.417	$1.340 \frac{v_p}{a}$	$0.75 a$
$TE_{31}$	4.201		$0.669 \frac{v_p}{a}$	$1.49 a$
$TM_{31}$		6.380	$1.015 \frac{v_p}{a}$	$0.98 a$
$TE_{41}$	5.318		$0.846 \frac{v_p}{a}$	$1.18 a$
$TM_{41}$		7.588	$1.208 \frac{v_p}{a}$	$0.83 a$

TABLE 10.1 – Valeurs utiles pour l'indice  $l$  du mode avec guide d'onde circulaire

Le tableau 10.1 permet de trouver rapidement les fréquences ou longueurs d'onde de coupure selon le mode. On voit donc que l'unique paramètre dimensionnel du guide simplifie le travail.

La longueur d'onde guidée  $\lambda_g$  s'exprime de la même manière qu'avec le guide d'onde rectangulaire, à savoir :

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} . \quad (10.127)$$

<sup>10</sup>Voir équation (10.86) ou (10.87).

et de même pour les vitesses de phase dans le guide  $v_{pz}$  ou de groupe  $v_g$  :

$$v_{pz} = \frac{v_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{v_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{10.128}$$

$$v_g = v_p \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = v_p \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} . \tag{10.129}$$

Quant aux modes fondamentaux, ils sont :

- en mode TE : le mode  $TE_{11}$  ;
- en mode TM : le mode  $TM_{01}$ .

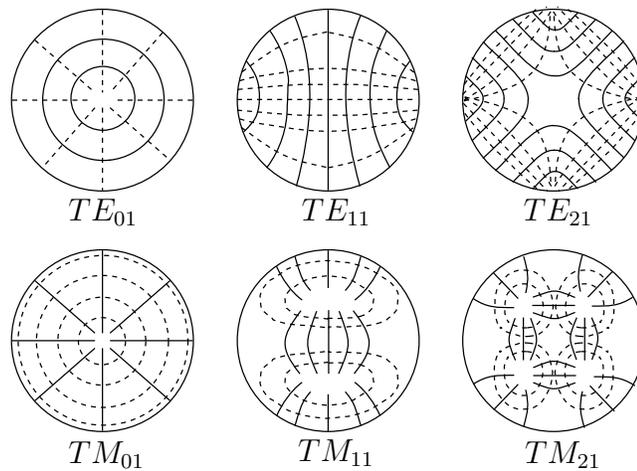


FIGURE 10.21 – Distribution des champs dans un guide circulaire (champ  $E$  : — champ  $H$  : ···)

La figure 10.21 montre la distribution des champs électrique et magnétique pour quelques modes TE et TM dans un guide d'onde circulaire.

**Exemple 10.4**

Les guides d'onde circulaires commerciaux sont codés de la manière suivante : WC-80 pour “Waveguide-Circular-80/100 pouce”. Le chiffre indique approximativement le diamètre interne du guide, soit ici “0.8 pouce”.

Soit un WC-240 dont le diélectrique est de l'air.

- Déterminez la bande passante idéale pour fonctionner en monomode TE.

Le tableau 10.1 indique clairement que le mode  $TE_{11}$  possède la fréquence de coupure la plus basse. Il constitue donc le mode fondamental TE ou TM. Le mode suivant, dans le sens qu'il possède la seconde fréquence de coupure la plus basse, est le mode  $TM_{10}$  (qui devient donc le mode fondamental en TM

seulement); par contre  $TE_{21}$  est le mode TE suivant. Avec l'aide de (10.125) et de  $p_{nl}^{(l)}$  du tableau 10.1, ou avec l'aide directe de  $f_{c_{nl}}$  du même tableau, on obtient ( $a = (2.4)(0.0254)/2 = 0.03048 \text{ m}$ ):

$$\begin{aligned} f_{c_{TE_{11}}} &= \frac{3 \times 10^8}{2\pi} \frac{1.840}{0.03048} = 2.884 \text{ GHz} = 0.2930 \underbrace{\frac{3 \times 10^8}{0.03048}}_{9.8425 \times 10^9} \\ f_{c_{TM_{01}}} &= 0.3827 (9.8425 \times 10^9) = 3.767 \text{ GHz} \\ f_{c_{TE_{21}}} &= 0.4861 (9.8425 \times 10^9) = 4.784 \text{ GHz} \end{aligned}$$

Le guide fonctionne en monomode TE entre les limites suivantes :

$$2.882 \text{ GHz} < f < 4.784 \text{ GHz} .$$

Par souci de sécurité, les données techniques dans les catalogues établissent que le WC-240 est conçu pour la bande 3.31 à 4.54 GHz.

### Exemple 10.5

Un WC-240 est rempli d'un diélectrique de constante  $\epsilon_r = 2.25$ ; il est utilisé pour propager un signal autour de la fréquence porteuse de 3 GHz.

- Pour tous les modes supérieurs pouvant exister, déterminez la longueur d'onde guidée, la vitesse de groupe et l'impédance transverse.

Les fréquences de coupure des différents modes s'obtiennent toujours de (10.125) ou directement du tableau 10.1 :

$$\begin{aligned} f_{c_{TE_{11}}} &= 0.2930 \underbrace{\frac{3 \times 10^8 / \sqrt{2.25}}{0.03048}}_{6.5617 \times 10^9} = 1.922 \text{ GHz} \\ f_{c_{TM_{01}}} &= 0.3827 (6.5617 \times 10^9) = 2.511 \text{ GHz} \\ f_{c_{TE_{21}}} &= 0.4861 (6.5617 \times 10^9) = 3.189 \text{ GHz} \\ f_{c_{TM_{11}}} &= 0.610 (6.5617 \times 10^9) = 4.003 \text{ GHz} = f_{c_{TE_{01}}} . \end{aligned}$$

Seuls les modes  $TE_{11}$  et  $TM_{01}$  sont présents dans le guide. Les autres sont évanescents.

Les équations (10.94), (10.98) – qui sont semblables à (10.127), (10.129) – et (10.100) en mode TE ou (10.110) en mode TM servent pour évaluer les paramètres demandés. On obtient en prenant  $v_p = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$  et  $\eta = 251 \Omega$  :

mode	$\sqrt{1 - (f_c/f)^2}$	$\lambda_{g_m} \text{ (m)}$	$v_{g_m} \text{ (m/s)}$	$\eta_{g_{TE/TM}} \text{ (}\Omega\text{)}$	$\bar{\gamma}$
$TE_{11}$	0.7681	0.0868	$1.53 \times 10^8$	326.8	$j72.4$
$TM_{01}$	0.5472	0.1218	$1.09 \times 10^8$	137.3	$j41.6$
$TE_{21}$	$j0.405$				38.2

## 10.5 Puissance et énergie ( $TE_{10}$ rectangulaire)

### 10.5.1 Puissance transportée

Le vecteur de *Poynting* définit la direction et l'amplitude de la densité de puissance par unité de surface. La puissance propagée s'évalue par l'intégrale du vecteur de *Poynting* sur la surface  $S$  de la section du guide d'onde soit :

$$\langle \mathcal{P}_z \rangle = \int_S \text{Re} \{ \langle \bar{P}_z \rangle \} dS \quad (10.130)$$

Dans le mode  $TE_{10}$ , le vecteur de *Poynting* contient deux termes dont l'un représente la puissance se propageant en  $z$  :

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \bar{E}_y \bar{H}_z^* \mathbf{a}_x - \frac{1}{2} \bar{E}_y \bar{H}_x^* \mathbf{a}_z . \quad (10.131)$$

Le terme en  $\mathbf{a}_x$  identifie la puissance emprisonnée dans le guide. La puissance propagée vaut donc (avec  $E_o = \omega \mu a H_o / \pi$  et  $\eta_{gTE_{10}} = \omega \mu / \beta_{z_{10}}$ ) :

$$\langle \mathcal{P}_z \rangle = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \text{Re} \{ \bar{E}_y \bar{H}_x \} dx dy = \frac{1}{2} \omega \mu \beta_z \frac{a^2}{\pi^2} H_o^2 b \underbrace{\int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx}_{\frac{a}{2}} \quad (10.132)$$

$$= \frac{\omega \mu \beta_z a^3 b H_o^2}{4\pi^2} = \frac{\omega^2 \mu^2 a^2 H_o^2}{\pi^2} \frac{\beta_z ab}{4\omega \mu} \quad (10.133)$$

$$= \frac{E_o^2 ab}{4\eta_g} . \quad (10.134)$$

#### Exemple 10.6

Dans des conditions normales, le champ électrique maximal avant claquage tourne autour de  $29 \text{ kV/cm}$  dans l'air.

Un guide d'onde WR-42 opère entre 16 et  $26.5 \text{ GHz}$  dans le mode fondamental. L'air ambiant agit comme diélectrique.

- Estimez la puissance maximale transportée.

D'abord :

$$E_{o_{max}} = 2.9 \times 10^6 \text{ V/m} .$$

Selon (10.134), on déduit que :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_z \rangle &= \frac{(2.9 \times 10^6)^2 (0.010668) (0.004318)}{4\eta_g} \\ &= 96.85 \times 10^6 / \eta_g . \end{aligned}$$

Aux fréquences limites, on trouve :

$f$ (GHz)	$\eta_g$ ( $\Omega$ )	$\langle \mathcal{P}_z \rangle$ (kW)
16	778.7	124.4
26.5	444.0	218.1

### 10.5.2 Énergie emmagasinée par unité de longueur

L'énergie présente sur une longueur  $d$  d'un guide d'onde se retrouve sous la forme d'énergie moyenne électrique  $\langle W_e \rangle$  et d'énergie moyenne magnétique  $\langle W_m \rangle$  dont leurs expressions respectives peuvent être données par :

$$\langle W_e \rangle = \frac{\epsilon}{4} \iiint_V \bar{E}_y \bar{E}_y^* dv = \frac{\epsilon}{4} \int_0^a \int_0^b \int_{z_0}^{z_0+d} \bar{E}_y \bar{E}_y^* dx dy dz \quad (10.135)$$

$$= \frac{\epsilon \beta^2 \eta^2 a^3 b d H_o^2}{8\pi^2} = \epsilon E_o^2 \frac{abd}{8} \quad (10.136)$$

$$\langle W_m \rangle = \frac{\mu}{4} \iiint_V (\bar{H}_x \bar{H}_x^* + \bar{H}_z \bar{H}_z^*) dv = \frac{\epsilon \beta^2 \eta^2 a^3 b d H_o^2}{8\pi^2} \quad (10.137)$$

Le facteur deux supplémentaire au dénominateur des expressions de  $\langle W_e \rangle$  et  $\langle W_m \rangle$  comparativement à (5.48) provient du moyennage sur une période. Il est intéressant d'observer que les énergie emmagasinées sous une forme et sous l'autre sont égales soit  $\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle$ . L'énergie moyenne emmagasinée dans un guide d'onde par unité de longueur vaut donc :

$$\langle \mathcal{W}_g \rangle = \frac{\langle W_e \rangle + \langle W_m \rangle}{d} = \frac{\epsilon \beta^2 \eta^2 a^3 b H_o^2}{4\pi^2} = \epsilon E_o^2 \frac{ab}{4} \quad (10.138)$$

### 10.5.3 Vitesse de l'énergie

L'énergie emmagasinée n'est pas stationnaire : elle se déplace à une certaine vitesse notée  $v_{en}$  pour l'instant dans le guide. Or, le flux d'énergie par unité de temps est égal à la puissance transportée par l'onde dans le guide, ce qui permet d'écrire la relation suivante :

$$v_{en} = \frac{\langle \mathcal{P}_z \rangle}{\langle \mathcal{W}_g \rangle}. \quad (10.139)$$

D'après (10.134) et (10.138), il est possible d'affirmer que :

$$v_{en} = \frac{1}{\epsilon \eta_g} = \frac{\beta_z}{\omega \mu \epsilon} = \frac{v_p^2}{v_{pz}} = v_g ! \quad (10.140)$$

Cette dernière expression montre que la vitesse de l'énergie et la vitesse de groupe ne font qu'une.

## 10.6 Pertes dans le guide d'onde

L'analyse effectuée jusqu'à présent considérait des pertes nulles, alors qu'en pratique elles sont toujours présentes quoique très faibles – elles ne modifient en presque rien les vitesses et impédances obtenues.

Les pertes sont de deux ordres :

- les pertes dans le conducteur, symbolisées par  $\alpha_c$ , responsables de l'échauffement du conducteur par les courants de surface ( $\sigma_c \neq \infty$ );

- les pertes dans le diélectrique  $\alpha_d$ , introduites par la permittivité complexe  $\bar{\epsilon}$  du matériau dans lequel se trouvent les champs :

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - j \underbrace{\frac{\sigma}{\omega}}_{\epsilon''} .$$

### 10.6.1 Pertes dans le conducteur

On détermine les pertes dans le conducteur en passant par la diminution de puissance transportée par unité de longueur du guide avec un diélectrique parfait pour le moment. Sachant que l'atténuation de la densité de puissance suit la loi  $\langle \mathcal{P}_z \rangle = \mathcal{P}_o e^{-2\alpha z}$ , on tire :

$$\alpha_c = - \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{d\langle \mathcal{P}_z \rangle}{dz} \right)}{\langle \mathcal{P}_z \rangle} \tag{10.141}$$

ou mieux encore

$$\alpha_c = - \frac{1}{2} \frac{\langle \mathcal{P}_p \rangle}{\langle \mathcal{P}_z \rangle} \frac{1}{\Delta z} \tag{10.142}$$

Dans cette équation, le terme  $\langle \mathcal{P}_p \rangle = -\left(\frac{d\langle \mathcal{P}_z \rangle}{dz}\right)\Delta z$  représente les pertes de la puissance transportée sur une longueur  $\Delta z$ . Partant de l'équation des pertes joules bien connue  $\frac{1}{2}RI^2$ , cette dissipation provient :

- de la résistivité surfacique<sup>11</sup>  $\mathbf{r}_s$  :

$$\mathbf{r}_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{10.143}$$

- du courant<sup>12</sup>  $I_z$  circulant à la surface des parois du guide, lequel est déterminé à partir de la densité de courant de surface  $\mathbf{J}_s$ , lui-même déduit en appliquant la condition aux limites :

$$I_z = \int_{\ell} \mathbf{J}_s \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{10.144}$$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H}_{\parallel} \tag{10.145}$$

où  $\ell$  suit le parcours formé par l'intersection de la section et les surfaces internes du guide.

Ainsi, en prenant  $S$  l'ensemble des surfaces internes du guide pour une unité de longueur ( $\Delta z = 1$ ) :

$$\langle \mathcal{P}_p \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{r}_s \int_S \bar{\mathbf{J}}_s \bar{\mathbf{J}}_s^* d\ell dz . \tag{10.146}$$

<sup>11</sup>La résistivité surfacique a été introduite en (7.54) pour le calcul du paramètre distribué  $\mathcal{R}$  d'une ligne de transmission.

<sup>12</sup>On ne s'intéresse qu'aux pertes suivant l'axe  $z$ .

**Exemple 10.7**

Un guide d'onde rectangulaire a une section de largeur  $a$  et de hauteur  $b$ . Le conducteur possède une résistivité surfacique non-nulle  $\mathbf{r}_s$ . Une onde se propage dans le mode  $TE_{10}$ .

- Donnez l'expression de la puissance perdue dans les parois par unité de longueur.

D'après les expressions (10.70) et (10.72) des composantes du champ magnétique pour le mode  $TE_{10}$ , les densités de courant de surface valent :

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_s]_{x=0} &= [\mathbf{J}_s]_{x=a} = -H_o e^{-j\beta_z z} \mathbf{a}_y \\ [\mathbf{J}_s]_{y=0} &= -[\mathbf{J}_s]_{y=b} = H_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{z10} z} \mathbf{a}_x - \beta_z \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{z10} z} \mathbf{a}_z . \end{aligned}$$

Il est donc possible de trouver la valeur de  $\langle \mathcal{P}_p \rangle$  à l'aide de (10.146) :

$$\langle \mathcal{P}_p \rangle = \mathbf{r}_s H_o^2 \left( \int_{z_o}^{z_o+1} \int_0^b dy dz + \int_{z_o}^{z_o+1} \int_0^a \left( \beta_{z10}^2 \frac{a^2}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right) dx dz \right)$$

soit :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_p \rangle &= \mathbf{r}_s H_o^2 \left( b + \frac{a}{2} + \frac{\beta_{z10}^2 a^3}{2\pi^2} \right) \\ &= \mathbf{r}_s H_o^2 \left( b + \frac{2a^3}{\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

puisque  $\beta_{z10}^2 = (2\pi/\lambda)^2 - (\pi/a)^2$ .

- Déduisez l'expression de la constante de pertes du conducteur.

Avec l'aide de (10.133) et de (10.142), on démontre facilement que :

$$\begin{aligned} \alpha_{cTE_{10}} &= \frac{1}{2} \frac{4\pi^2}{\beta \eta a^3 b \beta_{z10} H_o^2} \mathbf{r}_s H_o^2 \left( b + \frac{2a^3}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\lambda \lambda_{g10}}{\eta a^3 b} \mathbf{r}_s \left( b + \frac{2a^3}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\eta a^3 b \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \mathbf{r}_s \frac{2a^3}{\lambda^2} \left( b \frac{\lambda^2}{2a^3} + 1 \right) \\ &= \frac{\mathbf{r}_s}{\eta b \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} [2(b/a) (f_c/f)^2 + 1] . \end{aligned}$$

On doit toutefois utiliser l'égalité suivante  $(f_c/f) = (\lambda/2a)$  valide seulement pour un mode  $TE_{10}$ , pour effectuer le dernier passage.

Pour les autres modes, il faut recommencer la procédure au complet.

Les pertes dans le conducteur  $\alpha_c$  pour chaque mode supérieur dans un guide d'onde

- à section rectangulaire :

$$\alpha_{cTE_{mn}} = \frac{2\tau_s}{\eta b \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left[ \left(1 + (b/a)\right) (f_c/f)^2 + (1 - (f_c/f)^2) \left( \frac{(b/a)((b/a)m^2 + n^2)}{(b/a)^2 m^2 + n^2} \right) \right] \quad (10.147)$$

$$\alpha_{cTE_{m0}} = \frac{\tau_s}{\eta b \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} [1 + 2(b/a) (f_c/f)^2] \quad (10.148)$$

$$\alpha_{cTM_{mn}} = \frac{2R_s}{\eta b \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left[ \frac{m^2 (b/a)^3 + n^2}{m^2 (b/a)^2 + n^2} \right] \quad (10.149)$$

- à section circulaire :

$$\alpha_{cTE_{nl}} = \frac{\tau_s}{\eta a \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left( (f_c/f)^2 + \frac{n^2}{p_{nl}^2 - n^2} \right) \quad (10.150)$$

$$\alpha_{cTM_{nl}} = \frac{\tau_s}{\eta a \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (10.151)$$

On peut vérifier à l'aide de graphiques que les pertes dans le conducteur pour un guide circulaire en mode  $TE_{01}$  décroissent continuellement avec l'augmentation de la fréquence, même si le paramètre  $\tau_s$  augmente. Par contre, pour tous les autres modes, les pertes dans le conducteur passent par un minimum et se mettent ensuite à croître avec la fréquence. C'est pour cela que le mode  $TE_{01}$  est aussi dit à pertes minimales mais non dominant.

### 10.6.2 Pertes dans le diélectrique

En fonction de la permittivité complexe  $\bar{\epsilon}$ , la constante de propagation  $\bar{\gamma}_z$  (voir l'équation (10.46)) dans un guide d'onde s'exprime :

$$\bar{\gamma}_z = \sqrt{\beta_{\perp}^2 - \underbrace{\left(\frac{\omega}{v_p}\right)^2}_{\omega^2 \mu \bar{\epsilon}}} = \alpha_{dz} + j\beta_z . \quad (10.152)$$

La constante de phase  $\beta_z$  demeure sensiblement identique à celle avec un diélectrique parfait si on assume un diélectrique à très faibles pertes ; c'est souvent le cas.

Il est possible de prendre l'approximation binomiale sur (10.152), ce qui donne alors :

$$\bar{\gamma}_z \approx \sqrt{\beta_{\perp}^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \left( 1 + j \frac{\omega^2 \mu \epsilon''}{2} \frac{1}{\beta_{\perp}^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \right) \quad (10.153)$$

où

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - j \underbrace{\frac{\epsilon''}{\omega}} .$$

Ainsi, quel que soit le mode supérieur de transmission employé au-dessus de la fréquence de coupure, les pertes produites par le diélectrique sont :

$$\alpha_{d_z} = \operatorname{Re}\{\bar{\gamma}_z\} = \frac{\omega^2 \mu \epsilon''}{2\sqrt{\beta_{\perp}^2 - \omega^2 \mu \epsilon}} = \frac{\pi f \sqrt{\mu \epsilon} (\epsilon''/\epsilon)}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (10.154)$$

$$= \frac{\alpha_d}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (10.155)$$

où  $\alpha_d$  est la constante d'atténuation d'une onde plane TEM dans le matériau diélectrique à très faibles pertes comme le prouve (5.81).

## 10.7 Cavité résonnante

L'objectif d'une ligne de transmission ou d'un guide d'onde est de transmettre efficacement l'énergie électromagnétique d'un point à un autre.

À l'opposé, un résonateur sert à stocker cette énergie. Aux basses fréquences, la mise en parallèle d'une inductance et d'un condensateur forme un circuit résonnant et l'énergie est emmagasinée en alternance dans le champ électrique de la capacité, puis dans le champ magnétique de l'inductance, à une fréquence d'oscillation  $f_o = 1/\sqrt{LC}$ . Les cavités résonnantes offrent la possibilité d'opérer aux ondes millimétriques ou micro-ondes à des niveaux de puissance relativement élevés.

L'analyse d'une cavité résonnante se réalise très bien en intégrant les concepts de guide d'onde et de ligne de transmission en régime sinusoïdal permanent. En fait, les cavités forment une extension partant du guide à plaques parallèles (un indice), puis au guide fermé sur les côtés (deux indices) et finalement fermé aux extrémités (trois indices).

### 10.7.1 Expressions des champs $TE_{mnp}$

Une boîte fermée conductrice telle celle illustrée à la figure 10.22 est une cavité résonnante typique.

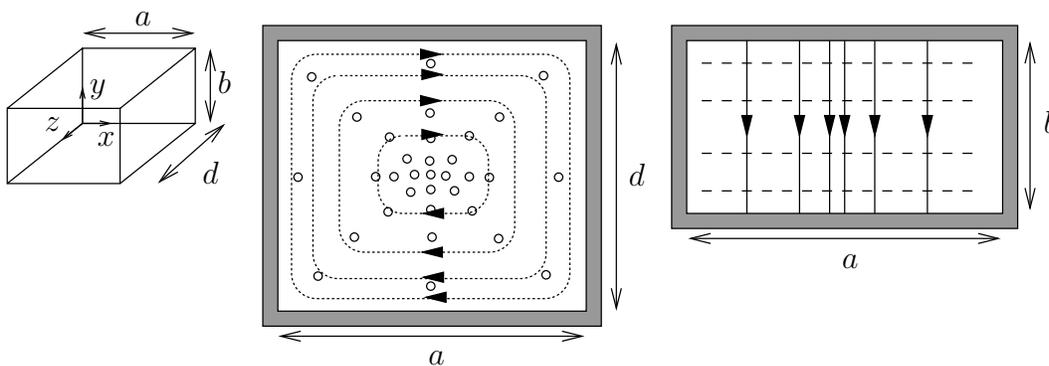


FIGURE 10.22 – Cavité résonnante rectangulaire.

Un guide d'onde terminé par une plaque conductrice est équivalent à une ligne de transmission court-circuitée. Avec des champs variant sinusoïdalement, le court-circuit est

de nouveau observé à une distance  $d$  sur l'axe  $z$  de la plaque conductrice. Cette distance correspond à :

$$d = p \frac{\lambda_g}{2} \quad (10.156)$$

pour un mode donné avec  $p$  entier. Ainsi, une autre plaque placée à cette distance  $d$  ne modifie en rien la distribution des champs car les deux plaques respectent la condition aux limites  $E_{\parallel} = 0$ . Les expressions des champs dans une cavité rectangulaire peuvent donc être tirées directement de celles qui ont été trouvées pour un guide d'onde rectangulaire.

Si la composante longitudinale de champ est  $\bar{H}_z$ , le mode  $TE_{mnp}$  est le seul mode de "propagation" à l'intérieur de la cavité résonnante. L'indice  $p$  définit le nombre de demi-périodes du champ  $\mathbf{E}$  selon l'axe de propagation".

Les expressions des composantes de champ sont :

$$\bar{E}_x = \frac{j\omega\mu}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{n\pi}{b} H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \quad (10.157)$$

$$\bar{E}_y = -\frac{j\omega\mu}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{m\pi}{a} H_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \quad (10.158)$$

$$\bar{E}_z = 0 \quad (10.159)$$

$$\bar{H}_x = -\frac{1}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{m\pi p\pi}{a d} H_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \quad (10.160)$$

$$\bar{H}_y = -\frac{1}{\beta_{\perp mn}^2} \frac{n\pi p\pi}{b d} H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \quad (10.161)$$

$$\bar{H}_z = H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) . \quad (10.162)$$

On remarque qu'un diagramme d'onde stationnaire apparaît car le terme  $e^{-j\beta_z z}$  a disparu.

### 10.7.2 Paramètres principaux

Les deux paramètres importants d'une cavité résonnante sont bien sûr :

- la fréquence de résonance  $f_o$  ;
- le facteur de qualité  $Q$ .

L'obtention de la fréquence de résonance passe par la constante de phase suivant l'axe  $z$ , soit  $\beta_z$ . Il faut absolument que la longueur  $d$  corresponde à un multiple  $p$  de demi-longueur d'onde dans le guide comme indiqué par (10.156). Cela revient à écrire :

$$\beta_z = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{p\pi}{d} = \sqrt{\left(\frac{2\pi f_o}{v_p}\right)^2 - \beta_{\perp mn}^2} \quad (10.163)$$

avec :

$$f_o = \frac{v_p}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2} . \quad (10.164)$$

On peut aussi définir  $\beta_o$  par extension simple de (10.85) d'où :

$$\beta_o = \beta_{\perp mnp} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}. \quad (10.165)$$

Avec cette dernière définition, l'égalité à la fréquence d'oscillation de l'équation (10.163) devient plutôt  $\beta^2 - \beta_o^2 = 0$ .

Quant au facteur de qualité, c'est un peu plus compliqué. Il faut faire appel aux notions de stockage d'énergie  $W_{cav}$  et de puissance perdue  $\mathcal{P}_p$ . L'énergie moyenne est calculée à partir de l'énergie stockée dans les champs électriques uniquement car elle est égale à celle emmagasinée dans le champ magnétique.

Pour le mode  $TE_{101}$ , on trouve :

$$\langle W_{cav} \rangle = 2 \langle W_e \rangle = \frac{\epsilon}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^d E_y^2 dx dy dz \quad (10.166)$$

$$= \frac{\epsilon}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^d E_o^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi z}{d}\right) dx dy dz \quad (10.167)$$

$$= \epsilon E_o^2 \frac{abd}{8} \quad (10.168)$$

où  $E_o$  est l'amplitude maximale du champ électrique dans la cavité.

Pour obtenir une approximation de la puissance perdue, il est nécessaire de connaître les densités de courants de surface sur les parois conductrices de résistivité surfacique  $\mathbf{r}_s$ . Les pertes dans une cavité rectangulaire sont égales à :

$$\langle \mathcal{P}_p \rangle = \frac{\mathbf{r}_s}{2} \left( 2 \int_0^b \int_0^a [H_x]_{z=0}^2 dx dy + 2 \int_0^d \int_0^b [H_z]_{x=0}^2 dy dz + 2 \int_0^d \int_0^a [H_x^2 + H_z^2]_{y=0} dx dz \right) \quad (10.169)$$

soit :

$$\langle \mathcal{P}_p \rangle = \frac{\mathbf{r}_s \lambda^2}{8\eta^2} E_o^2 \left( \frac{ab}{d^2} + \frac{bd}{a^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{d} + \frac{d}{a} \right) \right). \quad (10.170)$$

Le facteur de qualité  $Q$  d'un résonateur étant défini comme :

$$Q = \frac{2\pi f_o \langle W_{cav} \rangle}{\langle \mathcal{P}_p \rangle} \quad (10.171)$$

il en découle que :

$$Q = \frac{\pi\eta}{4\mathbf{r}_s} \left( \frac{2b(a^2 + d^2)^{3/2}}{ad(a^2 + d^2) + 2b(a^3 + d^3)} \right). \quad (10.172)$$

**Exemple 10.8**

Soit un résonateur cubique dont les parois sont faites en cuivre ( $\sigma_c = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ). Le résonateur est rempli d'air.

- Donnez les dimensions du plus petit cube qui résonne à 10 GHz.

Si on se fie à (10.164), le mode à plus basse fréquence de résonance est celui avec les indices les plus petits. Or, on ne peut avoir qu'un indice à 0. Pour un cube le mode  $TE_{011}$  ou  $TE_{101}$  ou  $TE_{110}$  remplit la condition, d'où :

$$f_o = 1.5 \times 10^8 \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{d}\right)^2} = 1.5 \times 10^8 \sqrt{2} \frac{1}{a}$$

puisque  $a = b = d$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} a &= \frac{(1.4142)(1.5 \times 10^8)}{10 \times 10^9} \\ &= 0.0212 \text{ m} = 2.12 \text{ cm} . \end{aligned}$$

- Déterminez le facteur de qualité  $Q$  d'un tel résonateur.

L'équation (10.172) se réduit à :

$$Q_{cube} = \frac{\sqrt{2}\pi \eta_o}{6 \tau_s} = 0.742 \frac{377}{\tau_s}$$

Il suffit d'estimer la résistivité surfacique du cuivre et le tour est joué. Selon (10.143), on a :

$$\tau_s = \sqrt{\frac{(\pi)(4\pi \times 10^{-7})}{5.8 \times 10^7}} \sqrt{10 \times 10^9} \approx 0.0261 \Omega .$$

Le facteur de qualité vaut :

$$Q = 10730 !$$

ce qui est nettement supérieur au facteur de qualité des meilleurs circuits  $LC$  aux basses fréquences.

- Estimez maintenant la largeur de bande à 3 dB, notée  $B$ , d'un tel résonateur.

On sait que le coefficient de qualité est directement lié à  $B$  selon :

$$\frac{B}{f_o} \approx \frac{1}{Q} \tag{10.173}$$

On a alors :

$$B \approx \frac{10 \times 10^9}{10730} \approx 1 \text{ MHz}$$

seulement !

## Exercices

### Question 1

Des plaques parallèles ont une largeur de  $4\text{ cm}$  et sont distantes l'une de l'autre par  $3\text{ cm}$  d'air.

Calculez l'angle de propagation  $\theta$  des ondes TEM qui zigzaguent entre les plaques et la longueur d'onde guidée  $\lambda_g$  pour les cas suivants :

- a)  $f = 6\text{ GHz}$ , mode  $TE_1$  ;
- b)  $f = 15\text{ GHz}$ , mode  $TE_1$  ;
- c)  $f = 15\text{ GHz}$ , mode  $TE_2$  ;

### Question 2

Déterminez les fréquences de coupure d'une onde circulant dans les modes  $TE_1$ ,  $TE_2$ ,  $TE_3$  et  $TM_1$  et  $TM_2$  entre deux plaques conducteurs espacées de  $1.5\text{ cm}$ , si l'isolant entre les plaques est :

- a) l'air ;
- b) un diélectrique de verre ( $\epsilon_r = 4$ ).

### Question 3

Évaluez l'angle  $\theta$  des ondes TEM entre deux plaques parallèles espacées de  $1.5\text{ cm}$  par du verre ( $\epsilon_r = 4$ ) en mode  $TM_1$  aux fréquences de :

- a)  $5\text{ GHz}$  ;
- b)  $10\text{ GHz}$  ;
- c)  $30\text{ GHz}$ .

### Question 4

Pour un guide à plaques parallèles espacées de  $3\text{ cm}$  avec diélectrique non-magnétique de constante  $\epsilon_r = 6.25$ , déterminez l'impédance transverse pour les modes  $TE_1$  et  $TM_1$  à la fréquence de  $3\text{ GHz}$ .

### Question 5

Déterminez les fréquences de coupure d'une onde circulant dans un guide rectangulaire aux dimensions internes de  $3\text{ cm}$  par  $1.5\text{ cm}$  dans les modes  $TE_{10}$ ,  $TE_{20}$ ,  $TE_{11}$ ,  $TE_{12}$ ,  $TE_{21}$ ,  $TE_{22}$  et  $TM_{11}$ ,  $TM_{22}$ , si l'isolant dans le guide est :

- a) l'air ;

- b) un diélectrique de verre  $\epsilon_r = 4$ .

### Question 6

Considérez un guide d'onde rectangulaire à air dont les dimensions internes sont de  $6\text{ cm}$  par  $3\text{ cm}$ . Si le mode  $TE_{10}$  est excité à la fréquence de  $4\text{ GHz}$ , déterminez :

- a) la longueur d'onde dans le guide ;
- b) la fréquence de coupure de ce mode ;
- c) l'expression du champs  $E_y$  sous la forme  $E_o \sin(k_1 x) e^{k_2 z}$  ;
- d) la vitesse de phase.

Pour (e) et (f), le guide est rempli d'une substance dont la constante diélectrique vaut  $\epsilon_r = 2.56$  :

- e) déterminez la nouvelle fréquence de coupure de quelques modes ;
- f) concluez pour le cas d'une onde à  $4\text{ GHz}$ .

### Question 7

Un guide d'onde rectangulaire de  $5\text{ cm}$  par  $2.5\text{ cm}$  a un diélectrique de constante  $\epsilon_r = 2.25$  non-magnétique. Pour tous les modes pouvant se propager à la fréquence de  $5\text{ GHz}$ , trouvez :

- a) la constante de phase  $\beta_z$  ;
- b) la longueur d'onde guidée ;
- c) la vitesse de phase ;
- d) l'impédance transverse.

### Question 8

Deux guides d'onde de mêmes dimensions  $4\text{ cm}$  par  $2\text{ cm}$  sont placés bout à bout. L'un (#1) est rempli d'air tandis que l'autre (#2) a un diélectrique de constante  $\epsilon_{r2}$ . Dans le mode fondamental partout, une onde de  $10\text{ GHz}$  dans le #1 est incidente sur le #2. Évaluez le pourcentage de puissance réfléchi si le diélectrique du #2 diminue :

- a) la vitesse de propagation  $v_p$  par un facteur 3 ;
- b) la vitesse de phase  $v_{pz}$  en mode fondamental par un facteur 3.

### Question 9

Évaluez l'atténuation en  $Np/m$  des ondes évanescentes à  $f = 10\text{ GHz}$  dans un guide d'onde rectangulaire à air de  $2\text{ cm}$  par  $1.2\text{ cm}$  pour les modes :

- a)  $TE_{01}$  ;  
 b)  $TE_{20}$ .

### Question 10

Trouvez la gamme des dimensions possibles  $a$  et  $b$  d'un guide d'onde rectangulaire à air qui fonctionne en monomode à  $f = 6 \text{ GHz}$  avec un facteur de sécurité de 20% :  
 -au dessus de la fréquence de coupure du mode fondamental ( $f_{min} = 1.20f_{c_{10}}$ ) ;  
 -en dessous de la fréquence de coupure du mode suivant ( $f_{max} = 0.8f_{c_{20/01}}$ ).

### Question 11

Soit un guide d'onde circulaire à air capable de propager une onde dans le mode  $TE_{11}$  à  $6 \text{ GHz}$ . Si le facteur de sécurité de la fréquence de coupure est de 20%, déterminez :

- a) la dimension du rayon intérieur du guide ;  
 b) la longueur d'onde dans le guide pour ce mode.

### Question 12

Soit un guide d'onde rectangulaire de  $1.5 \text{ cm}$  par  $0.6 \text{ cm}$  fait de laiton  $\sigma_c = 1.57 \times 10^7 \text{ S/m}$ , rempli par du polyéthylène ( $\epsilon_r = 2.25$ ,  $\mu = \mu_o$ ,  $\epsilon''/\epsilon = 4 \times 10^{-4}$ ). Pour une onde  $TE_{10}$  à  $10 \text{ GHz}$ , calculez l'atténuation en  $\text{dB/m}$  due :

- a) au conducteur ( $\alpha_c$ ) ;  
 b) au diélectrique ( $\alpha_{dz}$ ).

*Note : prenez  $\mathcal{R}_s = \sqrt{\pi\mu/\sigma}\sqrt{f}$ .*

### Question 13

Trouvez la puissance maximale qui peut être transportée à  $6 \text{ GHz}$  dans le mode  $TE_{10}$  dans un guide d'onde de  $4 \text{ cm}$  par  $2 \text{ cm}$  rempli d'air, si le niveau du champ maximal dans cet air avant claquage est de  $2 \times 10^6 \text{ V/m}$ .

### Question 14

Une cavité rectangulaire est remplie d'air. Elle présente les fréquences d'oscillation suivantes :

- $f_o = 3\sqrt{5} \text{ GHz}$  en mode  $TE_{101}$  ;
- $f_o = 3\sqrt{26} \text{ GHz}$  en mode  $TE_{011}$  ;
- $f_o = 3\sqrt{30} \text{ GHz}$  en mode  $TM_{111}$ .

Trouvez les dimensions  $a$ ,  $b$  et  $d$  suivant chacun des axes respectifs.

**Réponses :**

1. a)  $\theta = 56.4^\circ$ ,  $\lambda_g = 9.05 \text{ cm}$ ; b)  $\theta = 19.5^\circ$ ,  $\lambda_g = 2.12 \text{ cm}$ ;  
c)  $\theta = 41.8^\circ$ ,  $\lambda_g = 2.68 \text{ cm}$ .
2.  $f_c$  identiques en modes  $TE_n$  et  $TM_n$   
a)  $(f_c)_{n=1} = 10 \text{ GHz}$ ;  $(f_c)_{n=2} = 20 \text{ GHz}$ ;  $(f_c)_{n=3} = 30 \text{ GHz}$   
b)  $(f_c)_{n=1} = 5 \text{ GHz}$ ;  $(f_c)_{n=2} = 10 \text{ GHz}$ ;  $(f_c)_{n=3} = 15 \text{ GHz}$
3. a)  $\theta = 90^\circ$ ; b)  $\theta = 30^\circ$ ; c)  $\theta = 9.6^\circ$ .
4.  $\eta_{gTE_1} = 202.3 \Omega$ ,  $\eta_{gTM_1} = 112.4 \Omega$ .
5. a)  $(f_c)_{TE_{10}} = 5 \text{ GHz}$ ;  $(f_c)_{TE_{20}} = 10 \text{ GHz}$ ;  $(f_c)_{TE_{12}} = 20.62 \text{ GHz}$ ;  
 $(f_c)_{TE_{21}} = 14.14 \text{ GHz}$ ;  $(f_c)_{TE_{11}, TM_{11}} = 11.18 \text{ GHz}$ ;  $(f_c)_{TE_{22}, TM_{22}} = 22.36 \text{ GHz}$ ;  
b) moitié de celles obtenues en (a).
6. a)  $\lambda_g = 9.6 \text{ cm}$ ; b)  $f_c = 2.5 \text{ GHz}$ ; c)  $\vec{E}_y = E_o \sin(52.4x)e^{-j65.4z}$ ;  
d)  $v_{p_z} = 3.8 \times 10^8 \text{ m/s}$ ;  
e)  $(f_c)_{TE_{10}} = 1.563 \text{ GHz}$ ,  $(f_c)_{TE_{20}} = 3.125 \text{ GHz}$ ,  $(f_c)_{TE_{11}} = 3.494 \text{ GHz} \dots$   
f) le mode  $TE_{10}$  n'est plus le seul mode possible.
7.

mode	$f_c/f$	$\beta_z \text{ (rad/m)}$	$\lambda_g \text{ (cm)}$	$v_{p_z} \text{ (m/s)}$	$\eta_g \text{ (}\Omega\text{)}$
$TE_{1,0}$	2/5	143.97	4.36	$2.18 \times 10^8$	274.22
$TE_{0,1}$	4/5	94.25	6.67	$3.33 \times 10^8$	418.88
$TE_{2,0}$					
$TE_{1,1}$	$2/\sqrt{5}$	70.25	8.94	$4.47 \times 10^8$	562.00
$TM_{1,1}$	$2/\sqrt{5}$	70.25	8.94	$4.47 \times 10^8$	112.40
8. mode  $TE_{10}$ ,  $\eta_{g1} = 406.7 \Omega$   
a)  $\eta_{g2} = 126.7 \Omega$ ,  $\langle \mathcal{P}_r \rangle = 27.6\%$  de  $\langle \mathcal{P}_i \rangle$ ; b)  $\langle \mathcal{P}_r \rangle = 25\%$  de  $\langle \mathcal{P}_i \rangle$
9.  $(\alpha)_{TE_{01}} = 157.08 \text{ Np/m}$ ;  $(\alpha)_{TE_{20}} = 234.16 \text{ Np/m}$ .
10.  $3.13 \text{ cm} \leq a \leq 4.17 \text{ cm}$ ,  $b \leq 2.08 \text{ cm}$ .
11. a)  $a = 1.76 \text{ cm}$ ; b)  $(\lambda_g)_{TE_{11}} = 9.04 \text{ cm}$ .
12. a)  $R_s = 0.05 \Omega$ ,  $\alpha_c = 0.524 \text{ dB/m}$   
b)  $\alpha_{d_z} = 0.73 \text{ dB/m}$ .
13.  $\langle \mathcal{P}_z \rangle = 1.65 \text{ MW}$ .
14.  $a = 2.5 \text{ cm}$ ,  $b = 1 \text{ cm}$ ,  $d = 5 \text{ cm}$ .

# Chapitre 11

## Antennes - introduction

### 11.1 Introduction

Les antennes servent pour communiquer sur de grandes distances, car les communications sur petites distances sont moins coûteuses avec l'emploi de câbles ou de guides d'onde. Aujourd'hui cependant, on communique par voie hertzienne entre une station de base et une station mobile très rapprochées e.g. à l'intérieur d'une même pièce pour éviter le filage.

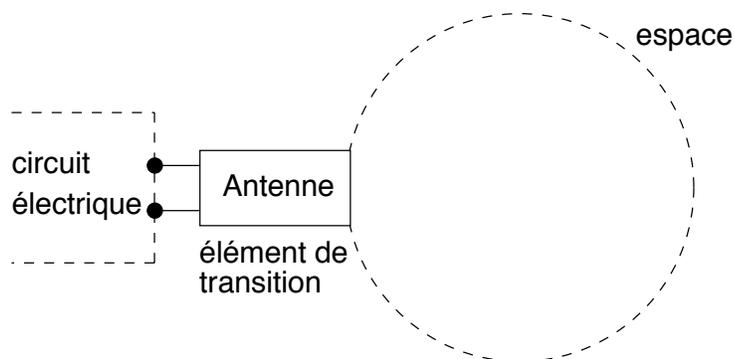


FIGURE 11.1 – Représentation schématiques de l'antenne.

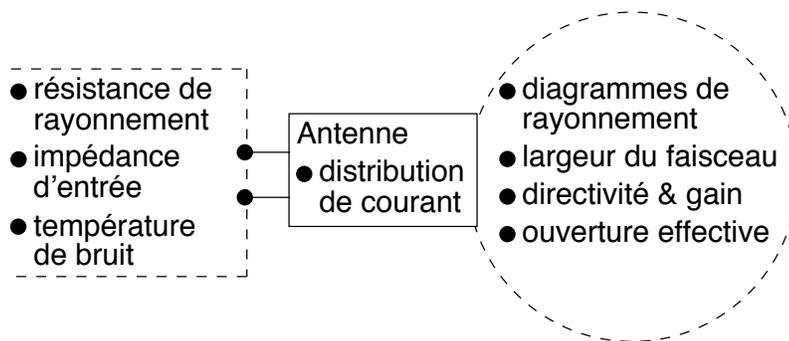


FIGURE 11.2 – Paramètres schématiques de l'antenne.

Les figures 11.1 et 11.2 montrent le rôle d'une antenne comme élément de transition

entre le circuit électrique et l'espace environnant. En effet, l'antenne, du point de vue électrique, est représentée par une simple impédance complexe dont la partie réelle inclue une composante reliée à la puissance émise dans l'espace. La figure 11.2 dresse aussi la liste des paramètres importants d'une antenne. On reconnaît principalement la résistance de rayonnement, les diagrammes de rayonnement, la directivité et le gain, et l'ouverture effective.

La connaissance des paramètres des antennes demeure essentielle pour bien comprendre les qualités d'une antenne. Certaines antennes ont des caractéristiques qui les rendent intéressantes pour certaines applications mais absolument inappropriées pour d'autres. C'est pourquoi, on se limitera à la connaissance des paramètres d'antenne en guise d'introduction au rayonnement.

Une antenne est un élément passif permettant le transfert de l'énergie électrique (au sens large) vers l'énergie électromagnétique ou vice-versa.

- L'antenne émettrice tire sa puissance de l'émetteur qui l'alimente, étant vue comme une charge.
- L'antenne réceptrice fournit la puissance captée au récepteur, agissant comme une source avec sa propre impédance interne.

En théorie cependant, on préfère supposer une source courant à l'émission et une source tension à la réception, même si émission et réception sont liées à des phénomènes semblables au point de vue antenne selon le théorème de réciprocité (qui sera discuté plus loin).

En vertu du théorème de réciprocité, on choisit la configuration émettrice ou réceptrice de l'antenne qui facilite la compréhension et/ou les calculs.

## 11.2 Impédance

Pour évaluer l'impédance d'une antenne, on assume une antenne en émission. L'antenne est alors considérée comme une charge à l'entrée de laquelle existe un courant  $\bar{I}_{in}$  et une tension  $\bar{V}_{in}$ . Le rapport de ces deux quantités fournit l'impédance  $\bar{Z}_{in}$  (ou mieux encore,  $\bar{Z}_a$ ) :

$$\bar{Z}_a = \frac{\bar{V}_{in}}{\bar{I}_{in}} = R_a + jX_a \quad (11.1)$$

On considère simplement l'antenne comme un circuit électrique ayant cette même impédance lors des calculs de transfert de puissance.

Cela semble facile mais l'impédance que présentent les antennes est une fonction complexe et ce, même pour les structures les plus simples. Comme toute impédance, celle de l'antenne comprend une partie réelle  $R_a$  (active) et une partie imaginaire  $X_a$  (réactive) telles que :

- la partie réactive est due aux champs d'induction au voisinage de l'antenne ; elle est capacitive pour les antennes électriquement courtes – un peu comme l'impédance

vue près d'un circuit ouvert en régime sinusoïdal permanent – autrement, elle est inductive ou capacitive ;

- la partie active est reliée aux champs rayonnés et aux pertes joules.

### 11.2.1 Résistance de rayonnement

Pour les antennes, la puissance totale émise  $\langle \mathcal{P}_t \rangle$  est reliée au courant crête  $\bar{I}_{in}$  mesuré à l'entrée de l'antenne via la résistance de rayonnement vue à l'entrée  $R_{ri}$  qui n'est pas une résistance dissipative physique :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{1}{2} R_{ri} I_{in}^2. \quad (11.2)$$

Cette résistance s'ajoute à celle des pertes joules (ou pertes en général) pour former la partie réelle de l'impédance de l'antenne :

$$R_a = R_{ri} + R_{pertes}. \quad (11.3)$$

$R_{pertes}$  est la résistance qui provoque :

- les pertes ohmiques ou thermiques  $R_{ohm}$  ;
- les pertes dans le diélectrique  $R_{die}$  ;
- les pertes de retour (conductivité du sol) pour les monopôles  $R_{sol}$ .

La résistance  $R_{ri}$  est la responsable du rayonnement de l'antenne, car sans elle aucune puissance active fournie à l'antenne n'est émise. On a donc intérêt à l'avoir la plus élevée possible pour accroître l'importance des champs rayonnés.

Le symbole  $R_r$  est réservé à la résistance de rayonnement, laquelle est calculée à partir de l'amplitude maximale de la distribution du courant sur l'antenne :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{1}{2} R_r I_{max}^2. \quad (11.4)$$

Si l'amplitude maximale se situe au niveau des bornes, alors  $R_r = R_{ri}$ .

#### Exemple 11.1

Un dipôle est formé de deux fils opposés se connectant sur chacun des conducteurs d'une ligne de transmission. La résistance de rayonnement à l'entrée d'un dipôle court de longueur totale  $h$  (au sens électrique i.e.  $h \ll \lambda$ ) s'exprime ainsi :

$$R_{rid-court} \approx 20\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2.$$

Cependant, lorsque le dipôle atteint une longueur totale de  $\lambda/2$  – appelé dipôle demi-onde – la résistance de rayonnement à l'entrée vaut environ  $75 \Omega$ .

Un dipôle d'une longueur de  $1.5 \text{ m}$  émet une puissance totale de  $1 \text{ W}$ .

- Estimez l'amplitude du courant d'entrée aux fréquences de 100 MHz (FM commercial) et 1 MHz (AM commercial).

La puissance émise dépend du courant à l'entrée et de la résistance de rayonnement à l'entrée selon (11.2) :

$$I_{in} = \sqrt{\frac{\langle 2\mathcal{P}_t \rangle}{R_{ri}}}$$

Il faut donc évaluer  $R_{ri}$  avant toute chose. Or, pour un dipôle, il faut connaître le rapport  $h/\lambda$  :

$$\begin{aligned} (h/\lambda)_{100\text{ MHz}} &= (1.5/3) = 0.5 \\ (h/\lambda)_{1\text{ MHz}} &= (1.5/300) = 0.005 \end{aligned}$$

Le dipôle correspond à un dipôle demi-onde à 100 MHz :

$$(I_{in})_{100\text{ MHz}} = \sqrt{2/75} = 0.1633\text{ A}$$

Par contre, le dipôle correspond à un dipôle court à 1 MHz :

$$\begin{aligned} (R_{ri})_{1\text{ MHz}} &= 20\pi^2(0.005)^2 = 4.935 \times 10^{-3}\ \Omega \\ (I_{in})_{1\text{ MHz}} &= \sqrt{2/4.935 \times 10^{-3}} = 20.13\text{ A} ! \end{aligned}$$

### 11.2.2 Circuit avec antenne

Pour permettre un transfert maximal de puissance, on adapte l'émetteur ou le récepteur selon la configuration émettrice ou réceptrice respectivement à la fréquence centrale d'opération  $f_c$ . La figure 11.3 montre le circuit équivalent de la source ou récepteur adapté à l'antenne. La syntonisation consiste simplement à l'ajustement d'un circuit d'adaptation jusqu'à ce qu'il forme un circuit résonnant avec  $\bar{Z}_a$  à la fréquence  $f_c$ . Pour ce faire, il faut que l'impédance d'entrée de l'antenne soit égale au conjugué de celle de l'émetteur/récepteur avec circuit d'adaptation telle que vue aux bornes de l'antenne.

Ainsi :

- les parties réelles de l'antenne et du circuit complet émetteur/récepteur/adaptation sont identiques ;
- la partie imaginaire de  $\bar{Z}_a$  est ajustée pour annuler celle de sortie de l'émetteur/récepteur avec circuit d'adaptation à la fréquence d'opération.

On note que pour un système adapté, la tension crête au récepteur  $V_r$  vaut la moitié de celle induite avec circuit ouvert  $V_{co}$ , soit celle mesurée aux bornes de l'antenne réceptrice non reliée à un récepteur. En conséquence, lorsque les pertes sont négligeables, la puissance reçue  $\langle \mathcal{P}_r \rangle$  s'exprime :

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{V_{co}^2}{8R_{ri}} \tag{11.5}$$

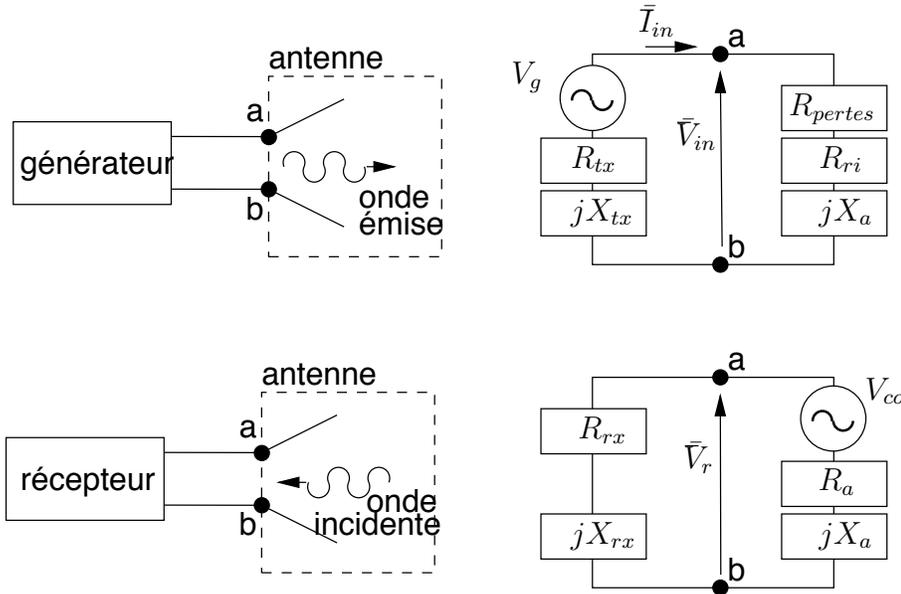


FIGURE 11.3 – Circuit équivalent émission ou réception.

### 11.2.3 Efficacité de rayonnement

Comme dans tout circuit à pertes, une fraction plus ou moins appréciable de la puissance fournie se retrouve à la sortie. Dans le cas d'une antenne, la sortie représente l'émission ; les pertes sont liées à la résistance de pertes. Plus faible est la résistance de pertes, meilleure est l'efficacité. L'efficacité de rayonnement de l'antenne qu'on note par  $\epsilon_r$  considère le rapport de la puissance rayonnée  $\langle \mathcal{P}_t \rangle$  à la puissance fournie à l'entrée de l'antenne  $\langle \mathcal{P}_{in} \rangle$  :

$$\epsilon_r = \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_{in} \rangle} = \frac{R_{ri}}{R_{ri} + R_{pertes}} \quad (11.6)$$

## 11.3 Intensité de rayonnement

L'onde électromagnétique rayonnée à distance suffisante de l'antenne se comporte comme une onde plane i.e. le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation de l'onde (celle-ci s'éloigne de l'antenne qui en est la source). Les concepts de l'onde plane peuvent donc être appliqués ici.

Or, on sait que le vecteur de *Poynting* moyen  $\langle \mathbf{P} \rangle$  indique la quantité de puissance électromagnétique qui se propage par unité de surface (le vecteur de *Poynting*  $\mathbf{P}$  donne plutôt la densité de puissance instantanée). Comme l'antenne a la propriété de concentrer la puissance émise dans une ou des directions privilégiées de manière similaire à une lentille, cette densité de puissance obtenue du vecteur de *Poynting* moyen varie selon la direction. Dans un système de coordonnées sphériques, on dit  $\langle \mathbf{P} \rangle = \langle \mathbf{P}(r, \theta, \phi) \rangle$ , donc  $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}(r, \theta, \phi)$ .

Dans un milieu uniforme, la vitesse de propagation est indépendante de la direction. Ainsi, l'onde électromagnétique rayonnée par une antenne possède des fronts d'ondes sphériques centrés sur l'antenne émettrice (le rayon de la sphère correspondant à un front

d'onde particulier correspond à la vitesse de propagation multipliée par le temps depuis son émission par l'antenne). La figure 11.4 illustre un front d'onde issu de l'antenne. Ce front s'éloigne avec une vitesse uniforme de l'antenne ce qui fait que le rayon de la sphère croît avec le temps. Il ne faut pas oublier que l'intégrale du vecteur de *Poynting* moyen sur une surface fermée donne la puissance émanant du volume délimité par la surface en supposant aucune perte dans le milieu de propagation. La densité de puissance, quant à elle, diminuera donc selon l'inverse de la surface de la sphère soit en  $1/r^2$ .

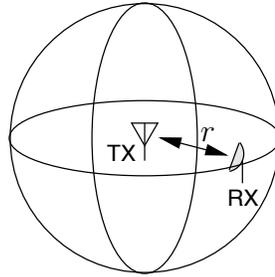


FIGURE 11.4 – Émission en espace libre.

La distance  $r$  à laquelle sont effectuées les mesures est donc un paramètre qui influence la valeur de  $\langle \mathbf{P}(r) \rangle$ . Pour obtenir une quantité indépendante de la distance, on utilise le concept d'angle solide dont les unités sont les stéradians ou *srad*. L'angle solide  $\Omega$  est formé par le rapport de la surface  $S$  sur une sphère sous-tendue par l'angle solide au rayon au carré de cette sphère (11.5) :

$$\Omega = \frac{S}{r^2}. \tag{11.7}$$

Il y a donc  $4\pi$  surfaces de  $r^2$  mètres carrés dans une sphère de rayon  $r$ , donc  $4\pi$  *srad* pour l'angle solide de la sphère complète,  $2\pi$  *srad* pour l'hémisphère, etc.

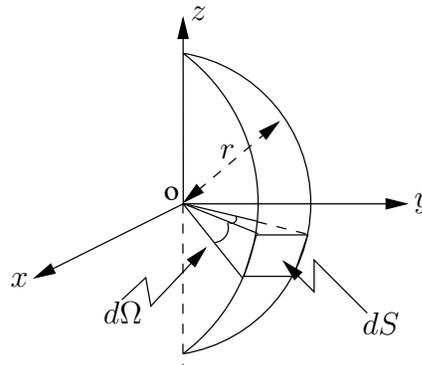


FIGURE 11.5 – Définition de l'angle solide.

On définit alors l'intensité de rayonnement  $K$  en  $W/srad$ , laquelle est indépendante de  $r$  mais varie selon la direction  $(\theta, \phi)$  donnée :

$$K(\theta, \phi) = \langle P(r, \theta, \phi) \rangle r^2 = \frac{E^2(r, \theta, \phi)}{2\eta_0} r^2 = \frac{E_\theta^2(r, \theta, \phi) + E_\phi^2(r, \theta, \phi)}{2\eta_0} r^2. \tag{11.8}$$

Il est possible d'obtenir la puissance totale émise  $\langle \mathcal{P}_t \rangle$  en intégrant  $K(\theta, \phi)$  sur les  $4\pi$  *srad*. Cela découle directement de l'intégrale du produit scalaire de la densité de puissance sur une surface fermée; en choisissant une sphère, on maximise le produit scalaire en tout point, car  $\langle \mathbf{P} \rangle = \langle P_r \rangle \mathbf{a}_r$  et  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{a}_r$ . Donc :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \int_S \langle \mathbf{P}(r, \theta, \phi) \rangle \cdot d\mathbf{S} = \int_S \langle P(r, \theta, \phi) \rangle dS \quad (11.9)$$

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi .$$

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \int_{\Omega} K(\theta, \phi) d\Omega \quad (11.10)$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi .$$

### 11.4 Diagramme de rayonnement

Si l'antenne apparaît comme un circuit passif à deux bornes ayant une impédance d'entrée, elle est caractérisée dans l'espace par les diagrammes de rayonnement impliquant les champs électromagnétiques rayonnés.

Les diagrammes de rayonnement montrent en coordonnées tridimensionnelles la variation des champs ou celle de la densité de puissance à une distance fixe  $r$  dans les directions  $(\theta, \phi)$ . Cela revient à tracer la variation de l'intensité de rayonnement. Ainsi, les diagrammes sont et doivent être indépendants de la distance, mais ils dépendent uniquement de la direction  $(\theta, \phi)$  appelée direction d'observation.

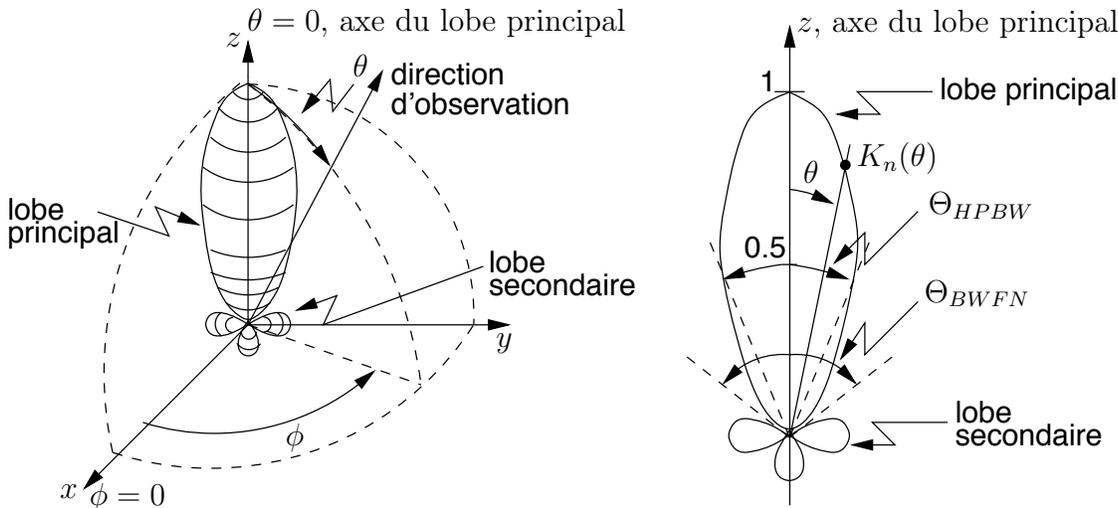


FIGURE 11.6 – Diagramme de rayonnement typique.

Pour complètement spécifier le rayonnement, il faudrait théoriquement les trois diagrammes suivants :

- la composante  $\theta$  du champ électrique à une distance fixe  $r$ ,  $E_\theta(r, \theta, \phi)$  ;

- la composante  $\phi$  du champ électrique à une distance fixe  $r$ ,  $E_\phi(r, \theta, \phi)$  ;
- la phase de ces composantes à cette distance fixe  $r$ ,  $\angle \bar{E}_\theta(r, \theta, \phi)$  et  $\angle \bar{E}_\phi(r, \theta, \phi)$ .

Sans tenir compte de la polarisation, on n'utilise que celui représentant le module du champ électrique total assimilant le champ électrique à une quantité scalaire. L'échelle peut alors être linéaire (en  $V/m$ ) ou logarithmique (en  $dB$ ). Cependant, il est commode de tracer le diagramme après normalisation, ce qui est appelé fonction caractéristique de rayonnement de l'antenne  $F_a(\theta, \phi)$ <sup>1</sup>. Cette fonction, obtenue en divisant  $E(\theta, \phi)$  par sa valeur maximale, ne fait intervenir que les variables angulaires. Ainsi le diagramme de la fonction caractéristique en  $dB$ , devient équivalent à celui de l'intensité de rayonnement normalisée  $K_n(\theta, \phi)$  aussi exprimée en  $dB$ , avec :

$$F_a(\theta, \phi) = \frac{E(r, \theta, \phi)}{E_{max}(r)} \tag{11.11}$$

$$K_n(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_{max}}. \tag{11.12}$$

Cette équivalence provient de la relation  $K_n = F_a^2$  tirée de (11.8), en plus de la conversion en  $dB$  de la fonction caractéristique ( $20 \log F_a$ ) et de l'intensité de rayonnement normalisée ( $10 \log K_n$ ).

De plus, les diagrammes de rayonnement exhibent souvent un lobe principal (maximum de rayonnement) ou faisceau avec des lobes secondaires comme on le remarque sur la figure 11.6. On définit alors la largeur du lobe principal entre les premiers nuls de chaque côté ( $\Theta_{i_{BWFN}}$ ) ou, ce qui est plus fréquent, à  $3 dB$  ( $\Theta_{i_{HPBW}}$ ).

Les deux plans ( $i = 1, 2$ ) d'intérêts choisis pour tracer les diagrammes en 2D sont orthogonaux – comme les champs électromagnétiques – et coupent, autant que possible, le lobe principal. Ce sont :

- le plan  $H$  ;
- le plan  $E$  ;

ainsi appelés à cause de l'orientation des champs respectifs. Par exemple, le plan  $E$  correspond à ( $\phi = 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ) ; et le plan  $H$ , à ( $\theta = \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi$ ) si les composantes sont  $E_\theta$  et  $H_\phi$  et que le faisceau pointe dans la direction de l'axe  $x$ .

**Exemple 11.2**

Une antenne émet un signal d'une puissance totale de  $5 W$ . On mesure une densité de puissance qui suit l'expression suivante :

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \begin{cases} k \frac{\cos(\theta)}{r^2} W/m^2 & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

<sup>1</sup>On notera  $f_a(\theta, \phi)$  la fonction caractéristique de rayonnement qui n'est pas forcément normalisée.

- Donnez la valeur de  $k$  qui convient.
- 

Il faut que (11.9) soit respecté :

$$\begin{aligned}
 5 &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} k \frac{\cos(\theta)}{r^2} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \\
 &= 2\pi k \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \\
 &= 2\pi k \left[ \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \pi k
 \end{aligned}$$

d'où

$$k = 5/\pi .$$

- Exprimez l'intensité de rayonnement normalisée et la fonction caractéristique de cette antenne.
- 

De (11.8) et (11.12), on a simplement :

$$K_n(\theta, \phi) = \begin{cases} \cos(\theta) & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Puis :

$$F_a(\theta, \phi) = \begin{cases} \sqrt{\cos(\theta)} & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Déterminez la largeur du faisceau à 3 dB dans le plan  $\phi = \text{cte}$ .
- 

Le lobe principal – et unique lobe – pointe dans la direction  $\theta = 0$ , car  $K_n(0, \phi) = 1$ . À mi-puissance :

$$K_n(\theta_{3dB}) = 0.5 \implies \theta_{3dB} = 60^\circ$$

donc, comme le lobe est aussi symétrique, on a :

$$\Theta_{HPBW} = 120^\circ .$$


---

## 11.5 Angle solide du faisceau

Dans le cas d'antennes ayant un seul faisceau, l'angle solide du faisceau représente l'angle solide à travers lequel toute la puissance rayonnée par l'antenne est concentrée avec une valeur constante  $K_{max}$  et une valeur nulle à l'extérieur de cette région de l'espace, comme

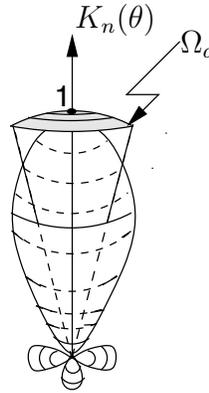


FIGURE 11.7 – Notion d'angle solide.

sur la figure 11.7. L'angle solide du faisceau, notée  $\Omega_a$ , est obtenu via l'intégrale de l'intensité de rayonnement normalisée sur la sphère :

$$\Omega_a = \oint_{4\pi} K_n(\theta, \phi) d\Omega . \quad (11.13)$$

Ainsi la puissance totale émise  $\langle \mathcal{P}_t \rangle$  devient simplement le produit de la valeur maximale de l'intensité de rayonnement par l'angle solide du faisceau :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = K_{max} \Omega_a . \quad (11.14)$$

L'angle solide du faisceau peut, dans les cas où il est très petit, être relié au produit des largeurs du lobe principal à 3 dB dans chacun des plans principaux en *rad*,  $\Theta_{1_{HPBW}}$  et  $\Theta_{2_{HPBW}}$ , via une approximation tenant compte qu'il est un cercle inscrit :

$$\Omega_a \approx (\pi/4)\Theta_{1_{HPBW}} \Theta_{2_{HPBW}} . \quad (11.15)$$

## 11.6 Directivité et gain

Comme il a été écrit précédemment, l'antenne n'émet pas la puissance uniformément dans toutes les directions. Ceci semble évident pour des antennes ne présentant pas la même forme selon la direction d'observation. L'antenne a donc une capacité :

- de concentrer la puissance afin de privilégier certaines directions en émission ;
- de capter plus efficacement la puissance provenant de certaines directions en réception.

Ces deux dernières affirmations sont identiques à cause du principe de réciprocité entre l'émission et la réception. Dans certains cas, ce pouvoir de direction privilégiée est très utile comme dans un lien micro-onde ; dans d'autres cas, on recherche plutôt à émettre partout sans préférence (en azimuth pour un récepteur ou émetteur de radio commerciale).

La directivité  $D(\theta, \phi)$  d'une antenne dans une direction donnée représente donc le rapport de l'intensité du rayonnement dans cette direction à l'intensité moyenne  $K_{moy}$ ,

soit celle qui serait obtenue si la puissance était émise uniformément dans toutes les directions  $K_{moy} = \langle \mathcal{P}_t \rangle / (4\pi)$  :

$$D(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{\langle \mathcal{P}_t \rangle / (4\pi)} = \frac{4\pi}{\langle \mathcal{P}_t \rangle} \frac{E^2(r, \theta, \phi) r^2}{2\eta_o}. \quad (11.16)$$

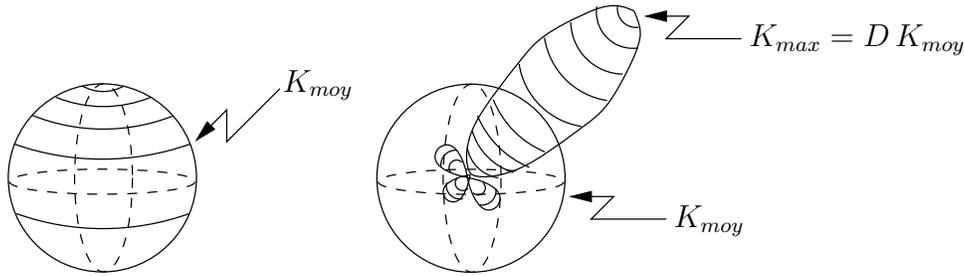


FIGURE 11.8 – Illustration de la directivité : rayonnements isotrope et directionnel.

La figure 11.8 montre qu'en concentrant la puissance émise l'intensité de rayonnement augmente dans la direction privilégiée mais diminue dans les autres, car la puissance totale émise reste la même.

L'antenne qui aurait la faculté d'émettre uniformément est dite antenne isotrope. Elle n'existe qu'en théorie car sa réalisation exigerait une structure à symétrie complète (une sphère par exemple) alimentée symétriquement par une paire de fils ! La directivité d'une antenne isotrope est, bien entendu, égale à l'unité quelle que soit la direction d'observation. Voilà pourquoi on exprime parfois la directivité en  $dBi$  (pour  $dB$  isotropique) dans la littérature.

Le gain directif ou plus simplement gain  $G(\theta, \phi)$  de l'antenne, souvent confondu avec la directivité, représente la même chose en tenant compte des pertes. Il est donc défini par rapport à la puissance à l'entrée,  $\langle \mathcal{P}_{in} \rangle$  plutôt que  $\langle \mathcal{P}_t \rangle$ . De plus, l'antenne étant un circuit passif, le gain n'indique pas que plus de puissance est émise mais que la densité de puissance dans une direction est plus forte ou plus faible comparativement à celle produite par une antenne isotrope. Une efficacité  $\varepsilon_r$  de 100% fait que directivité et gain sont identiques :

$$G(\theta, \phi) = \varepsilon_r D(\theta, \phi). \quad (11.17)$$

Bien souvent, on parle de directivité ou de gain sans spécifier de direction  $(\theta, \phi)$ . Il faut comprendre par là la valeur maximale de ces paramètres. Normalement, il faut aussi connaître la direction vers laquelle on note ces maxima. Dans ce cas, on montre qu'en prenant (11.10) et (11.13) et en sachant que  $K_{n_{max}} = 1$  :

$$D = \frac{K_{max}}{K_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_a}. \quad (11.18)$$

On retrouve :

$$D(\theta, \phi) = D K_n(\theta, \phi). \quad (11.19)$$

**Exemple 11.3**

Soit l'antenne de l'exemple 11.2.

- Exprimez sa directivité.
- 

Plusieurs possibilités s'offrent dont celle partant de l'intensité de rayonnement et de l'intensité moyenne :

$$K(\theta, \phi) = \begin{cases} (5/\pi) \cos(\theta) & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle / 4\pi = 5/4\pi .$$

De (11.16), découle :

$$D(\theta, \phi) = \begin{cases} 4 \cos(\theta) & \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La directivité maximal vaut  $D = 4$ .

---

**Exemple 11.4**

Une antenne possède la fonction caractéristique suivante :

$$F_a(\theta, \phi) = |e^{-2\theta} \sin \phi| .$$

- Déterminez la directivité maximale.
- 

De la fonction caractéristique, on déduit rapidement l'intensité de rayonnement normalisée  $K_n$ , laquelle sert comme point de départ pour trouver l'angle solide par (11.13) puis la directivité maximale par (11.18) :

$$K_n(\theta, \phi) = F_a^2 = e^{-4\theta} \sin^2(\phi) .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \Omega_a &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{-4\theta} \sin^2 \phi \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \pi \underbrace{\left[ \frac{e^{-4\theta} (-4 \sin \theta - \cos \theta)}{17} \right]_0^{\pi}}_{\approx 1/17} \\ &= 0.059\pi \text{ srad} \end{aligned}$$

et

$$D = \frac{4\pi}{0.059\pi} = 68 .$$

- Calculez la puissance émise nécessaire pour produire un champ électrique d'une amplitude de  $10 \text{ mV/m}$  à  $5 \text{ km}$  dans la direction optimale.

La direction optimale est celle où la directivité est maximale, soit à  $\theta = 0^\circ$ . La densité de puissance dans cette direction et à la distance désirée équivaut à :

$$\langle P(\theta = 0) \rangle = \frac{(10 \times 10^{-3})^2}{2(377)} = 13.3 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 .$$

Une antenne isotrope produit cette densité de puissance avec une puissance émise de :

$$\langle \mathcal{P}_{t_{iso}} \rangle = (13.3 \times 10^{-8})(4\pi(5000)^2) = 41.7 \text{ W};$$

l'antenne du problème en nécessite 68 fois moins à cause de sa directivité :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = 0.613 \text{ W} .$$

- Si cette fois le champ électrique d'une amplitude de  $10 \text{ mV/m}$  à  $5 \text{ km}$  est obtenu dans la direction ( $\theta = 60^\circ, \phi = 30^\circ$ ), recalculez la puissance émise.

Dans cette direction, l'instensité de rayonnement normalisé vaut :

$$K_n(\theta = 60^\circ, \phi = 30^\circ) = e^{-4(\pi/3)} \sin^2(\pi/6) = (0.015)(0.25) = 0.00375 .$$

Donc la directivité dans cette direction est inférieure à l'unité puisque selon (11.19) :

$$D(\theta = 60^\circ, \phi = 90^\circ) = 68(0.00375) = 0.255 .$$

Il faudra plus de puissance que celle requise par une antenne isotrope, car l'antenne en question n'a pas la faculté de bien émettre dans cette direction. Ainsi, pour répondre à la demande, il faut :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{\langle \mathcal{P}_{t_{iso}} \rangle}{0.255} = 163 \text{ W} .$$

## 11.7 Ouverture ou longueur effective

L'ouverture effective d'antenne,  $A_e$  s'emploie lorsque l'antenne est dans le mode de réception. Elle est définie par :

$$\langle P_i \rangle A_e = \langle \mathcal{P}_{out} \rangle \quad (11.20)$$

où  $\langle P_i \rangle$  est la densité puissance de l'onde électromagnétique incidente à l'endroit où est située l'antenne ;  $\langle \mathcal{P}_{out} \rangle$  est la puissance disponible à la sortie de l'antenne, laquelle est fournie au récepteur. En référence à la puissance reçue par l'antenne  $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ , on parle alors

d'ouverture effective maximale d'antenne  $A_{em}$ , elle-même reliée à l'ouverture physique de l'antenne  $A_p$  par l'efficacité d'ouverture  $\varepsilon_{ap}$  pour des antennes à ouverture :

$$\langle P_i \rangle A_{em} = \langle \mathcal{P}_r \rangle \tag{11.21}$$

$$A_e = \varepsilon_r A_{em} \tag{11.22}$$

$$A_{em} = \varepsilon_{ap} A_p . \tag{11.23}$$

Pour des antennes linéaires, on peut aussi parler de hauteur effective  $h_e$  :

$$E_i h_e = V_{co} \tag{11.24}$$

$$I_{in} h_e = \int_0^h I(z) dz. \tag{11.25}$$

où  $V_{oc}$  est la tension induite aux bornes de l'antenne en circuit ouvert par le champ électrique  $E_i$  au voisinage de l'antenne et, où  $I_{in}$  est le courant à la base de l'antenne ( $I(z)$  est la distribution du courant le long de l'antenne). La figure 11.9 résume le principe de hauteur effective ; les aires sous les courbes de distribution du courant sont égales.

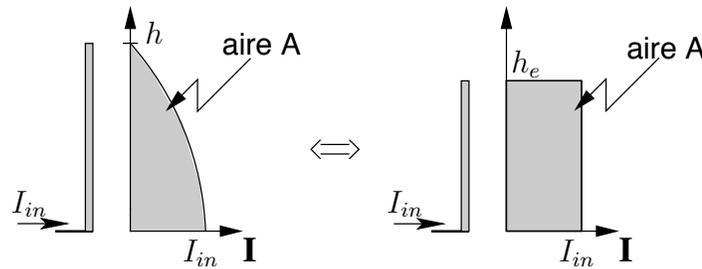


FIGURE 11.9 – Relation entre hauteur effective et hauteur physique d'antenne.

## 11.8 Ouverture vs directivité

Bien que tous les principaux paramètres des antennes aient été présentés, il demeure une équation fondamentale non décrite : le lien entre l'ouverture effective maximale et la directivité. Un tel lien doit exister puisque la définition de l'ouverture effective maximale implique l'efficacité de rayonnement maximal utilisée pour la directivité. Considérons une antenne ayant une ouverture effective maximale  $A_{em}$ , et un angle solide du faisceau  $\Omega_a$ . Si un champ  $E_a$  constant à travers l'ouverture est présent, la puissance émise vaut :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{E_a^2}{2\eta_o} A_{em} .$$

Le champ électrique à une distance  $r$ ,  $E$  devient<sup>2</sup> :

$$E = E_a \frac{A_{em}}{r\lambda}$$

<sup>2</sup>La démonstration de cette égalité ne peut se faire qu'avec l'aide des antennes à ouverture telles les antennes paraboliques. Mais le résultat est tout à fait valable pour tous les types d'antenne.

et la puissance émise déduite à partir de  $E$  s'écrit :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{E^2}{2\eta_0} r^2 \Omega_a .$$

De ces trois dernières équations, on trouve  $\lambda^2 = A_{em} \Omega_a$ . Il s'ensuit donc que :

$$D = 4\pi \frac{A_{em}}{\lambda^2} \quad (11.26)$$

$$G = 4\pi \frac{A_e}{\lambda^2} \quad (11.27)$$

indiquant qu'à une fréquence donnée, la directivité est proportionnelle à l'ouverture effective maximale de l'antenne. Pour l'antenne hypothétique isotrope, l'ouverture effective maximale est de  $0.08\lambda^2$  ( $D = 1$ ) et toutes les antennes sans perte doivent avoir une ouverture effective maximale égale ou supérieure à cette valeur.

### Exemple 11.5

Deux antennes paraboliques identiques ont une directivité maximale de 100. Elles sont employées pour un lien de communication de 50 km à une fréquence de 1 GHz. Il faut absolument une puissance reçue de l'ordre du microwatt pour assurer un bon rapport signal-à-bruit au récepteur. L'efficacité de rayonnement est assumée parfaite.

► Déterminez la puissance émise.

Les étapes sont :

- trouver la surface effective maximale de (11.26) et ensuite la densité de puissance incidente nécessaire de (11.20) ;
- déduire la puissance isotropique émise puis celle demandée étant donnée la directivité.

Ainsi :

$$\begin{aligned} A_{em} &= D \frac{\lambda^2}{4\pi} = 100 \frac{(3 \times 10^8 / 10^9)^2}{4\pi} = 0.7162 \text{ m}^2 \\ \langle P_i \rangle &= \frac{\langle P_{r_{min}} \rangle}{A_{em}} = \frac{10^{-6}}{0.7162} = 1.39 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2 \\ \langle P_{t_{iso}} \rangle &= (1.39 \times 10^{-6})(4\pi(50 \times 10^3)^2) = 43.8 \times 10^3 \text{ W} \\ \langle P_t \rangle &= 438 \text{ W} . \end{aligned}$$

► Si l'efficacité d'ouverture atteint 50% (ce qui est le cas pour la majorité des antennes paraboliques), donnez le rayon de la parabole  $r_p$ .

Selon (11.23), la dimension physique est double de celle effective maximale, soit :

$$A_p = \frac{0.7162}{0.5} = 1.4324 = \pi r_p^2 .$$

En conséquence :

$$r_p = \sqrt{1.4324/\pi} = 0.675 \text{ m} .$$

## 11.9 Valeurs pour antennes filiformes

- isotrope :
  - $A_{em} = \lambda^2/4\pi$
  - $F_a(\theta, \phi) = 1$
  - $D = 1$  partout
- dipôle vertical court de longueur  $h < 0.2\lambda$  :
  - $A_{em} = 3\lambda^2/8\pi$  et  $h_e = h/2$
  - $F_a(\theta, \phi) = \sin \theta$
  - $D = 1.5$  lorsque  $\theta = 90^\circ$
  - $R_r \approx 20\pi^2(h/\lambda)^2$
- dipôle vertical demi-onde de longueur  $h = \lambda/2$  :
  - $A_{em} = 30\lambda^2/73\pi$  et  $h_e = \lambda/\pi$
  - $F_a(\theta, \phi) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}$
  - $D = 1.64$  lorsque  $\theta = 90^\circ$
  - $\bar{Z}_r \approx (73.2 + j42.5)\Omega$  ( $R_r \approx 75\Omega$ )
  - dipôle demi-onde replié :  $\bar{Z}_r \approx 4(73.2 + j42.5)\Omega$  ( $R_r \approx 300\Omega$ )
- monopôle de longueur  $\ell$  :
  - $F_a = F_{a\text{dipôle } \ell=h/2}$
  - $D = 2D_{\text{dipôle } \ell=h/2}$
  - $R_r = \frac{1}{2}R_{r\text{dipôle } \ell=h/2}$
- petite boucle horizontale constituée de  $n$  tours de fil avec un aire  $A$  ( $A < 0.01\lambda^2$ ) :
  - $A_{em} = 3\lambda^2/8\pi$  et  $h_e = 2n\pi A/\lambda$
  - $F_a(\theta, \phi) = \sin \theta$
  - $D = 1.5$  lorsque  $\theta = 90^\circ$
  - $R_r \approx 320n^2\pi^4(A/\lambda^2)^2$

## Exercices

### Question 1

La fonction caractéristique d'une antenne est donnée par :

$$F_a(\theta, \phi) = \begin{cases} \csc^2(\theta) & \text{pour } \pi/6 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouvez la directivité de cette antenne.

### Question 2

Trouvez la valeur du courant  $I_{in}$  alimentant un dipôle court de  $0.1 \text{ m}$  à la fréquence de  $30 \text{ MHz}$  pour produire une densité de puissance de  $1.33 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$  à  $1 \text{ km}$  dans la direction optimale ( $D = 1.5$ ).

### Question 3

À une distance de  $30 \text{ km}$  d'une antenne rayonnant une puissance totale de  $5 \text{ kW}$ , trouvez :

- la densité de puissance si la directivité de l'antenne est de  $37 \text{ dB}$ ;
- la directivité requise pour obtenir une densité de puissance de l'ordre de  $2.5 \text{ mW/m}^2$ .

### Question 4

Une antenne parabolique circulaire capte des signaux à  $f = 4 \text{ GHz}$ . Son faisceau d'antenne a une ouverture de  $1^\circ$  dans les deux plans. Déduisez :

- la directivité  $D$ ;
- le rayon de la parabole si l'efficacité est maximale.

### Question 5

Une antenne rayonne une puissance totale de  $80 \text{ W}$  qui produit un champ électrique de  $8 \text{ mV/m}$  à une distance de  $24 \text{ km}$  de l'antenne dans la direction optimale de rayonnement. Évaluez :

- la densité de puissance à cette distance;
- la directivité de l'antenne.

### Question 6

Déterminez la surface effective d'une antenne dipôle demi-onde à la fréquence de 50 MHz sachant que sa directivité vaut 1.64.

### Question 7

Un lien de télécommunication est établi entre deux dipôles demi-onde dans un environnement en espace libre. Déterminez la puissance reçue au récepteur connectée à l'autre antenne si (tout est adapté) :

- l'émetteur délivre 1 kW à l'antenne émettrice ;
- la distance entre les antennes est de 500 km ;
- la fréquence d'opération est de 200 MHz ;

### Question 8

Un dipôle demi-onde est alimenté par un courant de 1 A<sub>rms</sub> à ses bornes. Évaluez :

- a) la valeur efficace du champ électrique ;
- b) la densité de puissance ;

à 1.6 km de l'antenne dans la direction optimale d'émission.

### Réponses :

1.  $D = 6.075$ .
2.  $\langle \mathcal{P}_t \rangle = 0.01114 \text{ W}$ ,  $R_{ri} \approx 2 \times 10^{-2} \Omega$ ,  $I_{in} = 1.0625 \text{ A}$ .
3. a)  $\langle P(30 \text{ km}) \rangle = 2.216 \text{ mW/m}^2$  ; b)  $D = 37.52 \text{ dB}$ .
4. a)  $D = 52525$  b)  $r_p = 2.74 \text{ m}!$
5. a)  $\langle P \rangle = 84.9 \text{ nW/m}^2$  ; b)  $D = 7.68 \text{ (8.86 dB)}$ .
6.  $A_e = 4.7 \text{ m}^2$ .
7.  $A_e = 0.294 \text{ m}^2$ ,  $\langle \mathcal{P}_r \rangle = 153.3 \text{ pW}$ .
8. a)  $E = 37.3 \text{ mV}_{rms}/\text{m}$  ; b)  $\langle P \rangle = 3.726 \mu \text{ W/m}^2$ .

# Annexe A

## Système de coordonnées

### A.1 Transformations scalaires

- coordonnées usuelles :

cylindriques	sphériques	
$u_1 = r_c, u_2 = \phi_c, u_3 = z$	$u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi$	
$x = r_c \cos \phi_c$	$x = r \sin \theta \cos \phi$	$r_c = r \sin \theta$
$y = r_c \sin \phi_c$	$y = r \sin \theta \sin \phi$	$\phi_c = \phi$
$z = z$	$z = r \cos \theta$	$z = r \cos \theta$
$r_c = \sqrt{x^2 + y^2}$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$r = \sqrt{r_c^2 + z^2}$
$\phi_c = \tan^{-1}(y/x)$	$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$	$\theta = \tan^{-1}(r_c/z)$
$z = z$	$\phi = \tan^{-1}(y/x)$	$\phi = \phi_c$

### A.2 Transformations d'éléments différentiels

- généralités :

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{l} &= \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u_3} du_3 \\
 &= h_1 du_1 \mathbf{a}_1 + h_2 du_2 \mathbf{a}_2 + h_3 du_3 \mathbf{a}_3
 \end{aligned}$$

avec les facteurs d'échelle

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u_k} &= \left| \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial u_k} \right| \mathbf{a}_k \\
 &= h_k \mathbf{a}_k .
 \end{aligned}$$

$$dV = J_{xyz \rightarrow u_1 u_2 u_3} du_1 du_2 du_3$$

avec le Jacobien de la transformation

$$\begin{aligned}
 J_{xyz \rightarrow u_1 u_2 u_3} &= \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} \\
 &= h_1 h_2 h_3
 \end{aligned}$$

- exemple (cylindrique) :

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{l} &= dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z \\
 &= \left| \frac{\partial x\mathbf{a}_x}{\partial r_c} + \frac{\partial y\mathbf{a}_y}{\partial r_c} + \frac{\partial z\mathbf{a}_z}{\partial r_c} \right| dr_c\mathbf{a}_{r_c} + \left| \frac{\partial x\mathbf{a}_x}{\partial \phi_c} + \frac{\partial y\mathbf{a}_y}{\partial \phi_c} + \frac{\partial z\mathbf{a}_z}{\partial \phi_c} \right| d\phi_c\mathbf{a}_{\phi_c} \\
 &\quad + \left| \frac{\partial x\mathbf{a}_x}{\partial z} + \frac{\partial y\mathbf{a}_y}{\partial z} + \frac{\partial z\mathbf{a}_z}{\partial z} \right| dz\mathbf{a}_z \\
 &= |\cos \phi_c\mathbf{a}_x + \sin \phi_c\mathbf{a}_y| dr_c\mathbf{a}_{r_c} + |-r_c \sin \phi_c\mathbf{a}_x + r_c \cos \phi_c\mathbf{a}_y| d\phi_c\mathbf{a}_{\phi_c} + |\mathbf{a}_z| dz\mathbf{a}_z \\
 &= dr_c\mathbf{a}_{r_c} + r_c d\phi_c\mathbf{a}_{\phi_c} + dz\mathbf{a}_z
 \end{aligned}$$

- coordonnées usuelles :

cylindriques	sphériques
$u_1 = r_c, u_2 = \phi_c, u_3 = z$	$u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi$
$h_1 = 1$	$h_1 = 1$
$h_2 = r_c$	$h_2 = r$
$h_3 = 1$	$h_3 = r \sin \theta$

### A.3 Transformations vectorielles

- généralités :

$$\mathbf{a}_k = \frac{\partial \mathbf{l} / \partial u_k}{h_k}$$

ou encore, pour un vecteur en cartésien et dans une autre base

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= v_x\mathbf{a}_x + v_y\mathbf{a}_y + v_z\mathbf{a}_z \\
 &= v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_k &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_k \\
 &= v_x(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_k) + v_y(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_k) + v_z(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_k)
 \end{aligned}$$

- exemple (cylindrique) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{\phi_c} &= \frac{1}{r_c} \left( \frac{\partial x}{\partial \phi_c}\mathbf{a}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi_c}\mathbf{a}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi_c}\mathbf{a}_z \right) \\
 &= \frac{1}{r_c} (-r_c \sin \phi_c\mathbf{a}_x + r_c \cos \phi_c\mathbf{a}_y) \\
 &= -\sin \phi_c\mathbf{a}_x + \cos \phi_c\mathbf{a}_y
 \end{aligned}$$

- exemple (cylindrique) :

$$\begin{aligned}
 v_y &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_y \\
 &= v_{r_c}(\mathbf{a}_{r_c} \cdot \mathbf{a}_y) + v_{\phi_c}(\mathbf{a}_{\phi_c} \cdot \mathbf{a}_y) + v_z(\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y) \\
 &= v_{r_c} \sin \phi_c + v_{\phi_c} \cos \phi_c
 \end{aligned}$$

- coordonnées usuelles :

## rectangulaires-cylindriques

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_{r_c} = \cos \phi_c & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_{r_c} = \sin \phi_c & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_{r_c} = 0 \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_{\phi_c} = -\sin \phi_c & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_{\phi_c} = \cos \phi_c & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_{\phi_c} = 0 \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0 & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0 & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \end{array}$$

## rectangulaires-sphériques

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \sin \theta \sin \phi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos \phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta \sin \phi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin \theta \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = -\sin \phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = \cos \phi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 \end{array}$$

## cylindriques-sphériques

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}_{r_c} \cdot \mathbf{a}_r = \sin \theta = r_c/r & \mathbf{a}_{\phi_c} \cdot \mathbf{a}_r = 0 & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta = z/r \\ \mathbf{a}_{r_c} \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta = z/r & \mathbf{a}_{\phi_c} \cdot \mathbf{a}_\theta = 0 & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin \theta = -r_c/r \\ \mathbf{a}_{r_c} \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 & \mathbf{a}_{\phi_c} \cdot \mathbf{a}_\phi = 1 & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 \end{array}$$

# Annexe B

## Lettres grecques

Symbole		Nom
$\alpha$	<i>A</i>	alpha
$\beta$	<i>B</i>	beta
$\gamma$	$\Gamma$	gamma
$\delta$	$\Delta$	delta
$\epsilon, \varepsilon$	<i>E</i>	epsilon
$\zeta$	<i>Z</i>	zeta
$\eta$	<i>H</i>	eta
$\theta, \vartheta$	$\Theta$	theta
$\iota$	<i>I</i>	iota
$\kappa$	<i>K</i>	kappa
$\lambda$	$\Lambda$	lambda
$\mu$	<i>M</i>	mu
$\nu$	<i>N</i>	nu
$\xi$	$\Xi$	xi (ksi)
$o$	<i>O</i>	omicron
$\pi, \varpi$	$\Pi$	pi
$\rho, \varrho$	<i>P</i>	rho
$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	sigma
$\tau$	<i>T</i>	tau
$\upsilon$	$\Upsilon$	upsilon
$\phi, \varphi$	$\Phi$	phi
$\chi$	<i>X</i>	chi (ki)
$\psi$	$\Psi$	psi
$\omega$	$\Omega$	omega

# Annexe C

## Constantes physiques fondamentales

### C.1 Valeurs recommandées et fixées (2018)

Quantité	Symbole	Valeur	Unités
Pi	$\pi$	3.141 592 653 ...	
Constante de <i>Neper</i>	$e$	2.718 281 828 ...	
Vitesse de la lumière dans le vide	$c$	299 792 458	$m \cdot s^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	$H \cdot m^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0$	$8.854 187 817 \dots \times 10^{-12}$	$F \cdot m^{-1}$
Constante de <i>Planck</i>	$h$	$6.626 070 15 \times 10^{-34}$	$J \cdot s$
Charge élémentaire	$q$	$1.602 176 634 \times 10^{-19}$	$C$
Constante de <i>Boltzmann</i>	$k_B$	$1.380 649 \times 10^{-23}$	$J/K$
Constante gravitationnelle	$G$	$6.674 08(31) \dots \times 10^{-11}$	$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

### C.2 Unités SI

Quantité	Nom	Symbole	Unités de base
Longueur	mètre	$m$	
Masse	kilogramme	$kg$	
Temps	seconde	$s$	
Courant électrique	Ampère	$A$	
Température	Kelvin	$K$	
Fréquence	Hertz	$Hz$	$s^{-1}$
Force	Newton	$N$	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Pression	Pascal	$Pa$	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
Travail, énergie, chaleur	Joule	$J$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Puissance	Watt	$W$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Charge électrique	Coulomb	$C$	$A \cdot s$
Potentiel électrique, emf	Volt	$V$	$kg \cdot m^2 \cdot A^{-1} \cdot s^{-3}$
Résistance	Ohm	$\Omega$	$kg \cdot m^2 \cdot A^{-2} \cdot s^{-3}$
Conductance	Siemens	$S$ ou $\mathcal{U}$	$A^2 \cdot s^3 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2}$
Inductance	Henry	$H$	$kg \cdot m^2 \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}$
Capacitance	Farad	$F$	$A^2 \cdot s^4 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2}$
Flux magnétique	Weber	$Wb$ ou $V \cdot s$	$kg \cdot m^2 \cdot A^{-1} \cdot s^{-2}$
Densité de flux magnétique	Tesla	$T$ ou $Wb/m^2$	$kg \cdot A^{-1} \cdot s^{-2}$
Champ électrique		$V/m$	$kg \cdot m \cdot A^{-1} \cdot s^{-3}$
Champ de déplacement		$C/m^2$	$A \cdot s \cdot m^{-2}$
Champ d'induction		$Wb/m^2$	$kg \cdot A^{-1} \cdot s^{-2}$
Champ magnétique		$A/m$	$A \cdot m^{-1}$

### C.3 Unités SI supplémentaires

Quantité	Nom	Symbole
Angle plan	radian	<i>rad</i>
Angle solide	stéradian	<i>sr</i>

### C.4 Unités utilisées avec SI

Quantité	Nom	Symbole	Définition
Temps	minute	<i>min</i>	1 <i>min</i> = 60 <i>s</i>
	heure	<i>hre</i>	1 <i>hre</i> = 60 <i>min</i>
	jour	<i>jr</i>	1 <i>jr</i> = 24 <i>hre</i>
Angle plan	degré	°	1° = (180/π) <i>rad</i>
	minute	'	1' = (1/60)°
	seconde	"	1" = (1/60)'
Volume	litre	<i>ℓ</i>	1 <i>ℓ</i> = 1 <i>dm</i> <sup>3</sup>
Masse	tonne	<i>t</i>	1 <i>t</i> = 1000 <i>kg</i>
Surface	hectare	<i>ha</i>	1 <i>ha</i> = 10 <sup>4</sup> <i>m</i> <sup>2</sup>

### C.5 Préfixes SI

Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10 <sup>1</sup>	déca	<i>da</i>	10 <sup>-1</sup>	déci	<i>d</i>
10 <sup>2</sup>	hecto	<i>h</i>	10 <sup>-2</sup>	centi	<i>c</i>
10 <sup>3</sup>	kilo	<i>k</i>	10 <sup>-3</sup>	milli	<i>m</i>
10 <sup>6</sup>	méga	<i>M</i>	10 <sup>-6</sup>	micro	<i>μ</i>
10 <sup>9</sup>	giga	<i>G</i>	10 <sup>-9</sup>	nano	<i>n</i>
10 <sup>12</sup>	téra	<i>T</i>	10 <sup>-12</sup>	pico	<i>p</i>
10 <sup>15</sup>	péta	<i>P</i>	10 <sup>-15</sup>	femto	<i>f</i>
10 <sup>18</sup>	exa	<i>E</i>	10 <sup>-18</sup>	atto	<i>a</i>
10 <sup>21</sup>	zetta	<i>Z</i>	10 <sup>-21</sup>	zepto	<i>z</i>
10 <sup>24</sup>	yotta	<i>Y</i>	10 <sup>-24</sup>	yocto	<i>y</i>

# Annexe D

## Table des symboles

<i>Symbole</i>	<i>Définition</i>	<i>Unités</i>
<b>A</b>	potentiel vecteur magnétique	$Wb/m$
$\mathbf{a}_i$	vecteur unitaire selon la direction $i$	
$A_{p,e,em}$	ouverture physique, effective ou effective maximale d'antenne	$m^2$
$AR$	rapport axial de la polarisation	
$\alpha$	constante d'atténuation	$Np/m$
$\alpha_{c,d}$	constante d'atténuation dans conducteur ou diélectrique d'un guide	$Np/m$
<b>B</b>	champ d'induction magnétique ou densité de flux magnétique	$T$ ou $Wb/m^2$
$B$	susceptance	$S$
$\beta$	constante de phase	$rad/m$
$\boldsymbol{\beta}$	vecteur de propagation ou de phase	$rad/m$
$\beta_c$	constante de phase de coupure dans un guide d'onde	$rad/m$
$\beta_i$	constante de phase dans la direction $\mathbf{a}_i$	$rad/m$
$c$	vitesse de la lumière dans le vide ( $299\,792\,458\,m/s \approx 3 \times 10^8\,m/s$ )	
$C$	capacitance	$F$
$\mathcal{C}$	capacitance distribuée ou par unité de longueur	$F/m$
	parcours fermé	$m$
<b>D</b>	champ de déplacement ou densité de flux de déplacement	$C/m^2$
$D$	directivité d'antenne	
$d$	distance à partir de la charge sur une ligne de transmission	$m$
$d_{min,max}$	distance de l'amplitude minimale ou maximale de la tension	$m$
$dx$ ou $d\mathbf{x}$	unité différentielle	
$\delta_p$	profondeur de pénétration	$m$
<b>E</b>	champ électrique	$V/m$
$\epsilon$	permittivité du milieu (vide : $\epsilon_o = 8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12}\,F/m$ )	$F/m$
$\bar{\epsilon}$	permittivité complexe	$F^\dagger/m$
$\epsilon_r$	permittivité relative du milieu ou constante diélectrique	
$\epsilon_{ap,r}$	efficacité d'ouverture ou de rayonnement d'antenne	
$\bar{\epsilon}_r$	constante diélectrique complexe	
$\epsilon_{r,eff}$	constante diélectrique effective en mode quasi-TEM	
$\bar{\eta}$	impédance intrinsèque du milieu (vide : $\eta_o = 376.730\,313 \dots \Omega \approx 377\Omega$ )	$\Omega$
$\eta_g$	impédance intrinsèque en mode supérieur d'un guide d'onde	$\Omega$

<i>Symbole</i>	<i>Définition</i>	<i>Unités</i>
$f$	fréquence	Hz
$f_c$	fréquence de coupure dans un guide d'onde	Hz
$f_{em}$	force électromotrice	V
$f_{mm}$	force magnétomotrice	A
$\mathbf{F}$	force	N
$F_a$	fonction caractéristique d'antenne	
$F_f$	facteur de forme d'une ligne de transmission	
$g$	constante d'accélération terrestre (9.806 65... m/s <sup>2</sup> )	
$G$	conductance	S
	gain d'antenne	
$\mathcal{G}$	conductance distribuée ou par unité de longueur	S/m
$\bar{\gamma}$	constante de propagation	m <sup>-1</sup>
$\bar{\Gamma}$	coefficient de réflexion, incidence normale	
$\bar{\Gamma}(d)$	coefficient de réflexion généralisé	
$\bar{\Gamma}_{\parallel,\perp}$	coefficient de réflexion en polarisation parallèle ou perpendiculaire	
$\mathbf{H}$	champ magnétique	A/m
$\bar{I}$ ou $i$	courant électrique	A
$I_{min,max}$	amplitude minimale ou maximale du courant sur ligne	A
$\mathbf{J}$	densité de courant électrique	A/m <sup>2</sup>
$\mathbf{J}_{c,d}$	densité de courant électrique de conduction ou de déplacement	A/m <sup>2</sup>
$\mathbf{J}_s$	densité de courant électrique de surface	A/m
$\mathbf{K}$	intensité de rayonnement	W/srad
$L$	inductance	H
$\mathcal{L}$	inductance distribuée ou par unité de longueur	H/m
$\ell$	segment ou longueur d'un ligne de transmission	m
$\lambda$	longueur d'onde	m
$\lambda_c$	longueur d'onde de coupure dans un guide d'onde	m
$\lambda_i$	longueur d'onde dans la direction $\mathbf{a}_i$	m
$\lambda_g$	longueur d'onde dans une guide d'onde	m
$\mathbf{M}$	magnétisation	A/m
$\mu$	perméabilité du milieu (vide : $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} H/m$ )	H/m
$\mu_r$	perméabilité relative du milieu	
$n$	indice de réfraction du milieu	
$\omega$	fréquence angulaire	rad/s
$\Omega$	angle solide	srad
$\Omega_a$	angle solide du faisceau d'antenne	srad
$\mathbf{P}$	Polarisation	C/m <sup>2</sup>
	vecteur de <i>Poynting</i> ou densité de puissance	W/m <sup>2</sup>
$\bar{\mathbf{P}}$	vecteur de <i>Poynting</i> complexe	W/m <sup>2</sup>
$\langle \mathbf{P} \rangle$	vecteur de <i>Poynting</i> moyen ou densité de puissance moyenne	W/m <sup>2</sup>

<i>Symbole</i>	<i>Définition</i>	<i>Unités</i>
$\mathcal{P}$	puissance instantanée	$W$
$\langle \mathcal{P} \rangle$	puissance moyenne	$W$
$\langle \mathcal{P}_d \rangle$	puissance moyenne dissipée	$W$
$\Phi$	potentiel scalaire	$V$
$\psi_e$	inclinaison de la polarisation	$rad$
$\Psi$	flux magnétique	$Wb$
$q$	charge électrique d'un électron ( $1.602\,176\,634 \times 10^{-19} C$ )	
$Q$	charge électrique	$C$
	facteur de qualité d'un circuit oscillant	
$(r, \phi, z)$	coordonnées cylindriques	$(m, rad, m)$
$(r, \theta, \phi)$	coordonnées sphériques	$(m, rad, rad)$
$R$	résistance	$m$
	distance entre deux points	$\Omega$
$R_{min,max}$	impédance vue minimale ou maximale sur ligne	$\Omega$
$R_{r,ri}$	résistance de rayonnement d'antenne	$\omega$
$R_s$	résistance surfacique	$\omega$
$\mathcal{R}$	résistance distribuée ou par unité de longueur	$\Omega/m$
$\mathfrak{R}$	réductance	$H^{-1}$
$\rho$ ou $\rho_v$	densité de charges électriques	$C/m^3$
$\rho_\ell$	densité linéique de charges électriques	$C/m$
$\rho_s$	densité surfacique de charges électriques	$C/m^2$
$\mathbf{S}$	surface	$m^2$
	matrice de diffusion	
$SWR$	taux d'onde stationnaire	
$\sigma$	conductivité	$S/m$
$t$	temps	$s$
$T$	température	$K$
$\bar{\tau}_{E,H}$	coefficient de transmission du champ $E$ ou $H$	
$\bar{\tau}_{v,i}$	coefficient de transmission en tension ou en courant	
$\bar{\tau}_{\parallel,\perp}$	coefficient de transmission en polarisation parallèle ou perpendiculaire	
$\theta$	angle d'incidence sur une surface de séparation	$rad$
$\theta_B$	angle de <i>Brewster</i>	$rad$
$\theta_c$	angle critique	$rad$
$\Theta_i$	largeur du lobe principal d'antenne	$rad$
$v$	vitesse	$m/s$
$V$	volume	$m^3$
$\bar{V}$ ou $v$	tension	$V$
$V_{ab}$ ou $V$	différence de potentiel électrique	$V$
$V_{min,max}$	amplitude minimale ou maximale de la tension sur ligne	$V$

<i>Symbole</i>	<i>Définition</i>	<i>Unités</i>
$V_m$	potentiel scalaire magnétique	$A \cdot \text{tours}$
$v_g$	vitesse de groupe	$m/s$
$v_p$	vitesse de propagation TEM	$m/s$
$v_{pi}$	vitesse de phase dans la direction $\mathbf{a}_i$	$m/s$
$W_{ab}$	travail effectué entre $a$ et $b$ soit $W(b) - W(a)$	$J$
$W$	énergie	$J$
$W_{e,m}$	énergie électrique ou magnétique emmagasinée	$J$
$w_{e,m}$	densité d'énergie électrique ou magnétique	$J/m^3$
$(x, y, z)$	coordonnées cartésiennes	$m$
$X$	réactance	$\Omega$
$\xi$	argument d'un champ ou d'un signal à $t = 0$ (et $z = 0$ )	$rad$
$\bar{Y}$	admittance $Y = G + jB$	$S$
$\bar{Z}$	impédance $Z = R + jX$	$\Omega$
$\bar{z}$	impédance normalisée	
$\bar{Z}(d)$	impédance généralisée vue	$\Omega$
$\bar{Z}_a$	impédance d'antenne	$\Omega$
$\bar{Z}_{in}$	impédance vue à l'entrée d'une ligne	$\Omega$
$\bar{Z}_o$	impédance caractéristique	$\Omega$

# Annexe E

## Équations de base en EM

### E.1 Équations de *Maxwell*

- *Faraday*

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

- *Ampère*

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$$

- *Gauss*

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho dv & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

### E.2 Équation de continuité

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv \qquad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

### E.3 Relations constitutives

$$\mathbf{D} = [\epsilon] \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H}$$

### E.4 Équation du courant de conduction

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$$

### E.5 Conditions aux limites

$$\mathbf{a}_\perp \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \qquad E_{\parallel 1} - E_{\parallel 2} = 0$$

$$\mathbf{a}_\perp \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \qquad H_{\parallel 1} - H_{\parallel 2} = J_s$$

$$\mathbf{a}_\perp \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \qquad D_{\perp 1} - D_{\perp 2} = \rho_s$$

$$\mathbf{a}_\perp \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \qquad B_{\perp 1} - B_{\perp 2} = 0$$

# Index

- Abaque de *Smith*, 302–313
  - Complet, 307
  - Construction, 302–306
  - Déplacement de l’observation, 308
  - Échelles circonférentielles, 308–310
  - Échelles radiales, 308, 310, 343
  - Localisation de la charge, 305–306
- Adaptation de charge, 317–336
  - Double stub, 329–335
  - Largeur de bande, 336
  - Réactance localisée, 321–324
  - Stub simple, 325–329
  - Transformateur quart-d’onde, 319–321
- Ampère* (Loi de), 43–46, 52
- Angle critique, 182
- Angle de *Brewster*, 183
- Antennes, 403–418
  - Angle solide du faisceau, 412
  - Diagramme de rayonnement, 409–411
    - Fonction caractéristique, 410
  - Directivité et gain, 412–415
  - Efficacité de rayonnement, 407
  - Intensité de rayonnement, 408
  - Ouverture effective, 415–418
    - Versus directivité, 417
  - Paramètres, 403
    - Antennes filiformes, 418
  - Résistance de rayonnement, 405
- Biot-Savard* (Loi de), 24
- Brewster* (Angle de), voir Angle de *Brewster*
- Capacitance
  - Définition, 88
  - Distribuée, 195
- Cavité résonnante, 395–398
  - Facteur de qualité  $Q$ , 397
  - Fréquence de résonance, 396
  - Modes, 395–396
- Champ
  - Définition, 1–2
  - Déplacement, 29–31
  - Électrique, 17–22
    - Produit par un fil de rayon  $a$ , 69
    - Produit par un plan, 22, 71
  - Induction magnétique, 22–28
  - Irrotationnel ou conservatif, 7
  - Magnétique, 32–35
    - Produit par un fil, 26
    - Produit par un fil de rayon  $a$ , 72
    - Produit par une feuille de courant, 28
- Circuit
  - Magnétique, 94
  - Rappel des notions de base, 230
- Circuit magnétique, 97
- Circuits
  - Rappel des notions de base, 231
- Coefficient de réflexion
  - Champ H, 171
  - Comportement, 185–186
  - Conducteur parfait, 172, 186
  - Diélectrique parfait, 171
  - Généralisé, 291–292, 299
    - Abaque de *Smith*, 308
    - Ligne à pertes, 343
    - Plan complexe, 295
  - Impédance-admittance, 300
  - Incidence normale, 171
  - Incidence oblique, 175–186
    - Polarisation parallèle, 180
    - Polarisation perpendiculaire, 177
- Coefficient de transmission, voir Coefficient de réflexion

- Conditions aux limites, 53–62
  - Champ E (D) perpendiculaire, 56
  - Champ E tangentiel, 54
  - Champ H (B) perpendiculaire, 55
  - Champ H tangentiel, 55
  - Conducteur, 58
  - Résumé, 56
- Conductance
  - Définition, 89
  - Distribuée, 195
- Conductivité, 28–29
- Conservation de charge, 46, voir aussi
  - Équation de continuité
- Constante d'atténuation, 127, 136
- Constante de phase, 124, 127, 135
- Constante de propagation
  - Ligne de transmission, 205
  - Onde plane, 124, 126, 136
- Constante diélectrique, 31
  - Effective (quasi-TEM), 221
- Courant
  - Conduction, 29, 44
  - Déplacement, 43
- Densité
  - Charges, 19
  - Courant (surfaccique, volumique), 26
  - Puissance onde plane, 129
- Diagramme d'onde stationnaire, 186, 292–297
  - $d_{max}$  et  $d_{min}$ , 295, 310
  - $V_{max}$ ,  $I_{max}$ ,  $V_{min}$  et  $I_{min}$ , 292–297
- Diagramme en Z, 243–248
  - Lecture, 244
  - Point de jonction, 260–263
  - Sources multiples de type échelon, 250
- Différence de potentiel, voir Voltage
- Différences finies
  - Équation, 82, 85
  - Méthode, 81–86
- Dispersion, 152, 207
- Effet de peau (ou effet pelliculaire), 143
- Électroaimant, 101
- Énergie emmagasinée
  - Densité, 130
  - Électrique, 98–100
  - Guide d'onde, 391
  - Magnétique, 100
- Épaisseur de peau, voir Effet de peau
- Équation d'onde
  - Guide d'onde TE, 371
  - Matériau quelconque, 124
- Équation de continuité, 46–47, 52
- Équations du télégraphiste, 195, 204, 233
  - Solution, 202, 205, 233, 284
- Équipotentielle, voir Potentiel, 75
- Estimation de charge, 313–317
  - Expérimentale, 314–317
  - Plan de référence, 315
  - Ligne fendue de mesure, 314
  - Principes théoriques, 313
- Facteur de forme, voir Ligne de transmission
- Faraday* (Loi de), 39–43, 52
- Flux
  - Électrique  $\Psi_e$ , 44
  - Magnétique  $\Psi$ , 40
- Force
  - Électrique, 18
  - Magnétique, 23, 24
- Gauss* (Lois de), 47–52
  - Charges électriques, 49
  - Charges magnétiques, 48
- Gauss* (Intégrale numérique de), 216
- Green* (Théorème de), 11
- Guide d'onde, 355–398
  - Cavité, voir Cavité résonnante
  - Circulaire, 384–389
    - Analyse mathématique, 384–386
    - Fréquence de coupure, 387
    - Modes fondamentaux, 388
  - Correspondances avec ligne en mode TEM, 364
  - Impédance intrinsèque du guide, 382, 383
  - Longueur d'onde guidée, 380, 387
  - Modes, voir Modes supérieurs TE ou TM

- Paramètres, voir aussi Modes supérieurs, 378–383
  - TE ou TM, 387–388
- Pertes, voir Pertes
- Rectangulaire, 366–384
  - Analyse mathématique, 368–374
  - Énergie emmagasinée, 391
  - Fréquence de coupure, 380
  - Mode fondamental, 374
  - Modes TE ou TM, 374–378
  - Puissance transportée, 390
- Vitesse de phase et de groupe, 381, 388
- Heaviside* (Règle de), 207
- Hystérésis B-H, 34
- Images (Théorie des), 77–80
  - Courants, 80
- Impédance
  - Caractéristique, 203, 205, 234
  - Intrinsèque
    - Matériau, 125, 128, 136
    - Modes TE ou TM, 363
- Indice de réfraction, 175
- Inductance
  - Définition, 91
  - Distribuée, 195
  - Interne, 94
  - $N$  boucles, 92
- Intégrale
  - Circulation, 6
  - Curviligne, 4
  - Flux, surface fermée, 11
  - Surfacique, 7–11
- Intensité de rayonnement, 407–409
- Interrupteurs
  - Équivalence, 231–232
- Jonction sur ligne, 256–263
  - Atténuateur en T, 259
  - Résistance parallèle, 257
  - Résistance série, 258
- Laplace* (Transformée de)
  - Propriétés, 230
  - Rappel, 229–230
- Laplace* (Équation de), 81
  - Discrète, 82
- Ligne à pertes, 343–346
- Ligne de transmission, 191–224
  - Exigences pour mode TEM, 193
  - Facteur de forme, 208
  - Impédance caractéristique, 203, 205
  - Paramètres
    - Quelconque à pertes, 204–205
    - Sans perte, 203
  - Paramètres distribués, 194–196
  - Sans distorsion, 207–208
  - V et I
    - Générale avec phaseurs, 205
    - Sans perte, 202
- Ligne fendue de mesure, voir Estimation de charge
- Longueur d'onde, 127
  - Apparente, 149
- Lorentz* (Loi de), 24
- Méthode des différences finies, voir Différences finies
- Magnétisation, 33
- Matériau
  - Paramètres, 137
    - Bon conducteur, 141–142
    - Conducteur parfait, 144
    - Diélectrique à faibles pertes, 140
    - Diélectrique parfait, 138
    - Types généraux, 137
- Maxwell* (Lois de), 39–62
  - Formes différentielles, 52
  - Statique, 68
    - Kirchhoff*, 87
- Mode TEM, 192
  - Exigences de ligne, 191, 193
  - Modélisation de ligne, 193–196
- Modes supérieurs TE ou TM
  - Cavités, 396
  - Création, 357–359
  - Fréquence de coupure, 361

- Impédance intrinsèque, 363
- Longueur d'onde guidée, 361
- Vitesses de phase et de groupe, 362
- Néper, 127
- Onde plane, 117–160
  - Caractéristiques, 135–137
  - Direction quelconque, 145
  - Expression générale avec phaseurs, 124
  - Matériau sans perte, 122
- Onde stationnaire, voir Diagramme d'onde stationnaire
- Optimisation du SWR, 337–342
  - Principe, 337
- Paramètres distribués, voir aussi Ligne de transmission
  - Détermination, 209–224
    - Numérique, 213–224
    - Numérique quasi-TEM, 219–224
  - Lignes usuelles, 210
  - Relation G et C, 198
  - Relation L et C, 199
- Paramètres S, 271–273
- Perméabilité, 23, 34
  - Vide  $\mu_o$ , 23
- Permittivité, 18, 31
  - Vide  $\epsilon_o$ , 18
- Pertes
  - Guide d'onde, 391–395
    - Conducteur, 392–394
    - Diélectrique, 395
  - Ligne de transmission, 195, voir aussi Ligne à pertes
  - Onde plane, 127, 130
- Phaseur, 3
- Plan complexe, 3
- Poisson (Équation de), 81
- Polarisation, 153–160
  - Angle d'ellipticité, 158
  - Angle d'inclinaison, 158
  - Circulaire ou elliptique, 154–160
  - Droite ou gauche, 154
  - Électrique, 30
  - Linéaire, 153
  - Rapport axial, 158
- Potentiel
  - Équipotentielle, 75–77
  - Scalaire, 74–75
  - Vecteur  $\mathbf{A}$ , 74
- Poynting (Théorème de), voir Énergie emmagasinée
- Poynting (Vecteur de), 129
  - Complexe, 132
  - Moyen, 132
- Propagation
  - Constante, voir Constante de propagation
  - Paramètres, voir Constante de propagation, Impédance intrinsèque
  - Vecteur, voir Vecteur de propagation
- Puissance
  - Densité, 129
  - Dissipée, 130
  - Onde EM traversant surface, 131
- Quasi-statique, voir aussi Statique
  - Analyse du comportement, 103–109
  - Limite, 107
- Régime sinusoïdal permanent sur ligne de transmission, 283–346
  - Abaque, voir Abaque de *Smith*
  - Adaptation, voir Adaptation de charge
  - Coefficient de réflexion généralisé, voir Coefficient de réflexion
  - Équation du transformateur, 299
  - Impédance vue, 291, 299
    - CC et CO, 288
    - Estimation de charge, voir Estimation de charge
    - $R_{max}$  et  $R_{min}$ , 298, 310
  - Ligne à pertes, voir Ligne à pertes
  - Onde stationnaire, voir Diagramme d'onde stationnaire
  - Optimisation, voir Optimisation du SWR
  - Rapport d'onde stationnaire, voir SWR

- $\bar{V}$  et  $\bar{I}$ 
  - CC et CO, 286
  - Générale avec phaseurs, 285
- Régime transitoire, voir Transitoire sur ligne de transmission
- Résistance
  - Distribuée, 195
  - Rayonnement, 405
- Réfraction, voir *Snell-Descartes* (Loi de)
- Réductance, voir Circuit magnétique
  
- Smith* (Abaque de), voir Abaque de *Smith*
- Snell-Descartes* (Lois de), 175
- Spatio-temporelle (Relation), 122–123, 135
- Statique, 67–109
- Stokes* (Théorème de), 11
- Stub CC et CO, 288, 325
- SWR, 297–298, 310
  
- Transformateur quart-d'onde, 319
  - Équation, 299
- Transitoire sur ligne de transmission, 233–271
  - Approche raisonnée, 238–239
  - Conditions initiales non nulles, 252–255
  - Convergence vers permanent, 241–242
  - Diagramme en Z, voir Diagramme en Z
  - Distribution de l'énergie, 249
  - Endroit du changement, 252–255
  - Impédance réactive, 263–271
    - Conditions initiales nulles, 265–269
    - Constante de temps des réflexions, 266
  - Point de jonction, voir Jonction sur ligne
  - Source
    - Échelon, 245
    - Impulsion, 244
    - Porte, 249
  - Sources multiples, 249–252
  - Système simple, 234–241
    - Condition à la charge, 236
    - Condition à la source, 234
  
- Vecteur de propagation, 146, 148
- Vitesse
  - Apparente, 149
  - Groupe, 151–153, 362
  - Phase, 127, 150
    - Modes TE ou TM, 362
  - Vitesse de propagation, 123, voir aussi Vitesse-Phase
    - Apparente, 149
    - Énergie (ou information), 150
- Voltage, 73–77