Calcul d'incertitude

Calcul d'incertitude par la méthode des extrêmes

Considérons une quantité Q dont la valeur dépend des paramètres x, y, z: $Q = q(x,y,z)$

Les paramètres x, y, z sont connues avec incertitude:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad y = \bar{y} \pm \Delta y \qquad z = \bar{z} \pm \Delta z$$

Par conséquent, il existe une incertitude ΔQ sur la valeur de Q: $\quad Q = \bar{Q} \pm \Delta Q$

Les valeurs maximale et minimale de Q peuvent être calculées: Q_{max} et Q_{min}.

La valeur moyenne de Q est calculée par: $\boxed{\bar{Q} = \frac{Q_{max} + Q_{min}}{2}}$

L'incertitude sur Q est: $\boxed{\Delta Q = \frac{Q_{max} - Q_{min}}{2}}$

Exemple 1:

On calcule $R = R_1 + R_2$ à partir des valeurs de $R_1 = 100 \pm 5$ et $R_2 = 330 \pm 33$.

Les valeurs maximale et minimale de R:

$$R_{max} = 105 + 363 = 468$$

$$R_{min} = 95 + 297 = 392$$

On a: $\bar{R} = \frac{468 + 392}{2} = 430$ et $\Delta R = \frac{468 - 392}{2} = 38$

Alors: $R = 430 \pm 38$

Exemple 2:

On calcule $R = \frac{V}{I}$ à partir de $V = 24 \pm 0.5$ et $I = 0.8 \pm 0.05$.

Les valeurs maximale et minimale de R:

$$R_{max} = \frac{24.5}{0.75} = 32.667$$

$$R_{min} = \frac{23.5}{0.85} = 27.647$$

On a: $\bar{R} = \frac{32.667 + 27.647}{2} = 30.157$ et $\Delta R = \frac{32.667 - 27.647}{2} = 2.51$

Alors: $R = 30 \pm 2.5$

Exemple 3:

On calcule $P = VI\cos\phi$ à partir de $V = 120 \pm 2$, $I = 2.5 \pm 0.2$, et $\phi = 55° \pm 2°$

Les valeurs maximale et minimale de P:

$$P_{max} = 122 \times 2.7 \times \cos(53°) = 198.24$$

$$P_{min} = 118 \times 2.3 \times \cos(57°) = 147.82$$

On a: $\bar{P} = \frac{198.24 + 147.82}{2} = 173.03$ et $\Delta P = \frac{198.24 - 147.82}{2} = 25.2$

Alors: $P = 173 \pm 25$

Calcul d'incertitude par le calcul différentiel

Considérons une fonction F dont la valeur dépend des paramètres x, y, z: F = f(x,y,z)

Les paramètres x, y, z sont connues avec incertitude:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad y = \bar{y} \pm \Delta y \qquad z = \bar{z} \pm \Delta z$$

<u>Conditions:</u>

- la fonction f(x,y,z) est croissante ou décroissante dans l'intervalle considéré.
- les incertitudes relatives sont faibles (< 10%).

La valeur moyenne de F est: $\bar{F} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

L'incertitude sur F est donnée par: $\Delta F = \left|\frac{\delta f}{\delta x}\right|\Delta x + \left|\frac{\delta f}{\delta y}\right|\Delta y + \left|\frac{\delta f}{\delta z}\right|\Delta z$

<u>Exemple 4:</u>

On calcule $V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times V_s$ à partir des valeurs de $R_1 = 680 \pm 5\%$, $R_2 = 470 \pm 5\%$, et $V_s = 15 \pm 1\%$.

La valeur moyenne de V_1 est: $V_1 = \frac{680}{680 + 470} \times 15 = 8.869$

L'incertitude sur V_1 est donnée par: $\Delta V_1 = \left|\frac{\delta V_1}{\delta R_1}\right|\Delta R_1 + \left|\frac{\delta V_1}{\delta R_2}\right|\Delta R_2 + \left|\frac{\delta V_1}{\delta V_s}\right|\Delta V_s$

On a:

$$\left|\frac{\delta V_1}{\delta R_1}\right| = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \times V_s = 5.33 \times 10^{-3} \qquad \text{et} \qquad \Delta R_1 = 34$$

$$\left|\frac{\delta V_1}{\delta R_2}\right| = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} \times V_s = 7.71 \times 10^{-3} \qquad \text{et} \qquad \Delta R_2 = 23.5$$

$$\left|\frac{\delta V_1}{\delta V_s}\right| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.409 \qquad \text{et} \qquad \Delta V_s = 0.15$$

L'incertitude sur V_1 est: $\Delta V_1 = (5.33 \times 10^{-3})34 + (7.71 \times 10^{-3})23.5 + (0.409)0.15 = 0.424$

Alors: $V_1 = 8.87 \pm 0.42$

Cas des opérations simples

Dans le cas des opérations simples, si la variation de la quantité A est monotone et les incertitudes sont faibles, on peut appliquer les règles suivantes pour le calcul d'incertitude.

<u>Règle no. 1</u>

Si $A = B \pm C$ alors $\bar{A} = \bar{B} \pm \bar{C}$ et $\Delta A = \Delta B + \Delta C$

<u>Règle no. 2</u>

Si $A = B \times C$ alors $\bar{A} = \bar{B} \times \bar{C}$ et $\frac{\Delta A}{|\bar{A}|} = \frac{\Delta B}{|\bar{B}|} + \frac{\Delta C}{|\bar{C}|}$

Si $A = \frac{B}{C}$ alors $\bar{A} = \frac{\bar{B}}{\bar{C}}$ et $\frac{\Delta A}{|\bar{A}|} = \frac{\Delta B}{|\bar{B}|} + \frac{\Delta C}{|\bar{C}|}$

<u>Règle no. 3</u>

Si $A = B^C$ alors $\bar{A} = \bar{B}^C$ et $\frac{\Delta A}{|\bar{A}|} = |C|\frac{\Delta B}{|\bar{B}|}$