CHAPITRE 3
MÉTHODE DES TABLES ET DES CARTES POUR MINIMISER LES EXPRESSIONS BOOLÉENNES

*survol : On s'attaque à la minimisation des expressions logiques par les tables (= *map*) de Karnaugh ou K-Map.

$N < 6$ (2^N lignes de table de N entrées)	-méthodes graphiques (tables de Karnaugh) qui permettent de visualiser les termes qu'on peut associer ensemble.
$N \approx 16$ à 20	-réduction tabulaire selon l'algorithme "Quine-McCluskey" qui permet de combiner les "minterms" grâce au théorème de l'adjacence: $PQ + P\overline{Q} = P$
$N > 16$	-méthodes heuristiques, méthode espresso, algorithme EVE

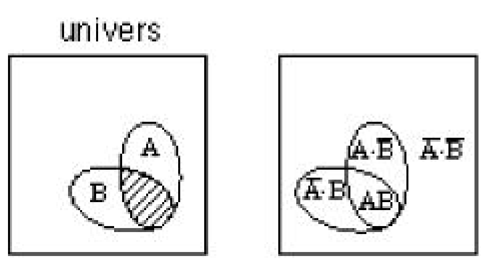
Ce chapitre fournit les outils nécessaires à la minimisation du hardware nécessaire pour réaliser une fonction logique donnée.

3.1 Diagrammes de VENN: cartes 2D qui illustrent graphiquement ET, OU, NON, XOR.

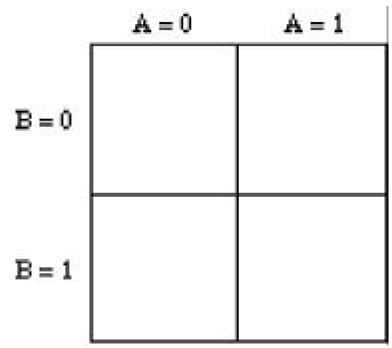
-Frontière extérieure: univers des valeurs d'entrées.

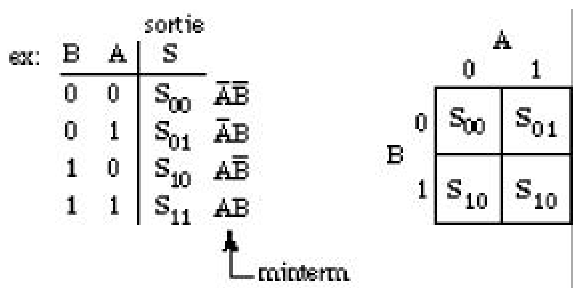
-Frontière intérieure: valeurs ou la variable x est vraie

Ex :



Ce dessin suggère une application
directe des diagrammes
de Venn aux tdv





Ex : Soit la Tdv suivante :

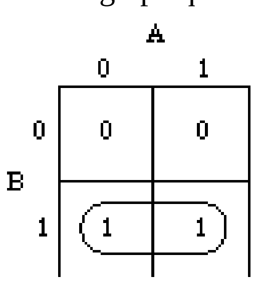
B	A	Sortie
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

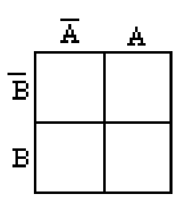
Avec une solution SOP « sum of products» on a

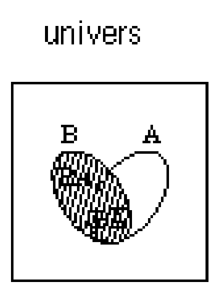
sortie= $\overline{A}.B + A.B$
$= B(A + \overline{A}) = B$

En redessinant, on voit directement que sortie=B

Solution graphique :



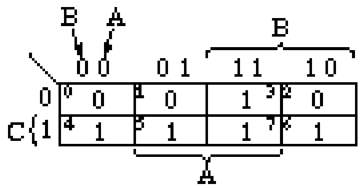




Ex : (avec 3 variables)

Réalisez un distributeur de bonbons charitable (min 15¢, le reste don de charité....,)

	25 C	10 B	5 A	sortie
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3-	0	1	1	1
4-	1	0	0	1
5-	1	0	1	1
6-	1	1	0	1
7-	1	1	1	1



On veut ici simplifier la solution SOP. À cette fin, on peut grouper les 1 qui ont des entrées en commun. C'est-à-dire le groupe qui recouvre au complet une variable.

Simplifions :

$$S = \bar{C}BA + C\bar{A}\bar{B} + C\bar{B}A + CB\bar{A} + CBA$$

$$= C\left[\bar{A}\bar{B} + \bar{B}A + B\bar{A} + BA\right] + \bar{C}BA$$

$$= C\left[\bar{B}\left[\underbrace{\bar{A} + A}_{1}\right] + B\left[\underbrace{\bar{A} + A}_{1}\right]\right] + \bar{C}BA$$

$$= C\left[\underbrace{\bar{B} + B}_{1}\right] + \bar{C}BA$$

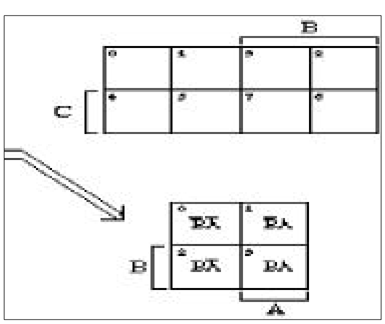
$$= C + \bar{C}AB = C + AB$$

$$X + \bar{X}V = X + Y$$

adsorption

$$= C + BA$$

Disposition des variables



$C\ B\ A, C = MSB$
$MSB = Most\ significant\ Bit$

$BA, B = MSB$

Le regroupement permet la simplification des SOP, par élimination :

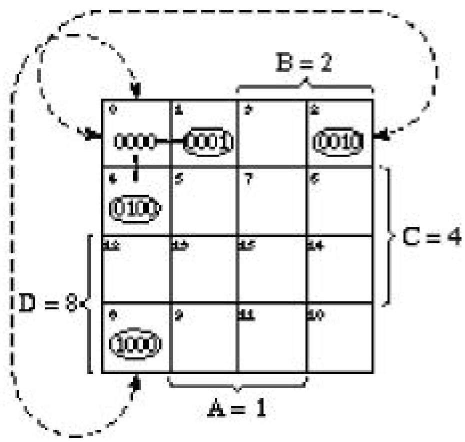
Ici: $SOP_3 + SOP_7 = \overline{C}BA + CBA = BA\left(\underbrace{\overline{C} + C}_{1}\right) = AB$

3.2 Table de Karnaugh et propriétés

Exemples précédents illustrent les tables de Karnaugh (1953)
déf : rectangle contenant des cases, chaque case représente un minterm de la tdv correspondante (0 au 1)

Chaque case diffère par un terme des cases voisines.
(en X et en Y et aussi aux bordures (« warp-around ») de sorte que chaque case à 4 voisins).

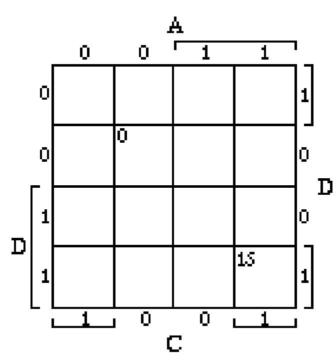
Avec 4 entrées:



On associe les 4 voisins du terme 0000

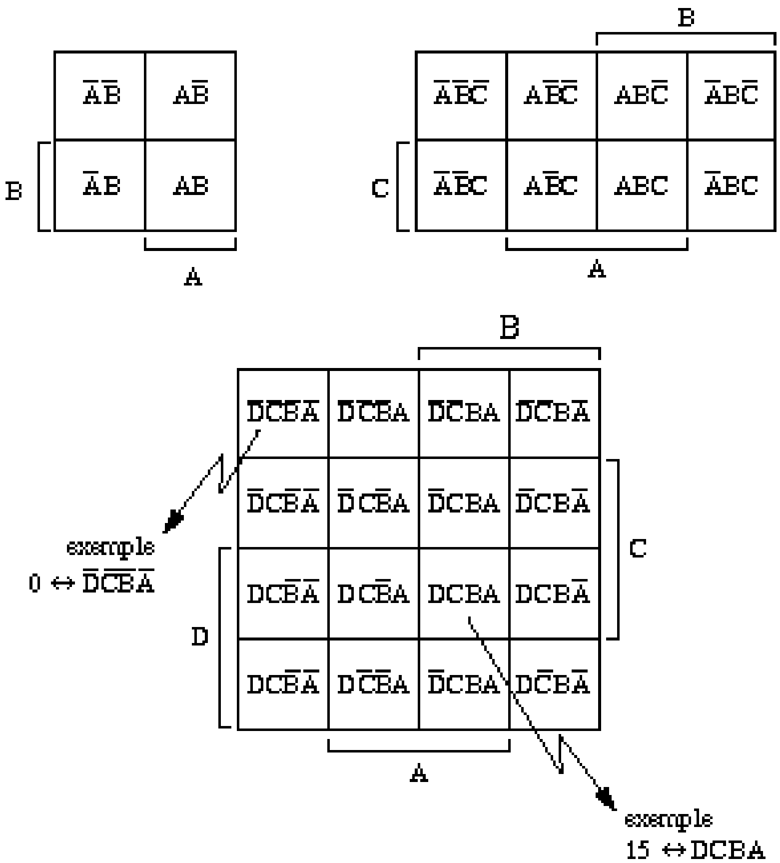
Il y a différents façons de distribuer les variables dans les tables, par exemple les diagrammes de VEITCH.

Diagramme de VEITCH



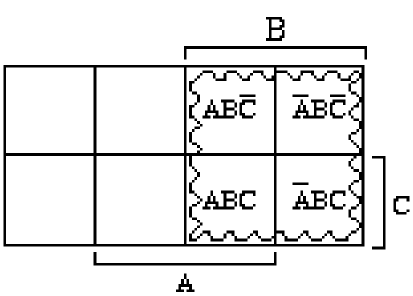
Cependant l'usage des tables-K est plus répandu, nous l'adopterons. Surtout qu'on peut étendre la notation à plus de 4 variables.

Signification des cases:



On peut réécrire et faire le lien avec les théorèmes de l'algèbre booléen.

Ex : Si on a les cases suivantes qui sont encerclées, qu'ont-elles en commun



On voit que B est commun à toutes ces cases

La sortie vaut :

$$
\begin{aligned}
S &= AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + ABC + \overline{A}BC \\
&= B\left(A\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C} + AC + \overline{A}C\right) \\
&= B\left[\overline{A}\Big(\underbrace{\overline{C} + C}_{1}\Big) + A\Big(\underbrace{C + \overline{C}}_{1}\Big)\right] = B\left[\underbrace{\overline{A} + A}_{1}\right] = B
\end{aligned}
$$

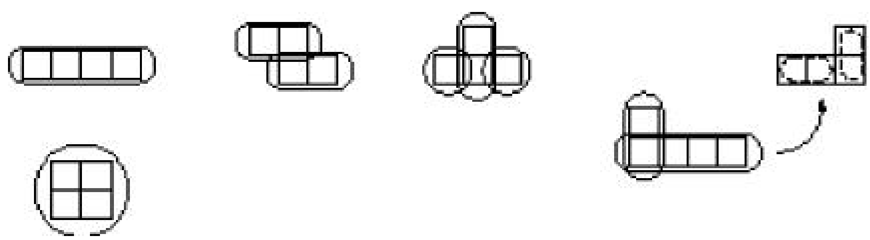
On voit que les théorèmes vus précédemment s'appliquent. B détermine la valeur de la sortie.

3.3 Simplification graphique

Quelles cases peut-on regrouper?

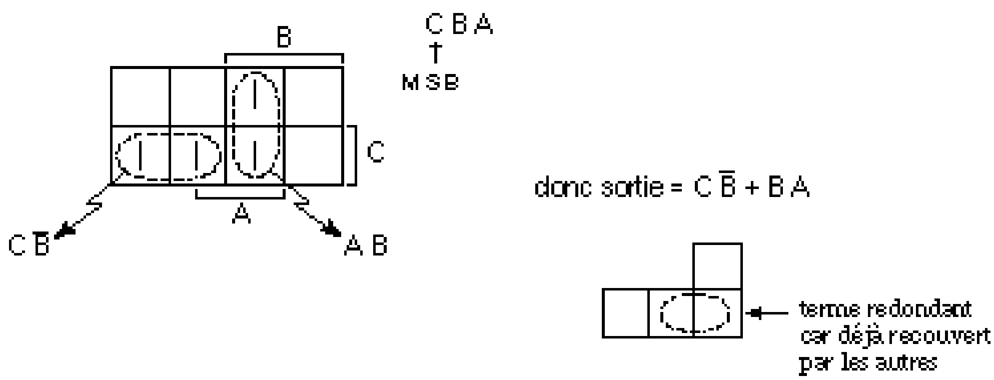
réponse: des groupes en forme de carré et de rectangles de 2,4...2^N cases. Ces groupes sont appelés sous-cubes.

Voici les groupes de 4 cases et la façon de les réunir :



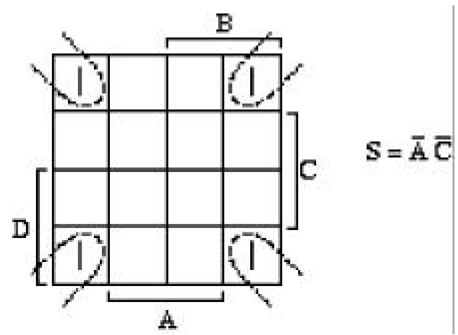
Les simplifications indiquées permettent une réduction en termes de 2 variables.

Ex :



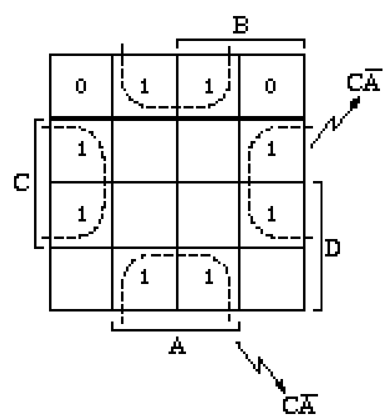
Cas des côtés

Les tables de Kanaugh ont la propriété de débordement sur les côtés: les cases des coins pourront ainsi se regrouper ensemble.



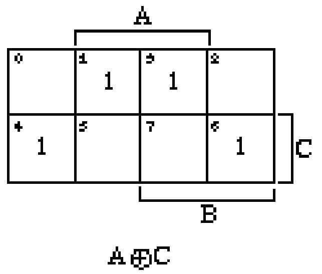
Les autres débordements possibles sont les côtés gauches et droit et supérieur/inférieur.

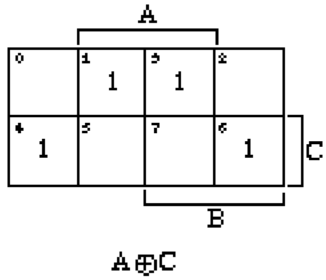
Exemple:

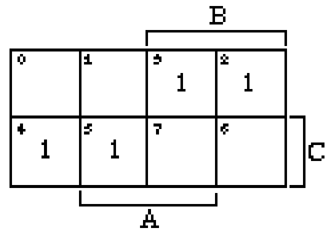


Tables de Kanaugh et fonctions OU-exclusif

Étudions les représentations graphiques des portes X-OR :





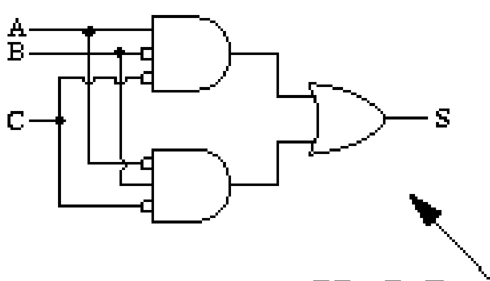


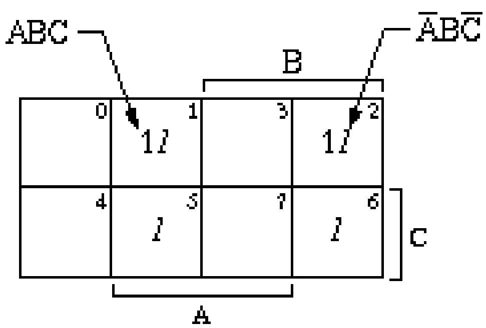
A⊕B⊕C

	C	B	A	A ⊕C	A⊕B⊕C	A⊕B
0-	0	0	0	0	0-0	0
1	0	0	1	1	1-1	1
2	0	1	0	0	1-2	1
3-	0	1	1	1	0-3	0
4	1	0	0	1	1-4	0
5	1	0	1	0	0-5	1
6-	1	1	0	1	0-6	1
7	1	1	1	0	1-7	0

Pour le cas A⊕B⊕C :
On voit que le patron graphique est en "zigzag" point intéressant puisqu'une solution "SOP" exigerait 4 termes. Donc à se rappeller!

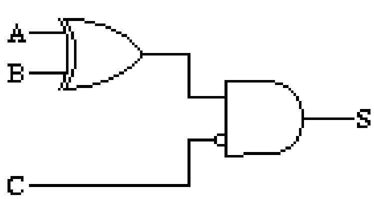
Ex :





solution "SOP": $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$: 2 termes de 3 entrées

solution "XOR": en <u>italique</u> A⊕B, mais C n'est pas présent donc on fait (A⊕B). C

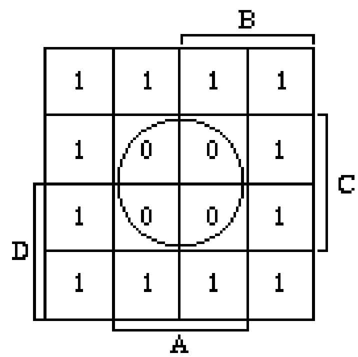


3.4 Solution en rassemblant les zéro

Si la table-K n'a que quelques zéros et beaucoup de 1, on peut rassembler les "0" plutôt que les "1" (approche POS).
Deux approches sont possibles:

- - couvrir la sortie inversée avec une expression SOP
- - générer un produit de somme POS, vus au chap. 2

Ex :



$\overline{S} = AC$

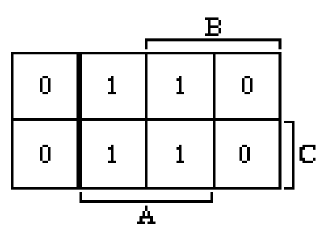
$\overline{\overline{S}} = \overline{AC} = \overline{A} + \overline{C}$

donc $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{C} \rightarrow$ *ce* **qu'on aurait pu voir tout de suite (Maxterm)**

c’est la 1ère solution.

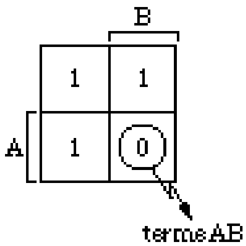
2ème solution on écrit directement S=$\overline{A} + \overline{C}$

Ex :



solution avec 0 $\overline{S} = \overline{A} \Rightarrow S = A$

solution avec 1 S=A



A	B	AB	$\bar{A}+\bar{B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

1ère solution (POS avec 0)

$\bar{S} = AB$

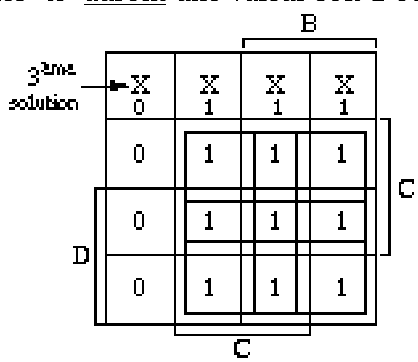
$\bar{\bar{S}} = \overline{AB}$

$S = \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

3.5. les « sans importance » ou « don't care » dans les tables-K

Certaines tables ont des termes qui peuvent être soit "1" ou "0" dans la table K. Les termes "X" pris en groupes sont apportés "ensemble =dc" ou dc-set. On peut en tirer profit.

méthode: -mettre les x dans la table
-décider si x= 1 ou 0 pour solution la +simple. Peu importe la décision, dans la solution finale, les "x" auront une valeur soit 1 ou 0.



1 ère sol. ∀x = 0 S = AC + AD + BC + BD

2 è ∀x = 1 S = B + A + $\overline{C}\overline{D}$

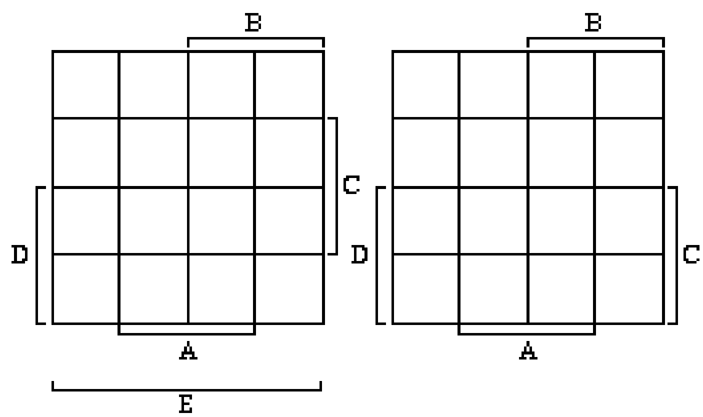
3 è sol. X = 1 ou 0 S = A + B ← meilleure approche

Donc règle générale : les valeurs des X sont attribuées de façons a former les + grandes sous-cubes possibles.

3.6Tables de Karnaugh pour plus de 4 entrées

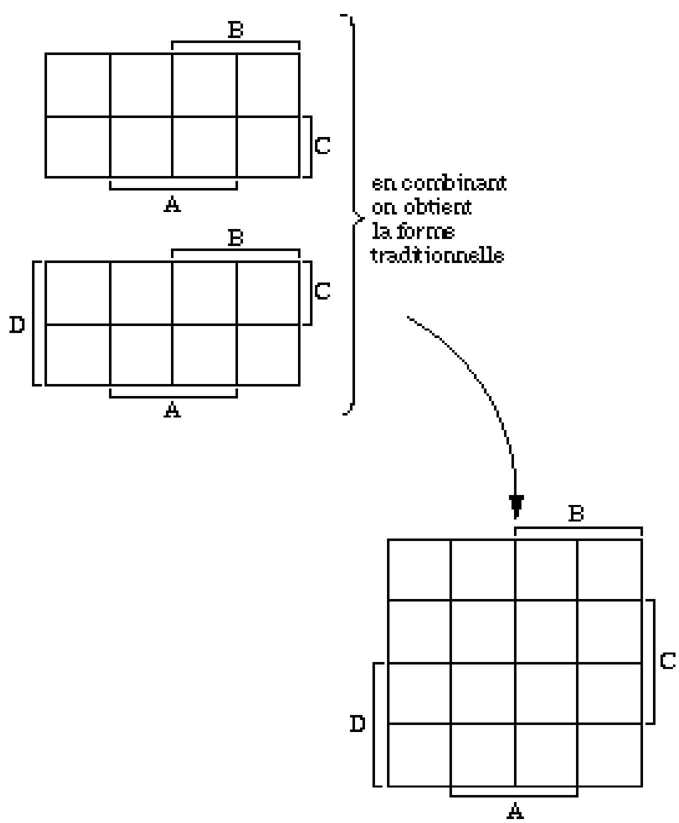
On peut étendre les tables de Karnaugh à plus de 4 variables.

Exemple :

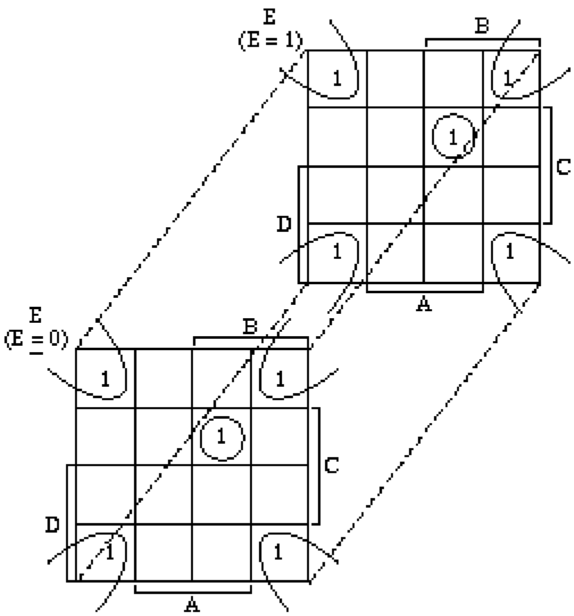


Ça découle directement de ce que E est soit 1 ou 0.

Exemple : table-K à 4 variables dessinées à partir de tables à 3 entrées.



Cas à 5 variables, on peut disposer les tables 2 à 2 pour une visualisation "3D":



Termes de côtés :

$$\overline{A}\,\overline{C}E + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{E} = \overline{A}\,\overline{C}\left(\underbrace{E+\overline{E}}_{1}\right) = \overline{A}\,\overline{C}$$

Terme central :

$$ABC\overline{D}E + ABC\overline{D}\,\overline{E}$$

$$ABC\overline{D}\left(\underbrace{E+\overline{E}}_{1}\right) = ABC\overline{D}$$

La simplification se fait s'il y a superposition en E et en E complémenté
Les regroupements et simplifications sont toutefois moins évidents !

Et finalement : $S = \overline{A}\,\overline{C} + ABC\overline{D}$

3.7 Algorithme Quine –Mcluskey

Il existe des algorithmes plus ou moins sophistiqués pour la simplification des tables-K. Ces algos se prêtent bien à la programmation et sont employés dans des logiciels spécialisés :

Exemple : ABEL vu dans le cours GIF-17456

Ils sont basés sur les méthodes tabulaires.

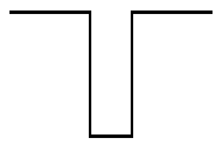
3.8 Aléas

définition : malfonctionnement des circuits combinatoires qui causent des erreurs transitoires (« glitches ») qui surviennent lorsqu'une entrée change.

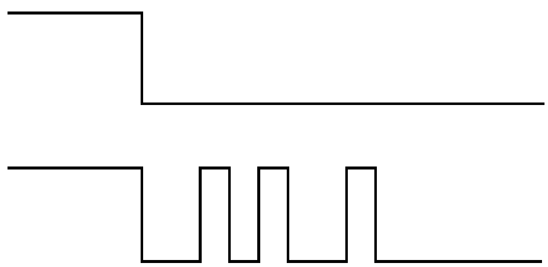
On distingue :

Aléas statiques : causés par les délais inégaux entre plusieurs voies de transmission à travers un circuit combinatoire ce qui provoque une transition simple et momentanée du

signal de sortie :



Aléas dynamiques : transitions multiples, mais momentanées du signal de sortie à la suite du changement d'entrée. Le plus courant : contact mécanique qui rebondit.

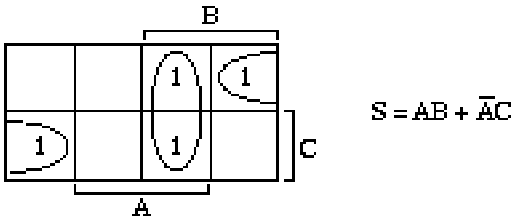


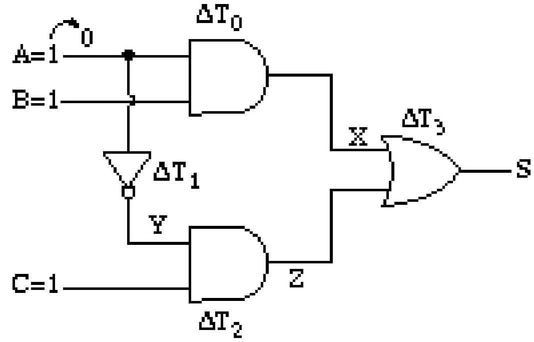
(cf chapitre ultérieur)

Aléas essentiels : erreurs d'opération qui provoquent des transitions dans les états non-valides dans les systèmes séquentiels à synchrones.

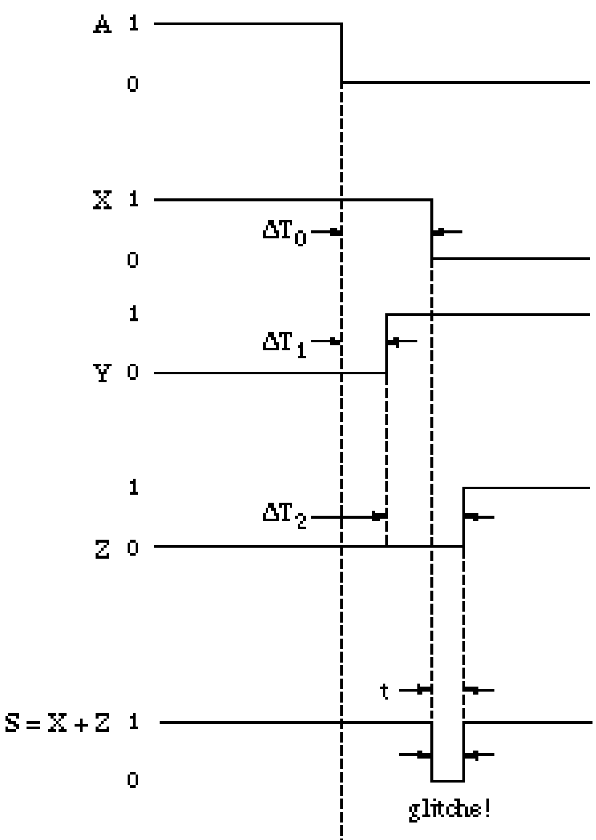
Aléas statiques: Ils apparaissent dans une table K comme saut d'un groupement à l'autre lorsqu'on change une et seulement une variable. La transition est due aux différences de temps de propagation selon les voies de transmission.

Soit la tdv suivante :





Que se passe-t-il si B=C=1 et que A passe de « 1 » à « 0 ». On aura une transition :



$$t = (\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3) - (\Delta T_0 + \Delta T_3)$$

délai propagation par voie inférieure — délai propagation voie supérieure

$si\ \Delta T_o = \Delta T_1 + \Delta T_2$

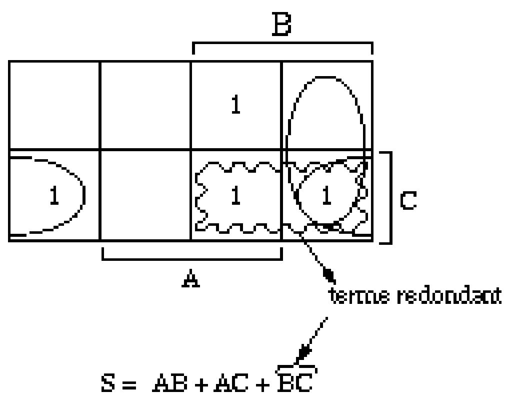
pas d'aléas!

[cas improbable]

<u>Correction des Aléas</u>

Dans les circuits pour lesquels un régime transitoire peut provoquer un fonctionnement « erratique », il faut éliminer les risques d'aléas.
Règle 1 : amortir les interrupteurs
Règle 2 : ajouter des termes redondants qui lient les groupes séparés
par une seule transition.

Exemple :



Revenons au cas précédent B=C=1 et A passe de 1 à 0.

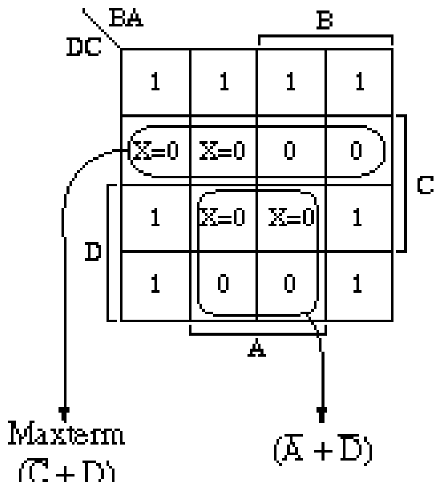
Cette fois pas d'aléas puisque même lors de la transition le terme redondant BC reste à 1.

Aucun aléas !

Choix « sans importance »

Déterminer l'expression POS pour sortie en rassemblant les zéros dans les 2 tables-K suivantes :

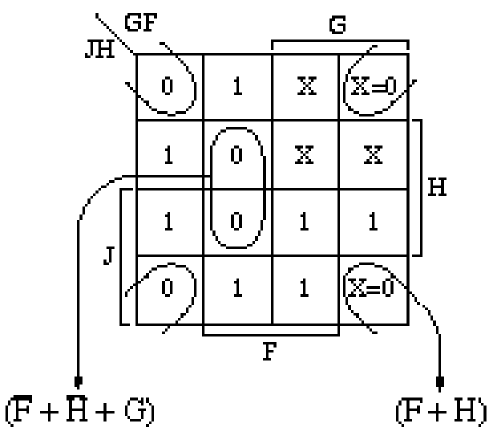
a)



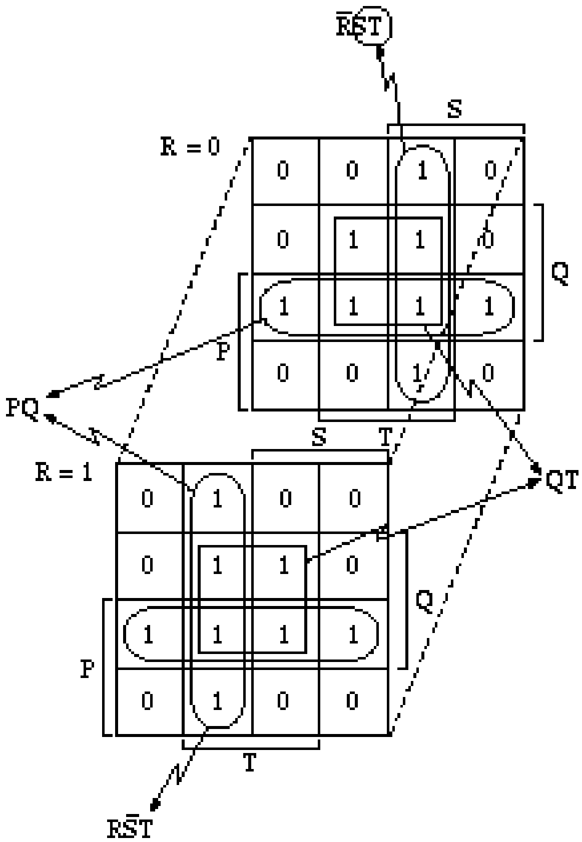
Solution : il faut avoir
Les + grands groupes donc
On met des x=0

$$\Rightarrow S = \left(\overline{C} + D\right)\left(\overline{A} + \overline{D}\right)$$

b) $S = (F + H)(\overline{F} + \overline{H} + G)$



Rappel



$SOP = PQ + QT + R\bar{S}T + \bar{R}ST$