

# Amélioration de la compression des images par la transformation multi-échelle de Faber-Schauder

H.Douzi\*, D.Mammass\* & F.Nouboud\*\*

\* Equipe d'Analyse Numérique et Calcul Scientifique, Faculté des Sciences, Agadir, Maroc

E-mail: fsa@maghrebnet.net.ma, Fax: 212.08.220100

\*\*Département de Mathématiques et d'Informatique, Université du Québec à Trois-Rivières,

CP 500, Trois-Rivières, (QC) G9A5H7. E-mail: nouboud@uqtr.quebec.ca

March 26, 1999

## Abstract:

We construct a fast and exact multiscale transformation algorithm, baptized FMT, for gray level images. This algorithm has the advantages of both the Laplacian Pyramid scheme and Mallat wavelet transform. A mixed-scale visualization of the FMT transform in one image shows clearly the phenomenon of information concentration around edges regions. We can then get a good characterization of an image from only few significant multiscale coefficients, we can also improve some standards compression methods (JPEG and GIF) by combining them with FMT.

**Key words:** Multiscale transformations, Wavelets basis, Faber-Schauder multiscale basis, Image compression, Mixed scale visualisation, JPEG and GIF methods.

## Résumé:

Nous construisons un algorithme de transformation multi-échelle (FMT) des images à niveaux de gris qui est rapide et exacte. Cet algorithme représente un bon compromis entre le Schéma du Pyramide laplacienne et la transformation en ondelettes de Mallat. Nous présentons ensuite une visualisation à échelles mixtes des images transformées qui permet de mettre en évidence les propriétés de concentration de l'information autour des régions contours. Cette représentation offre des possibilités de compression des images par la transformation FMT et permet l'amélioration de certaines méthodes standard (JPEG et GIF) par combinaison avec FMT.

**Mots clés:** Transformations multi-échelles, Bases d'ondelettes, base multi-échelle de Faber-Schauder, Compression d'images, Visualisation à échelles mixtes, Méthodes JPEG et GIF.

## 1 Introduction

Dans beaucoup de méthodes de compression d'images à niveaux de gris, l'idée principale consiste à les transformer de façon à concentrer l'information (ou l'énergie) de l'image sur un petit nombre de pixels. En général, les transformations linéaires sont préférées car elles se prêtent très bien à une étude analytique. Parmi les transformations les plus utilisées, on peut citer celle du cosinus qui est à la base de la norme de compression JPEG [1][7].

Les transformations multi-échelles permettent de prendre en compte, en même temps les grandes structures et les petits détails contenus dans une image et de ce point de vue elles possèdent des similarités avec le système visuel humain [2][7]. L'algorithme de Pyramide laplacienne de Burt-Adelson fut le premier exemple connu mais il souffre notamment de la redondance de la représentation des données après transformation. Mallat a utilisé l'analyse des ondelettes pour développer un algorithme rapide de transformations multi-échelles des images qui a la même philosophie que le schéma du Pyramide Laplacienne mais qui est plus efficace.

Dans cette étude nous présentons une transformation multi-échelles, qui effectue un changement de base vers la base de Faber-Schauder, et nous construisons un algorithme de transformation (et transformation inverse) qui est rapide et exacte; cette transformation sera désignée par FMT. Nous présentons ensuite une méthode de visualisation à échelles mixtes qui permet d'observer, sur une seule image, l'effet de la transformation. On constate alors une concentration des coefficients autour des régions des contours et ceci est confirmé par l'aspect particulier de l'histogramme. Si on prend en compte uniquement ses coefficients significatifs on a seulement une petite perturbation de l'image multi-échelle et avec un bon conditionnement

on pourra reconstruire l'image initiale sans grande dégradation. Enfin, la visualisation à échelles mixtes permet d'améliorer les performances de compression des méthodes JPEG et surtout GIF.

Dans la section 2, nous décrivons la construction de la base multi-échelle de Faber-Schauder et nous élaborons l'algorithme de transformation et transformation inverse. Dans la section 3, nous introduisons la visualisation à échelles mixtes des images transformées et nous illustrons ses propriétés. Dans les sections 4 et 5, nous étudions les possibilités de compression de la transformation FMT et de ses combinaisons avec les méthodes JPEG et GIF.

## 2 Expression des images dans la base multi-échelle de Faber-Schauder

Considérons l'analyse multirésolution [4] de  $L^2(R)$  composé des espaces:

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$$

où  $V_j$  est l'espace vectoriel des fonctions continues linéaires par morceaux sur les intervalles  $([k2^j, (k+1)2^j])_{k \in \mathbb{Z}}$ . Une base inconditionnelle de chaque espace  $V_j$ , appelée base canonique, est donnée par la famille de fonctions:

$$\begin{aligned} & (\Phi_n^j(x) = 2^{-j} \Phi(2^{-j}x - n))_{n \in \mathbb{Z}} \\ \text{où: } \Phi(x) = & \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Un signal 1D  $f^0$  est en fait une séquence de nombres  $f^0 = (f_n^0)_{n \in \mathbb{Z}}$  dans  $l^2(\mathbb{Z}^2)$  (puisque un signal a une énergie finie); donc il peut être associé à une fonction  $f$  de  $V_0$  par:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^0 \Phi_n^0(x)$$

Pour définir la base de Faber-Schauder, on introduit la famille d'espaces  $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(R)$  tels que  $V_j$  est une somme direct de  $V_{j+1}$  et  $W_{j+1}$ :  $V_j = V_{j+1} \dot{+} W_{j+1}$ .

L'espace  $W_j$  est défini par le choix d'une base. Pour la base de Faber-Schauder, elle est donnée par la famille:  $(\Psi_n^j = \Phi_{2n+1}^j)_{n \in \mathbb{Z}}$

et la base multi-échelle de Faber-Schauder de  $L^2(R)$  est donnée par:  $(\Psi_n^j)_{n,j \in \mathbb{Z}}$

De la même façon dans le cas bidimensionnel, une analyse multirésolution de  $L^2(R^2)$  peut être construite à partir des produits tensoriels des espaces  $V_j$ :  $V_j = V_j \times V_j$ , la base canonique de  $V_j$  est alors donnée par:

$$\begin{aligned} & (\Phi_{mn}^j(x,y) = 2^{-j} \Phi(2^{-j}x - m, 2^{-j}y - n))_{m,n \in \mathbb{Z}} \\ \text{avec: } & \Phi(x,y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y) \end{aligned}$$

Les images sont eux aussi des séquences de nombres  $f^0 = (f_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$  dans  $l^2(\mathbb{Z}^2)$  représentant les valeurs des pixels. Une image peut donc être associée à une fonction  $f$  de  $V_0$  donnée par:  $f(x,y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} f_{mn} \Phi_{m,n}^0(x,y)$

Pour construire la base de Faber-Schauder, on considère la famille des sous espaces  $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(R^2)$  où  $V_j$  une somme direct de  $V_{j+1}$  et  $W_{j+1}$ :

$$\begin{cases} V_j = V_{j+1} \dot{+} W_{j+1} \\ W_{j+1} = V_{j+1} \times W_{j+1} \dot{+} W_{j+1} \times V_{j+1} \\ \quad \dot{+} W_{j+1} \times W_{j+1} \end{cases}$$

La base de l'espace  $W_{j+1}$  est donnée par:

$$\begin{aligned} & (\Psi_{1,m,n}^{j+1} = \Phi_{2m+1}^j \times \Psi_n^{j+1}, \Psi_{2,m,n}^j = \Psi_m^{j+1} \times \Phi_{2n}^j \\ & \quad , \Psi_{3,m,n}^j = \Psi_m^{j+1} \times \Psi_n^{j+1})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \end{aligned}$$

et la base inconditionnelle et multi-échelle de Faber-Schauder de  $L^2(R^2)$  est donnée par:  $(\Psi_{1,m,n}^k, \Psi_{2,m,n}^k, \Psi_{3,m,n}^k)_{k,m,n \in \mathbb{Z}^2}$

Une fonction de  $V_0$ :  $f(x,y) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} f_{mn}^0 \Phi_{mn}^0(x,y)$

peut être décomposée de façon unique suivant  $V_1$  et  $W_1$  par:

$$\begin{aligned} f(x,y) = & \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} f_{mn}^1 \Phi_{mn}^1(x,y) \\ & + \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (g_{mn}^{11} \Psi_{mn}^1(x,y) + g_{mn}^{21} \Psi_{mn}^2(x,y) \\ & \quad + g_{mn}^{31} \Psi_{mn}^3(x,y)) \end{aligned}$$

La suite  $f^1$  est une version grossière de l'image originale  $f^0$  (une approximation polygonale de  $f^0$ ), tandis que  $g^1 = (g^{11}, g^{21}, g^{31})$  représente la différence d'information entre  $f^0$  et  $f^1$ .  $g^{11}$  (respectivement  $g^{21}$ ) représente la différence pour la première (respectivement la seconde) variable et  $g^{31}$  la différence diagonale pour les deux variables.

Les suites  $f^1, g^1$  peuvent être calculées à partir de  $f^0$  de la manière suivante:

$$\begin{cases} f_{mn}^1 = f_{2m,2n}^0 \\ g_{mn}^{11} = f_{2m+1,2n}^0 - \frac{1}{2}(f_{2m,2n}^0 + f_{2m+2,2n}^0) \\ g_{mn}^{21} = f_{2m,2n+1}^0 - \frac{1}{2}(f_{2m,2n}^0 + f_{2m,2n+2}^0) \\ g_{mn}^{31} = f_{2m+1,2n+1}^0 - \frac{1}{4}(f_{2m,2n}^0 + f_{2m,2n+2}^0 \\ \quad + f_{2m+2,2n}^0 + f_{2m+2,2n+2}^0) \end{cases}$$

réciroquement, on peut reconstruire la suite  $f^0$  à partir de  $f^1$  et  $g^1$  par:

$$\begin{cases} f_{2m,2n}^0 = f_{mn}^1 \\ f_{2m+1,2n}^0 = g_{mn}^{11} + \frac{1}{2}(f_{mn}^1 + f_{m+1,n}^1) \\ f_{2m,2n+1}^0 = g_{mn}^{21} + \frac{1}{2}(f_{mn}^1 + f_{m,n+1}^1) \\ f_{2m+1,2n+1}^0 = g_{mn}^{31} + \frac{1}{4}(f_{mn}^1 + f_{m,n+1}^1 \\ \quad + f_{m+1,n}^1 + f_{m+1,n+1}^1) \end{cases}$$

On obtient ainsi un algorithme pyramidal qui, à chaque étape (ou échelle)  $j$ , décompose (respectivement reconstruit) la suite  $f^j$  en (respectivement à partir de)  $f^{j+1}$  et  $g^{j+1}$ . Nous désignons cette transformation par FMT ( transformation multi-échelle de Faber-Schauder). Le nombre d'opérations utilisées dans l'algorithme est proportionnel au nombre des données  $N$  non nulles dans le signal ( $O(N)$  ) ce qui fait de lui un algorithme très rapide, en plus les opérations contiennent uniquement des nombres arithmétiques, donc la transformation est exacte et ne produit aucune approximation dans son implémentation numérique.

Les transformation multi-échelles ont été d'abord introduites dans le traitement d'images par l'algorithme du Pyramide laplacienne de P. Burt et E. Adelson, ensuite Mallat a développé, à partir des bases orthonormales des ondelettes, un algorithme rapide de transformation et de reconstruction des images dans ces bases. L'algorithme de Mallat ressemble à l'algorithme de Burt-Adelson mais il est plus efficace car il ne génère pas de la redondance dans l'information, élimine les corrélations entre les différentes échelles, et donne des indications d'orientations spatiales dans l'image. La transformation FMT a exactement le même principe de construction que celle de Mallat sauf que la base canonique de l'analyse multirésolution n'est pas une base orthogonale. Ceci ne l'empêche pas d'avoir les mêmes propriétés [10] en traitement d'image que les bases d'ondelettes. D'autre part, l'algorithme FMT est plus proche de celui du Pyramide laplacienne car il est très simple et totalement discret ce qui permet d'observer directement sur les pixels les effets de la transformation. Finalement la transformation FMT est un bon compromis entre les bases d'ondelettes et le schéma du Pyramide Laplacienne.

### 3 Visualisation des image transformées par FMT

En général, le résultat de la transformation par ondelettes d'une image est représenté par une séquence pyramidale d'images qui représentent les différences d'information entre les échelles successives (cf. figure 1A). Cependant, on peut regarder la transformation multi-échelle FMT comme une application linéaire, de la base canonique à la base multi-échelle, qui distribue différemment l'information contenue dans l'image ini-

tiale. Il est donc plus naturel de visualiser cette redistribution, dans la base multi-échelle, sur une seule image comme c'est le cas dans la base canonique. Le principe de visualisation des images dans la base canonique consiste à placer chaque coefficient à l'endroit où sa fonction de base atteint son maximum, le même principe s'impose naturellement pour la base multi-échelles (cf. figure 1B).

L'image obtenue ainsi est une image cohérente qui ressemble à une représentation des contours de l'image originale (cf. figure 2). En fait la transformation FMT, comme certaines transformations d'ondelettes, possède des similarités avec le détecteur de bords de Canny [10][3][8] où les contours correspondent aux maximums locaux en module de la transformation. En effet dans le cas de la transformation FMT, à chaque échelle, la valeur de chaque pixel est donnée par le calcul de la différence avec ses voisins de l'échelle précédente. Donc les régions qui présentent un pic local pour ces différences correspondent à une transition lumineuse forte pour les valeurs de gris; tandis que les régions, où ces différences sont nulles, sont associées à une région où le niveau de gris est constant.

### 4 Compression d'images par la transformation FMT

On vient de voir que la transformation des images par FMT donne, par le biais de la visualisation à échelle mixte, une bonne description des contours de l'image. En fait le résultat est plus qu'une image de contours parce qu'il contient exactement les mêmes informations que l'image initiale et on peut même retrouver l'image originale par la transformation inverse. Ceci nous conduit à se poser la question de savoir si ces coefficients multi-échelles des régions des contours caractérisent complètement l'image. Sur le plan théorique la réponse est négative, en effet il existe, dans le cas des transformations continues d'ondelettes, des contre-exemples de fonctions différentes qui possèdent les mêmes points contours dans leur transformation d'ondelettes[3]. Donc on peut seulement espérer que les dégradations introduites, si on ne prend pas en compte les régions non contours, restent imperceptibles dans l'image restituée.

Une propriété intéressante de la transformation FMT, qui est valable aussi pour les transformation d'ondelettes, est l'aspect caractéristique qu'elle donne aux histogrammes des images transformées: le nombre des coefficients pour un niveau de gris donné décroît très rapidement, pour devenir pratiquement nul, lorsqu'on s'éloigne d'une valeur centrale très proche de zéro (cf. figure 3). Ceci implique que l'information

(ou l'énergie) de l'image transformée est concentrée dans un petit nombre des coefficients significatifs confinés dans les régions des contours de l'image initiale. Donc l'annulation des autres coefficients (presque nuls) provoque uniquement une petite perturbation de l'image transformée. Pour connaître l'effet d'une telle perturbation sur la reconstruction de l'image initiale il faut calculer le conditionnement de la matrice de la transformation FMT, en effet si on a  $f = Mg$  où  $f$  est l'image initiale et  $g$  l'image multi-échelle alors le conditionnement de  $M$  ( $cond(M) = \|M\| \cdot \|M^{-1}\| \geq 1$ ) vérifie:

$$\frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \leq cond(M) \frac{\|\delta g\|}{\|g\|}$$

C'est à dire que la variation relative de l'image restituée ne peut pas être très importante par rapport à celle de l'image multi-échelle si le conditionnement est proche de 1. Pour les transformations orthonormales le conditionnement est toujours égales à 1 donc optimal, cependant on peut toujours améliorer le conditionnement si on peut multiplier chaque colonne (ou chaque ligne) par un scalaire bien choisi, dans le cas d'un changement de base ceci revient à changer la normalisation des éléments de la base.

Dans le cas ID on peut voir facilement que le conditionnement, pour la norme induite de  $l_\infty$ , ne dépasse pas 5. Pour les images 2D les résultats obtenus (cf. figure 4) confirment que dans ce cas aussi on obtient un bon conditionnement. Plus généralement on a constaté qu'on peut pratiquement toujours éliminer entre 90% et 99% de coefficients multi-échelles sans dégradation notable de l'image reconstruite et avec un bon rapport signal bruit SNR (qui n'est autre que le carré de l'inverse de la variation relative). Les résultats sont, bien sûr meilleurs, lorsque les images ne sont pas très texturées (cf. Tableau1).

Images	coefficients éliminés	SNR
Peppers	90 %	58
Hiway	77%	124
Lena	85 %	40
Objets	94 %	30

Tableau 1: Pourcentage des coefficients éliminés et SNR de quelques images reconstituées (voir fig. 4).

Si nous comparons les performances de la transformation FMT avec la méthode standard de compression JPEG, on constate qu'on peut atteindre de bons résultats de compression sans dégradation de l'image; de plus ces résultats sont obtenus en appliquant la transformation multi-échelle sur l'image toute entière alors

que la transformation DCT qui est à la base de la méthode JPEG n'est efficace que lorsqu'elle est appliquée sur un block réduit de pixels (en général des blocks de  $8 \times 8$  pixels) [9], ce qui entraîne l'apparition des blocks d'artefacts sur les images quand le taux de compression est élevé. Ce phénomène de blocks est absent pour la transformation FMT (cf. figure5).

## 5 Amélioration de JPEG et GIF par FMT

On vient de voir que la représentation des images en base multi-échelle de Faber-Schauder a pour effet de compacter une grande partie de l'énergie de l'image dans les régions des contours. Ceci est bien illustré dans la représentation à échelle mixte de ces images. L'idée de compacter l'information contenue dans une image et garder uniquement les coefficients dominants n'est pas nouvelle, elle a déjà fait ses preuves, par exemple, dans la méthode DCT (discret cosine transform) qui est à la base de plusieurs algorithmes standards de compression comme JPEG et MPEG [9] [11]. Pour tester les possibilités de compression offerte par la représentation à échelles mixte des images transformées par FMT nous les avons stockés sous les format JPEG et GIF qui sont des outils standards pour la compression des images.

L'algorithme JPEG déforme les images après leurs stockage mais permet aussi d'obtenir les meilleurs taux de compression. C'est particulièrement le cas pour des images de scènes réelles ou photographiques [11]. Cependant, pour un taux de compression important, on peut observer des blocks d'artefacts. Lorsqu'on applique JPEG sur des images transformées par FMT et sous une représentation à échelle mixte on constate toujours une légère amélioration du taux de compression par rapport à l'image exprimée dans la base canonique. Ceci est valable même si on n'effectue aucun changement sur les coefficients multi-échelles. Ceci suggère qu'on peut améliorer les performances de JPEG en utilisant des bases multi-échelles (cf. Tab. 2 ). Le stockage des images sous le format GIF ne déforme pas les images lorsqu'elle sont exprimées en niveaux de gris (256 niveaux) mais, en général, les résultats de compression sont moins performants que le format JPEG sauf pour des images peu texturées (comme les bandes dessinées) où on obtient des résultats meilleurs car JPEG a du mal à traiter les régions très contrastées [11]. Lorsqu'on applique GIF à des images multi-échelles avec une représentation à échelle mixte, les taux de compression s'améliorent nettement et s'approchent des résultats obtenus avec JPEG (même avec des images très texturées) (cf. Tab. 2 ) sans oublier que la transformation GIF+FMT est exacte pour les images

en niveaux de gris. Les images transformées avec une représentation à échelles mixtes se prêtent donc bien à la compression par le format GIF.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté une transformant multi-échelle (FMT) issue de l'expression des images dans la base de Faber-Schauder. Cette méthode se distingue par sa simplicité et ses performances de confinement de l'information sur les régions des contours de l'image. La visualisation à échelles mixtes des images transformées permet de mettre en évidence ses propriétés, en particulier les possibilités de compression des images et l'amélioration des performances de méthodes standards de compression comme JPEG et GIF.

## References

- [1] P.J.Burt and E.H.Adelson, "The Laplacian pyramid as a compact image code", *IEEE Trans. comm.*, vol. COM-31, pp. 532-540, Apr. 1983.
- [2] S.G.Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, July 1989.
- [3] S.G.Mallat and S.Zhong, "Characterization of Signals from Multiscale Edges", *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol 14, No 7, July 1992.
- [4] Y.Meyer, "Ondelettes sur l'intervalle", *Cahiers de la mathématiques de la décision no:9020*, Centre de recherche de mathématiques de la décision (CERE-MADE).1992
- [5] Y.Meyer "Ondelettes et Operateurs". New York, Hermann, 1990.
- [6] I.Daubechies, Orthonormal basis of compactly supported wavelets, *Comm. Pure &App. Math.*, Volume 41, (1988), p909-996.
- [7] G.Granland, M.Kocher, C.Horne, *Traitement numérique des images*, sous la direction de Murat Kunt, Press Polytechniques Universitaires Romande, Paris, CNET-ENST, 1993.
- [8] J.Canny, "A computational approach to edge detection", *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-8, pp. 679-698, 1986.
- [9] N.Ahmed, T.Natarjan, and K.R. Rao, "Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. on Computers*, vol. C-23, pp. 90-93. January 1974.
- [10] H.Douzi, D.Mammass & F.Nouboud, "Multiscale edge detection and image characterization by the Faber-Schauder multiscale basis.", Article soumis..
- [11] JPEG Groupe, site [FTP::ftp.uu.net](ftp://ftp.uu.net) (192.48.96.9) in directory /graphics/jpeg.

Format de stockage	Lena	Peppers	Hiway	Objets
JPEG	8.98	9.07	17.90	6.81
JPEG+FMT	8.93	6.44	12.80	7.39
GIF	63.70	63.40	69.10	42.50
GIF+FMT	16.50	14.70	28.90	7.94

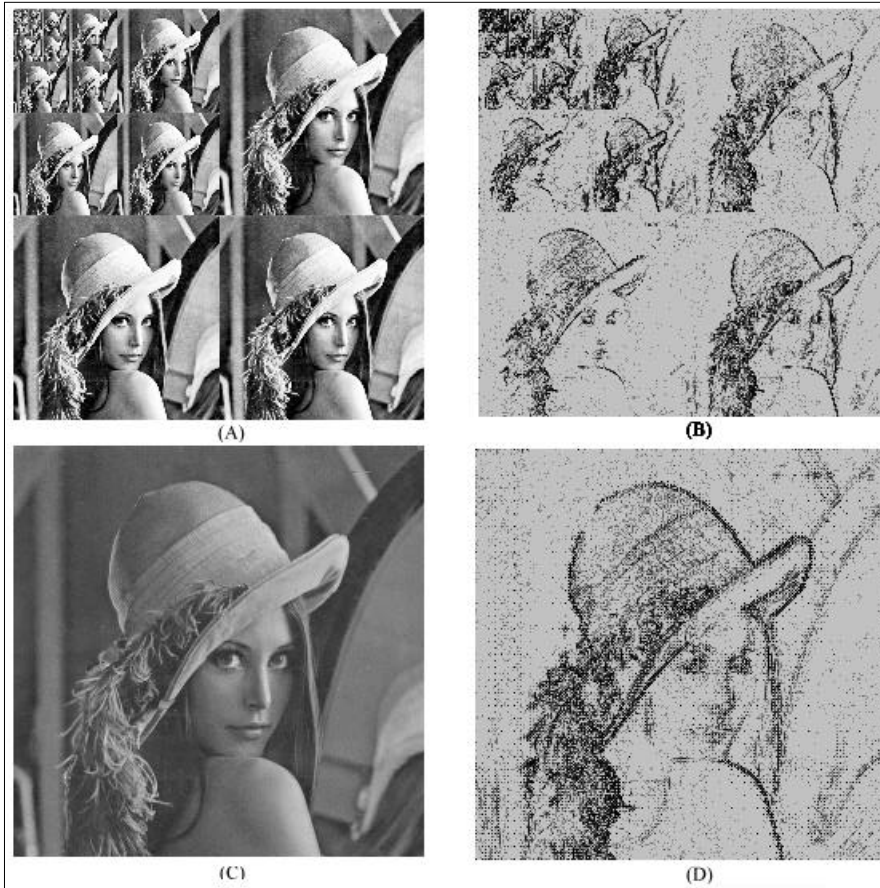
Tableau 2: Tailles des images (en Ko) stockées avec et sans la transformation multi-échelle FMT(avec une représentation à échelles mixtes).

$f_{00}^0$	$f_{08}^0$	$g_{00}^{31}$	$g_{00}^{21}$	$g_{01}^{21}$	$g_{00}^{11}$	$g_{01}^{11}$	$g_{02}^{11}$	$g_{03}^{11}$
$f_{80}^0$	$f_{88}^0$	$g_{10}^{31}$	$g_{10}^{21}$	$g_{11}^{21}$	$g_{10}^{11}$	$g_{11}^{11}$	$g_{12}^{11}$	$g_{13}^{11}$
$g_{00}^{32}$	$g_{01}^{32}$	$g_{00}^{33}$	$g_{20}^{21}$	$g_{21}^{21}$	$g_{20}^{11}$	$g_{21}^{11}$	$g_{22}^{11}$	$g_{23}^{11}$
$g_{00}^{22}$	$g_{01}^{22}$	$g_{02}^{22}$	$g_{00}^{23}$	$g_{01}^{23}$	$g_{30}^{11}$	$g_{31}^{11}$	$g_{32}^{11}$	$g_{33}^{11}$
$g_{10}^{22}$	$g_{11}^{22}$	$g_{12}^{22}$	$g_{10}^{23}$	$g_{11}^{23}$	$g_{40}^{11}$	$g_{41}^{11}$	$g_{42}^{11}$	$g_{43}^{11}$
$g_{00}^{12}$	$g_{01}^{12}$	$g_{02}^{12}$	$g_{03}^{12}$	$g_{04}^{12}$	$g_{00}^{13}$	$g_{01}^{13}$	$g_{02}^{13}$	$g_{03}^{13}$
$g_{10}^{12}$	$g_{11}^{12}$	$g_{12}^{12}$	$g_{13}^{12}$	$g_{14}^{12}$	$g_{10}^{13}$	$g_{11}^{13}$	$g_{12}^{13}$	$g_{13}^{13}$
$g_{20}^{12}$	$g_{21}^{12}$	$g_{22}^{12}$	$g_{23}^{12}$	$g_{24}^{12}$	$g_{20}^{13}$	$g_{21}^{13}$	$g_{22}^{13}$	$g_{23}^{13}$
$g_{30}^{12}$	$g_{31}^{12}$	$g_{32}^{12}$	$g_{33}^{12}$	$g_{34}^{12}$	$g_{30}^{13}$	$g_{31}^{13}$	$g_{32}^{13}$	$g_{33}^{13}$

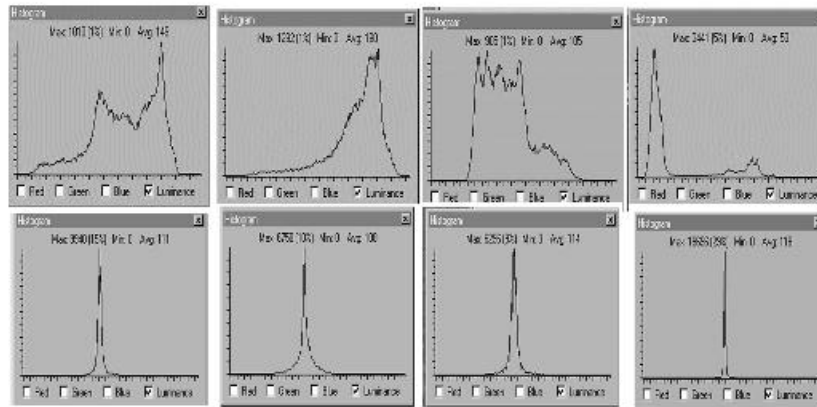
Figure 1A: Représentation à échelles séparées pour une image  $9 \times 9$  transformée dans la base multi-échelle.

$f_{00}^0$	$g_{00}^{11}$	$g_{00}^{21}$	$g_{01}^{11}$	$g_{00}^{31}$	$g_{02}^{11}$	$g_{01}^{21}$	$g_{03}^{11}$	$f_{08}^0$
$g_{00}^{12}$	$g_{00}^{13}$	$g_{01}^{12}$	$g_{01}^{13}$	$g_{02}^{12}$	$g_{02}^{13}$	$g_{03}^{12}$	$g_{03}^{13}$	$g_{04}^{12}$
$g_{00}^{22}$	$g_{10}^{11}$	$g_{00}^{23}$	$g_{11}^{11}$	$g_{01}^{22}$	$g_{12}^{11}$	$g_{01}^{23}$	$g_{13}^{11}$	$g_{02}^{22}$
$g_{10}^{12}$	$g_{10}^{13}$	$g_{11}^{12}$	$g_{11}^{13}$	$g_{12}^{12}$	$g_{12}^{13}$	$g_{13}^{12}$	$g_{13}^{13}$	$g_{14}^{12}$
$g_{00}^{32}$	$g_{20}^{11}$	$g_{10}^{21}$	$g_{21}^{11}$	$g_{00}^{33}$	$g_{22}^{11}$	$g_{11}^{21}$	$g_{23}^{11}$	$g_{01}^{32}$
$g_{20}^{12}$	$g_{20}^{13}$	$g_{21}^{12}$	$g_{21}^{13}$	$g_{22}^{12}$	$g_{22}^{13}$	$g_{23}^{12}$	$g_{23}^{13}$	$g_{24}^{12}$
$g_{10}^{22}$	$g_{30}^{11}$	$g_{10}^{23}$	$g_{31}^{11}$	$g_{11}^{22}$	$g_{32}^{11}$	$g_{11}^{23}$	$g_{33}^{11}$	$g_{12}^{22}$
$g_{30}^{12}$	$g_{30}^{13}$	$g_{31}^{12}$	$g_{31}^{13}$	$g_{32}^{12}$	$g_{32}^{13}$	$g_{33}^{12}$	$g_{33}^{13}$	$g_{34}^{12}$
$f_{80}^0$	$g_{40}^{11}$	$g_{20}^{21}$	$g_{41}^{11}$	$g_{10}^{31}$	$g_{42}^{11}$	$g_{21}^{21}$	$g_{43}^{11}$	$f_{88}^0$

Figure 1B: Représentation à échelles mixtes, les coefficients sont placés à l'endroit où leurs fonctions de bases sont maximales.



**Figure2: Représentation à échelles séparées (en haut) et à échelles mixtes (en bas) de "lena"**  
 Les coefficients sont dans la base canonique dans (A),(C)  
 et dans la base multi-échelle de Faber-Schauder dans (B),(D).



**Figure3: Echantillon d'histogrammes d'images (Peppers,Hiway,Lena,objet) exprimées dans la base canonique (en haut) et en base multiéchelle (en bas).**



**Figure4: Image initiale "Peppers" (à gauche) et sa reconstruction à partir des coefficients multi-échelles dominants (environ 10% des coefficients).**



**Figure5: Dégradation de "lena" par FMT (à gauche) et JPEG (à droite)  
FMT : pourcentage de coefficients éliminés: (a) 90%,(c)93%.  
JPEG: rapport de compression: (b)29:1,(d)48:1.**